SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAWRENCE BREEN

Un théorème de finitude en *K*-théorie

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. nº 438, p. 36-57

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__36_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 438
Novembre 1973

UN THÉORÈME DE FINITUDE EN K-THÉORIE

[d'après D. QUILLEN]

par Lawrence BREEN

D. Quillen a récemment proposé une nouvelle définition des groupes $K_i(\mathcal{C})$ associés à une catégorie $\mathcal{C}$ possédant une notion de suite exacte. Cette nouvelle définition redonne, pour $i = 0$, le groupe de Grothendieck $K_o\mathcal{C}$ de la catégorie $\mathcal{C}$. Lorsqu'on prend pour $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathcal{P}$ des modules projectifs de type fini sur un anneau A, on obtient des groupes $K_i(A)$ dont on peut montrer qu'ils coïncident, pour $i = 1, 2$, avec les groupes définis respectivement par Bass [3] et Milnor [12]. De même, lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de type fini, on trouve des groupes $K_i(X)$ associés à un schéma X. Dans tous les cas, ces foncteurs K_i possèdent diverses propriétés d'exactitude exprimées à l'aide de suites exactes bien connues pour $i \leq 2$.

Différents auteurs, notamment Karoubi-Villamayor, Gersten-Swan et Anderson-Segal ont proposé d'autres définitions des groupes $K_i(A)$ (on peut consulter [22], [9] pour une vue d'ensemble de ces questions). On se bornera ici à indiquer brièvement l'équivalence entre la nouvelle définition de Quillen et celle qu'il avait donnée dans [14]. Pour les détails de la démonstration, il conviendra de se référer à son article en préparation. Les liens entre cette dernière définition et toutes les autres sont explicités dans [1], [2].

Une description détaillée de tous les résultats de Quillen dépasserait le cadre de cet exposé. On se bornera donc, une fois définis les K_i, à démontrer l'un d'entre eux, qui met en oeuvre les techniques développées par celui-ci. Il s'agit du

THÉORÈME 1.- Soit A l'anneau des entiers d'un corps de nombres F (fini sur $\mathbb{Q}$). Pour tout $i \geq 0$, les groupes $K_i(A)$ sont de type fini.

Remarques.- 1) En particulier, les sous-groupes de torsion des $K_i(A)$ sont finis. Ceci permet de donner un sens à la conjecture de S. Lichtenbaum ([11] 2.4, 4.2) reliant le cardinal de ces sous-groupes aux valeurs de la fonction zêta de F aux entiers négatifs.

2) La démonstration fait appel à un théorème de Solomon-Tits ([21]) sur le type d'homotopie de l'immeuble associé à un système de Tits dont Quillen donne une nouvelle démonstration dans un cas particulier.

3) Signalons au passage que le rang des groupes $K_i(A)$ a été précédemment calculé par A. Borel ([5]).

4) Le théorème est aussi vrai pour A l'anneau des entiers relatifs à un nombre fini de valuations et pour A un ordre maximal dans une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple.

Pour plus de détails sur les sujets abordés ici, ainsi que sur les autres résultats de Quillen en K-théorie algébrique, on consultera [16], [17].

§ 1. Homotopie et homologie d'une catégorie ([8], [19])

Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie. Le nerf de $\mathcal{C}$ est l'ensemble simplicial $N\mathcal{C}$ défini de la manière suivante :

$$(N\mathcal{C})_0 = \mathrm{ob}\,\mathcal{C} \quad , \quad (N\mathcal{C})_1 = F\ell(\mathcal{C}) \ ,$$

et plus généralement $(N\mathcal{C})_n$ est l'ensemble des diagrammes de longueur $n + 1$ dans $\mathcal{C}$

$$X_0 \xrightarrow{\alpha_0} X_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\alpha_n} X_n \ ,$$

le i-ième opérateur face (resp. dégénérescence) étant obtenu en effaçant l'objet

X_i de manière évidente (resp. en remplaçant X_i par la flèche id_{X_i}). On nomme espace classifiant de $\mathcal{C}$ la réalisation géométrique $B\mathcal{C}$ de $N\mathcal{C}$. Un foncteur $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ induit une application continue $Bf : B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}'$. On dira que f est une équivalence d'homotopie (resp. que $\mathcal{C}$ est contractile) si c'est le cas pour Bf (resp. $B\mathcal{C}$).

Exemples.- 1) Soient $\mathcal{C}$ la catégorie avec un seul objet et un groupe G de flèches. Alors $N\mathcal{C}$ est l'ensemble simplicial d'Eilenberg-Maclane $K(G,1)$ sous sa forme la plus habituelle et $B\mathcal{C}$ est donc l'espace classifiant du groupe discret G , d'où la terminologie.

2) Un ensemble ordonné J est une catégorie de manière évidente. Alors BJ est le complexe simplicial dont les sommets sont les éléments de J , les simplexes correspondant aux parties non-vides finies totalement ordonnées de J (en particulier, le classifiant de l'ensemble totalement ordonné $\{0 < 1 \ldots < n\}$ est le n-simplexe type Δ_n).

3) Inversement, on peut associer à un complexe simplicial K l'ensemble $\mathrm{Simpl}\, K$ de ses simplexes, ordonnés par inclusion. Le complexe $B\,\mathrm{Simpl}\, K$ n'est autre que la subdivision barycentrique de K (et a donc même type d'homotopie que K). Ainsi, tout type d'homotopie d'un complexe simplicial (et donc d'un CW-complexe quelconque) peut être réalisé comme classifiant d'un ensemble ordonné.

On notera $\pi_i(\mathcal{C},X)$ les groupes d'homotopie de $B\mathcal{C}$ basés en la 0-cellule de $B\mathcal{C}$ correspondant à un objet X de $\mathcal{C}$. En particulier $\pi_0(\mathcal{C},X)$ est l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{C}$ (au sens habituel), pointé par X .

Le calcul du groupe fondamental (resp. du groupoïde fondamental) de $B\mathcal{C}$ peut se faire comme d'habitude en examinant les revêtements de $B\mathcal{C}$. Associons à tout revêtement E de $B\mathcal{C}$ un "système local" : pour tout objet X de $\mathcal{C}$, soit $\underline{\underline{E}}(X)$ la fibre de E au-dessus du 0-simplexe X de $B\mathcal{C}$. Une flèche $u : X' \to X$ dans $\mathcal{C}$ détermine un chemin dans $B\mathcal{C}$ et donc, par relèvement à E , une bijection $\underline{\underline{E}}(u) : \underline{\underline{E}}(X) \to \underline{\underline{E}}(X')$. On associe de cette manière à E un foncteur $\underline{\underline{E}} : \mathcal{C} \to$ Ens qui rend toutes les flèches inversibles ou, ce qui revient au même, un foncteur $\underline{\underline{E}}' : \Pi\mathcal{C} \to$ Ens , avec $\Pi\mathcal{C} = \mathcal{C}[F\ell\, \mathcal{C}^{-1}]$ le groupoïde obtenu à partir de $\mathcal{C}$ en y ajoutant de manière formelle des inverses à toutes les flèches (Π est le foncteur Gr de [8]: II 7.1). On appellera un tel $\underline{\underline{E}}$ (ou $\underline{\underline{E}}'$) un système local sur $\mathcal{C}$. Dans le sens contraire, il est facile de construire à partir d'un système local un revêtement de $\mathcal{C}$. Ainsi, on a la

PROPOSITION 1.- <u>La catégorie des revêtements de</u> $B\mathcal{C}$ <u>est canoniquement isomorphe à la catégorie des systèmes locaux sur</u> $\mathcal{C}$.

En particulier $\Pi\mathcal{C}$ s'identifie au groupoïde fondamental de $B\mathcal{C}$ et $\pi_1(\mathcal{C},X)$ est donc canoniquement isomorphe au groupe d'automorphismes de X considéré comme objet de $\Pi\mathcal{C}$.

<u>Propriétés élémentaires du foncteur classifiant</u> B

<u>Lemme</u> 1.- <u>Si</u> $\mathcal{C}$ (<u>ou</u> $\mathcal{C}'$) <u>est une catégorie possédant un nombre fini de flèches, l'application canonique</u> $B(\mathcal{C} \times \mathcal{C}') \to B\mathcal{C} \times B\mathcal{C}'$ <u>est un homéomorphisme</u>.

En effet, le foncteur N commute aux produits et il en est de même de la réalisation géométrique sous ces hypothèses.

<u>Lemme</u> 2.- <u>Tout morphisme de foncteurs</u> $\theta : f \to g$ (<u>avec</u> $f , g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$) <u>induit une homotopie reliant</u> Bf <u>à</u> Bg .

Ceci résulte du lemme 1 puisque θ peut s'interpréter comme un foncteur $\tilde{\theta} : \mathcal{C} \times J \to \mathcal{C}'$, avec J l'ensemble ordonné $\{0 < 1\}$.

COROLLAIRE 1.- <u>Un foncteur</u> f <u>qui possède un adjoint à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) f' <u>est une équivalence d'homotopie</u>.

En effet, les transformations naturelles $1 \to ff'$ et $f'f \to 1$ définissent l'équivalence d'homotopie. En particulier, si une catégorie $\mathcal{C}$ possède un objet final, le foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie ponctuelle E possède un adjoint. Ainsi

COROLLAIRE 2.- <u>Une catégorie possédant un objet final</u> (resp. <u>initial</u>) <u>est contractile</u>.

Soit $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur. Pour tout objet Q de $\mathcal{C}'$, on note f/Q la catégorie des paires (P,u) avec P un objet de $\mathcal{C}$ et $u : fP \to Q$ une flèche de $\mathcal{C}'$. On appelle $i_Q : f/Q \to \mathcal{C}$ le foncteur défini par $i_Q(P,u) = P$. On définit dualement une catégorie Q/f de paires (P,u) où $u : Q \to fP$ est une flèche de $\mathcal{C}'$.

DÉFINITION 1.- <u>Soit</u> $f^{-1}(Q)$ <u>la catégorie fibre de</u> $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ <u>au-dessus d'un objet</u> Q <u>de</u> $\mathcal{C}'$. <u>On dit que</u> f <u>est préfibrée</u> (resp. <u>précofibrée</u>) <u>si les foncteurs canoniques</u> $f^{-1}(Q) \to Q/f$ (resp. $f^{-1}(Q) \to f/Q$) <u>possèdent des adjoints à droite</u> (resp. <u>à gauche</u>) <u>pour tout</u> Q <u>dans</u> $\mathcal{C}'$. (On vérifie que cette définition coïncide avec celle de [10].)

Soit L un système local sur $B\mathcal{C}$ à valeurs dans Ab. L'homologie de $B\mathcal{C}$ à coefficients dans L coïncide avec une notion familière. En effet, à partir de la suite spectrale obtenue en filtrant $B\mathcal{C}$ par ses squelettes, on vérifie ([19] prop. 5.1) que $H_*(B\mathcal{C},L)$ s'identifie à l'homologie du complexe standard $C_*(\mathcal{C},L)$ permettant de calculer les foncteurs dérivés de $\varinjlim^{\mathcal{C}} L$ (voir [18], [8]: App. II, prop. 3.3). Ainsi

PROPOSITION 2.- <u>Pour tout</u> $p \geq 0$, $H_p(B\mathcal{C},L) \approx \varinjlim_p^{\mathcal{C}} L$.

Comme d'habitude, l'outil principal permettant de comparer de tels groupes d'homologie est la suite spectrale de Serre. Celle-ci s'écrit ([8] App. II, 3.6, 3.8) pour tout foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et tout foncteur $L : \mathcal{C} \to Ab$:

$$(1.1) \qquad E^2_{p,q} = \varinjlim_p^{\mathcal{C}'} (Q \to \varinjlim_q^{f/Q} L \circ i_Q) \Rightarrow \varinjlim_{p+q}^{\mathcal{C}} L .$$

En particulier, pour L un système local à valeurs dans Ab , la proposition 2 implique que (1.1) se récrit sous la forme plus familière

$$(1.2) \qquad E^2_{p,q} = \varinjlim_p^{\mathcal{C}'} (Q \to H_q(f/Q , L \circ i_Q)) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{C},L) .$$

On peut également comparer les groupes d'homotopie de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$:

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ <u>un foncteur. Supposons que, pour tout objet</u> Q <u>de</u> $\mathcal{C}'$, <u>la catégorie</u> f/Q <u>soit contractile. Alors</u> f <u>est une équivalence d'homotopie</u>.

<u>Remarques</u>.- 1) Bien sûr, si l'on prend f préfibrée, on peut supposer que $f^{-1}(Q)$ (plutôt que f/Q) est contractile, en vertu du corollaire 1.

2) Il existe une forme duale du théorème 2 avec f/Q remplacée par Q/f . Il faut alors remplacer l'hypothèse f préfibrée par f précofibrée.

Le théorème 2 est un cas spécial d'un théorème plus général ([16] Théorème B) dont il est facile de donner l'énoncé dans le cas préfibré (resp. précofibré).

THÉORÈME 3.- <u>Soit</u> $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ <u>préfibré</u> (resp. <u>précofibré</u>) <u>et tel que, pour toute flèche</u> $u : P \to Q$, <u>le foncteur changement de base</u> $u^* : f^{-1}(Q) \to f^{-1}(P)$ <u>soit une équivalence d'homotopie. Alors, pour tout objet</u> Q <u>de</u> $\mathcal{C}'$, $B(f^{-1}(Q))$ <u>est homotopiquement équivalent à la fibre homotopique de</u> Bf . <u>En particulier, pour tout objet</u> X <u>de</u> $f^{-1}(Y)$, <u>on a la suite exacte d'homotopie</u>

(1.3) $\pi_{i+1}(\mathcal{C}',Y) \to \pi_i(f^{-1}(Y),X) \to \pi_i(\mathcal{C},X) \to \pi_i(\mathcal{C}',Y) \to \dots$

Le théorème 3 est l'outil principal permettant de construire des suites exactes reliant les foncteurs K_i , mais il apparaîtra assez peu ici. Aussi nous contenterons-nous de donner une

Démonstration du théorème 2 : Celui-ci est une conséquence du théorème de Whitehead ([13] I 4). Par hypothèse, la suite spectrale (1.2) dégénère en l'isomorphisme

$$H_p(\mathcal{C}',L) \simeq H_p(\mathcal{C},f^*L) \quad ,$$

pour tout $p \geq 0$, puisque

(1.4) $$f^*L \approx \varinjlim{}^{f/Q}\ L \circ i_Q \ .$$

(Ceci est précisément la façon habituelle de construire le foncteur $f^* : (\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \to (\mathcal{C}',\mathrm{Ens})$ adjoint à gauche du foncteur $f_* : (\mathcal{C}',\mathrm{Ens}) \to (\mathcal{C},\mathrm{Ens})$ défini par composition avec f .) Par restriction, on obtient à partir de f_* un foncteur

$$\bar{f}_* : (\Pi\mathcal{C}' , \mathrm{Ens}) \to (\Pi\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \ ,$$

dont il suffit de montrer, pour satisfaire aux hypothèses du théorème de Whitehead, qu'il possède un quasi-inverse.

Lemme 3.- Sous les hypothèses du théorème 2, f^* définit par restriction un foncteur $\bar{f}^* : (\Pi\mathcal{C},\mathrm{Ens}) \to (\Pi\mathcal{C}' , \mathrm{Ens})$.

Démonstration : Par définition de f^* , il suffit de montrer que, pour toute flèche $P \to Q$, l'application canonique

$$\varinjlim{}^{f/Q}\ F \circ i_Q \to \varinjlim{}^{f/P}\ F \circ i_P$$

est un isomorphisme. Or, pour tout système local L sur une catégorie $\mathcal{A}$, $\varinjlim{}^{\mathcal{A}}\ L$ ne dépend, à isomorphisme près, que du groupoïde fondamental $\Pi\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$. En effet, pour tout ensemble S (qu'on identifie au foncteur constant de valeur S sur $\mathcal{A}$), on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\varinjlim^{A} L , S) \simeq \mathrm{Hom}_{(A\ ,\ \mathrm{Ens})}(L,S) \simeq \mathrm{Hom}_{(\Pi A\ ,\ \mathrm{Ens})}(L,S) .$$

Ceci achève la démonstration du lemme, puisque $\Pi(f/Q)$ (resp. $\Pi(f/P)$) est le groupoïde trivial.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que les flèches d'adjonction $\bar{f}^*\bar{f}_* \to 1$ et $1 \to \bar{f}_*\bar{f}^*$ sont des isomorphismes.

§ 2. Définition des K_i

Soit M une sous-catégorie pleine additive d'une catégorie abélienne A . On suppose M stable par extension au sens suivant : pour toute suite exacte

(2.1) $\qquad 0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$

dans A avec M' et M'' isomorphes à des objets de M , M est isomorphe à un objet de M . On dira qu'une telle suite dans M est exacte si elle est exacte dans A .

Exemple.- On prend pour M la catégorie P des A-modules projectifs de type fini, pour A la catégorie des A-modules. Une suite (2.1) dans P est exacte si elle est exacte au sens habituel et scindée.

DÉFINITION.- Une flèche $i : M' \to M$ (resp. $j : M \to M''$) est appelée un monomorphisme (resp. un épimorphisme) admissible si elle appartient à une suite exacte (2.1) dans M . On écrira $i : M' \rightarrowtail M$, $j : M \twoheadrightarrow M''$.

On associe à M une nouvelle catégorie QM possédant les mêmes objets que M . Une flèche $u : M \to M'$ dans QM correspond à une classe d'équivalence de diagrammes (j,i) dans M :

(2.2) $\qquad M \overset{j}{\twoheadleftarrow} N \overset{i}{\rightarrowtail} M' ,$

étant entendu que deux tels diagrammes (j,i) et (j',i') sont équivalents s'il existe un diagramme commutatif dans $\mathcal{M}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, equal] & N \arrow[l, two heads, "j"'] \arrow[r, tail, "i"] \arrow[d, "h"] & M' \arrow[d, equal] \\
M & N' \arrow[l, two heads, "j'"'] \arrow[r, tail, "i'"] & M'
\end{tikzcd}$$

avec h une flèche inversible de $\mathcal{M}$.

On peut donner une description plus imagée d'une telle flèche : Posons $M_1 = i(N)$, $M_0 = i(\ker j)$. On a une filtration admissible à trois crans de M' : $0 \subset M_0 \subset M_1 \subset M'$ et il est immédiat que $M \approx M_1/M_0$. Autrement dit, une flèche $u : M \to M'$ dans $Q\mathcal{M}$ correspond à une classe d'identifications de M à un sous-quotient de M' .

On compose les flèches $\alpha : M \to M'$ et $\beta : M' \to M''$ de la manière schématisée par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & M'' \arrow[d] \\
 & M' \arrow[r] \arrow[d] & M'_1 \arrow[d] \\
M \arrow[r] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & M_3 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
 & 0 \arrow[r] & M'_0 \arrow[d] \\
 & & 0
\end{tikzcd}$$

l'identification de M avec le sous-quotient M_3/M_2 de M'' représentant $\beta\alpha$.

<u>Exemple</u>.- Tout $i : M' \rightarrowtail M$ permet de définir une filtration à trois crans (nous dirons plutôt une strate) $0 \subset 0 \subset i(M') \subset M$, c'est-à-dire une flèche $i_1 : M' \to M$ dans $Q\mathcal{M}$. De même, à $j : M \twoheadrightarrow M''$ correspond la strate

$0 \subset i(\ker j) \subset M \subset M$ et donc une flèche $j^!: M'' \to M$ dans QM .

Remarques.- 1) QM ne possède pas d'objet initial ou final. Par exemple, $\mathrm{Hom}_{QM}(0,M)$ s'identifie à l'ensemble des sous-objets admissibles de M .

2) Les identités suivantes sont immédiates :

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} (ii')_! &= i_! i'_! \\ (jj')^! &= j'^! j^! \\ (id_M)_! &= (id_M)^! = id_M . \end{aligned}$$

3) Toute flèche (2.2) u de QM se factorise en $u = i_! j^!$ et cette factorisation caractérise i et j à unique isomorphisme près. De plus, si l'on forme pour un tel u le carré bicartésien

$$(2.4)\qquad \begin{array}{ccc} N & \overset{i}{\rightarrowtail} & M' \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ M & \underset{}{\overset{i'}{\rightarrowtail}} & N' \end{array}$$

on a de même uniquement $u = j'^! i'_!$. Les flèches de type $i_!$, $j^!$, soumises aux relations (2.3) auxquelles on adjoint la relation

$$(2.5)\qquad i_! j^! = j'^! i'_! ,$$

pour tout carré bicartésien (2.4) dont les flèches horizontales (resp. verticales) sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes) admissibles, forment une présentation des flèches de QM .

DÉFINITION.- $\qquad K_i(M) = \pi_{i+1}(QM,0)$.

Cette définition est en partie justifiée par la

PROPOSITION 3.- $\pi_1(QM,0)$ <u>est canoniquement isomorphe au groupe de Grothendieck</u> $K_0 M$ <u>de la catégorie</u> M .

<u>Démonstration</u> : Plutôt que de vérifier que l'application qui, à chaque objet M de M , associe le lacet $\omega_M = (j_M^!)^{-1} i_{M!}$ d'origine 0 (où $i_M : 0 \to M$ et

$j_M : M \to 0$ sont les flèches évidentes de $\mathcal{M}$) induit cet isomorphisme, on va montrer que la catégorie des $K_0\mathcal{M}$-ensembles est équivalente à la catégorie des $\pi_1(Q\mathcal{M},0)$-ensembles ou, ce qui revient au même puisque $Q\mathcal{M}$ est connexe par la remarque 1 ci-dessus, à la catégorie des revêtements de $BQ\mathcal{M}$. Il suffit, par la proposition 1, de montrer que les $K_0\mathcal{M}$ -ensembles correspondent bijectivement aux systèmes locaux sur $Q\mathcal{M}$. On associe au $K_0\mathcal{M}$-ensemble S le foncteur F_S défini par

$$F_S(M) = S \qquad \text{pour tout objet } M \text{ de } Q\mathcal{M}$$

$$F_S(i_!) = id_S \qquad \text{pour tout } i : M' \rightarrowtail M$$

$$F_S(j^!) = [\ker j].S \qquad \text{pour tout } j : M \twoheadrightarrow M''$$

(ici $[N]$ désigne la classe dans $K_0\mathcal{M}$ d'un objet N de $\mathcal{M}$ et l'action de $K_0\mathcal{M}$ sur S est celle donnée par l'hypothèse). Par la remarque 3 ci-dessus, ceci suffit à définir F_S à ceci près qu'il faut encore vérifier les diverses relations telles $F_S(i_!)F_S(i'_!) = F_S(ii'_!)$ découlant des identités (2.3), (2.5) sur les flèches de $Q\mathcal{M}$, ce qu'on laisse comme exercice.

Inversement, on remarque que la catégorie $\mathcal{F}$ des systèmes locaux sur $Q\mathcal{M}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}'$ formée des systèmes locaux qui satisfont aux hypothèses supplémentaires suivantes :

1) $\quad F(M) = F(0) \qquad$ pour tout objet M de $Q\mathcal{M}$

2) $\quad F(id_{M_!}) = id_{F(0)} \qquad$ pour tout $i_M : 0 \to M$ dans $\mathcal{M}$.

A un tel objet F de $\mathcal{F}'$ on associe l'ensemble F(0) sur lequel ob $\mathcal{M}$ agit <u>via</u> l'application φ : ob $\mathcal{M} \to$ Aut F(0) définie par $\varphi(M) = F(j_M^!)$. On vérifie que l'application φ est additive et qu'elle se factorise donc par $K_0\mathcal{M}$, ce qui munit F(0) d'une structure de $K_0\mathcal{M}$-ensemble. Il est facile de voir que les deux constructions qu'on vient de décrire sont inverses, ce qui achève la démonstration.

Comparaison avec les autres définitions des K_i

Rappelons très brièvement la définition des $K_i(A)$ proposée précédemment par Quillen ([14]) : on construit à partir de l'espace classifiant $B_{G\ell(A)}$ du groupe linéaire infini $G\ell(A)$ un nouvel espace $B^+_{G\ell(A)}$ et une application $f : B_{G\ell(A)} \to B^+_{G\ell(A)}$ (unique à homotopie près) telle que $\pi_1(f)$ soit le morphisme d'abélianisation du groupe fondamental $G\ell(A)$ de $B_{G\ell(A)}$ et que f induise un isomorphisme sur l'homologie à coefficients entiers (voir [9] 2.16, 2.17 et [15] Prop. 4, cor. 1 pour diverses constructions de $B^+_{G\ell(A)}$). On définit des groupes (qu'on appellera ici $\bar{K}_i(A)$ pour les distinguer des $K_i(A)$) par $\bar{K}_i(A) = \pi_i(B^+_{G\ell(A)})$ pour $i \geq 1$ et l'on montre ([9] Prop. 2.2) que cette définition coïncide avec celles de $K_1(A)$ due à Bass et de $K_2(A)$ de Milnor.

On se bornera ici à une esquisse de la démonstration que $\bar{K}_i(A) = K_i(A)$ pour tout $i \geq 1$. Ceci résulte immédiatement du

THÉORÈME 4.- Soit $\mathcal{P}$ la catégorie des A-modules de type fini. Alors $\Omega BQ\mathcal{P}$ a même type d'homotopie que $K_o(A) \times B^+_{G\ell(A)}$.

Pour démontrer le théorème 4, on introduit la catégorie $\widetilde{Q\mathcal{P}}$ dont les objets sont les épimorphismes admissibles $u : E \twoheadrightarrow P$ dans $\mathcal{P}$. Une flèche $\varphi : u' \to u$ dans $\widetilde{Q\mathcal{P}}$ correspond à une classe d'équivalence de diagrammes $P' \xleftarrow{u'} E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{u} P$ dans $\mathcal{P}$ avec ker u un sous-module admissible de i(ker u') . Cette condition entraîne que φ induit un diagramme $P' \twoheadleftarrow E'/i^{-1}(\ker u) \rightarrowtail P$ dans $\mathcal{P}$, autrement dit une flèche $\pi(\varphi)$ dans $Q\mathcal{P}$. On a donc un foncteur $\pi : \widetilde{Q\mathcal{P}} \to Q\mathcal{P}$ défini sur les objets par $\pi(E \twoheadrightarrow P) = P$ et sur les flèches comme ci-dessus.

On peut vérifier que $\widetilde{Q\mathcal{P}}$ est contractile. Ceci pourrait donner à penser, compte tenu du théorème 3, que l'espace $\Omega BQ\mathcal{P}$ qu'on cherche à étudier a même type d'homotopie que la catégorie fibre de π au-dessus d'un objet P de $\mathcal{QP}$. Ceci n'est pas le cas, car π ne satisfait pas aux hypothèses du théorème 3, les diverses catégories fibres de π n'étant pas homotopiquement équivalentes. Il est en effet facile de voir que la fibre au-dessus de 0 est le groupoïde $\mathcal{E}$ ayant les mêmes objets que $\mathcal{P}$ et pour flèches les flèches inversibles de $\mathcal{P}$, tandis que la flèche au-dessus de $P \neq 0$ consiste en la catégorie des $E \twoheadrightarrow P$ avec pour flèches les automorphismes de E au-dessus de P . On est donc amené à modifier $\widetilde{\mathcal{QP}}$, par un processus de localisation que nous n'expliciterons pas, en une catégorie $\mathcal{S}^{-1}\widetilde{\mathcal{QP}}$ dont les principales propriétés sont résumées dans la proposition suivante :

PROPOSITION 4.- $\mathcal{S}^{-1}\widetilde{\mathcal{QP}}$ <u>est une catégorie contractile fibrée au-dessus de</u> $\mathcal{QP}$, <u>qui satisfait aux hypothèses du théorème</u> 3. <u>La catégorie fibre au-dessus de tout objet</u> P <u>de</u> $\mathcal{QP}$ <u>est homotopiquement équivalente à</u> $K_o(A) \times B^+_{G\ell(A)}$.

Le théorème 4 est la conséquence immédiate du théorème 3 et de la proposition 4, que nous ne démontrerons pas.

§ 3. L'immeuble associé à un espace vectoriel et le théorème de Solomon-Tits

A un k-espace vectoriel V de dimension n , on associe le complexe simplicial (V) = BJ , où J est l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de V , ordonné par l'inclusion. C'est un espace contractible puisque J possède un objet minimal. Rappelons que (V) possède un p-simplexe pour toute chaîne

(3.1) $\qquad W_o \leq \ldots \leq W_p$

de sous-espaces vectoriels de V . On distinguera les sous-complexes suivant de (V) , en imposant des conditions supplémentaires sur les chaînes (3.1) admises :

1) $\boxed{V}$ $\quad W_o \neq 0 \quad , \quad W_p \neq V$

2) $\overset{\triangle}{\boxed{V}}$ $\quad W_o \neq 0$

3) $\underset{\triangledown}{\boxed{V}}$ $\quad W_p \neq V$

4) $\overset{\triangle}{\underset{\triangledown}{\boxed{V}}}$ $\quad \dim(W_p/W_o) < n$.

On vérifie que, pour $n \geq 2$, $\overset{\triangle}{\boxed{V}}$ (resp. $\underset{\triangledown}{\boxed{V}}$) est homotopiquement équivalent au cône sur $\boxed{V}$ et $\overset{\triangle}{\underset{\triangledown}{\boxed{V}}}$ à la suspension de $\boxed{V}$. On appelle $\boxed{V}$ l'immeuble de Tits associé à l'espace vectoriel V (pour les liens avec la définition habituelle, voir la remarque qui suit la proposition 5).

THÉORÈME 5 ([2]).- <u>Soit</u> V <u>un espace vectoriel de dimension</u> $n \geq 2$. <u>Alors</u> $\boxed{V}$ <u>a le type d'homotopie d'un bouquet de</u> $(n-2)$-<u>sphères</u>.

<u>Démonstration</u> : On raisonne par récurrence sur la dimension n de V . Pour $n = 2$, $\boxed{V}$ est l'espace projectif sur V muni de la topologie discrète, autrement dit, un bouquet de 0-sphères. Supposons le théorème démontré pour les espaces vectoriels de dimension m $(2 \leq m < n)$ et fixons une droite L dans un espace vectoriel V de dimension n . Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des hyperplans H de V complémentaires à L $(V \simeq H \oplus L)$ et Y le sous-complexe plein de $\boxed{V}$ obtenu en omettant les sommets de $\boxed{V}$ qui correspondent à des éléments de $\mathcal{H}$.

<u>Lemme</u> 4.- Y <u>est contractile</u>.

En effet, la projection canonique $q : V \to V/L$ induit une application simpliciale $\bar{q} : Y \to \underset{\triangledown}{\boxed{V/L}}$ de Y sur un espace contractile. Pour démontrer le lemme, il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème 2 s'appliquent à $\mathrm{Simpl}\ \bar{q} : \mathrm{Simpl}\ Y \to \mathrm{Simpl}\ \underset{\triangledown}{\boxed{V/L}}$, ce qui revient à montrer que, pour tout $\bar{\sigma}$ de $\mathrm{Simpl}\ \underset{\triangledown}{\boxed{V/L}}$ correspondant à un p-simplexe $\sigma = \{W_o/L \leq \ldots \leq W_p/L \neq V/L\}$

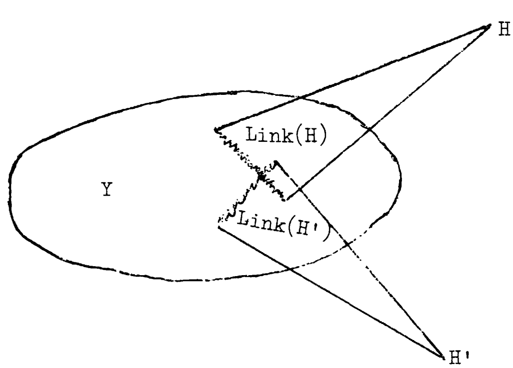
de $\boxed{V/L}$, l'ensemble ordonné Simpl $\bar{q}/\bar{\sigma}$ est contractile. Or Simpl $\bar{q}/\bar{\sigma}$ = Simpl$(q^{-1}(\sigma))$ et $q^{-1}(\sigma)$ est le classifiant de l'ensemble J des sous-espaces propres U de V tels que q(U) soit l'un des sommets W_i/L de σ , ordonnés par inclusion. L'application $f : J \to J$ définie par $f(U) = U \oplus L$ est une rétraction de J sur le sous-ensemble $J' = \{W_o, \ldots, W_p\}$. La relation $U \leq U \oplus L$, pour tout U , montre que J' est même un rétracte par déformation de J . Donc J' , qui possède un élément minimal W_o , est contractile, ce qui entraîne que J l'est aussi.

Revenons-en au théorème : pour $H \in \mathcal{H}$, on caractérise le sous-complexe Link(H) de $\boxed{V}$ de la manière suivante : un simplexe σ de $\boxed{V}$ est un simplexe de Link(H) si et seulement si

1) $H \notin \sigma$,

2) $\sigma \cup H$ est un simplexe de V .

Bien sûr $\mathrm{Link}(H) \subset Y$ et en fait, $\boxed{V}$ est l'union de Y avec les divers cônes C(Link(H)) amalgamés à Y le long de leurs bases :



Ainsi $\boxed{V} \simeq \boxed{V}/Y$ d'après le lemme

$$\simeq \bigvee_{H \in \mathcal{H}} S(\mathrm{Link}(H)) .$$

Or $\mathrm{Link}(H) = \boxed{H}$ est un bouquet de $n-3$ sphères par l'hypothèse de récurrence, ce qui termine la démonstration du théorème 5.

En particulier, les remarques qui précèdent le théorème entraînent que l'on a, sous les mêmes hypothèses :

COROLLAIRE.- Les groupes d'homologie réduite $\tilde{H}_i(\widehat{\boxed{V}}, \mathbf{Z})$ sont nuls pour $i \neq n-1$ et $H_{n-1}(\widehat{\boxed{V}}, \mathbf{Z})$ est libre.

DÉFINITION.- Pour $n \geq 2$, on appelle le groupe $H_{n-1}(\widehat{\boxed{V}}, \mathbf{Z})$, muni de l'action du groupe $GL(V)$ des automorphismes de V induite par l'action naturelle de $GL(V)$ sur $\widehat{\boxed{V}}$, le module de Steinberg de V et on le note $St(V)$. Pour $n = 1$, on pose $St(V) = \mathbf{Z}$ sur lequel $GL(V)$ agit trivialement.

§ 4. Le théorème de finitude ([17])

Remarquons tout d'abord que l'opération somme directe dans $\mathcal{P}$ induit une opération $\oplus : Q\mathcal{P} \times Q\mathcal{P} \to Q\mathcal{P}$ ce qui définit une structure de H-espace sur $BQ\mathcal{P}$. Ceci entraîne que $BQ\mathcal{P}$ est un espace simple et il suffit, pour démontrer le théorème 1, de vérifier que ses groupes d'homologie sont de type fini. Dorénavant, A satisfera aux hypothèses du th. 1. On pose $\mathcal{Q} = Q\mathcal{P}$ et l'on appelle $\mathcal{Q}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}$ dont les objets sont les A-modules de rang $\leq n$. Soit $w : \mathcal{Q}_{n-1} \to \mathcal{Q}_n$ l'inclusion. Il est clair que $\mathcal{Q} = \bigcup_n \mathcal{Q}_n$. La démonstration du théorème 1 repose sur le

THÉORÈME 6.- Pour $n \geq 1$, l'inclusion w induit une suite exacte

$$(4.1) \quad \ldots \to H_i(Q_{n-1}) \to H_i(Q_n) \to \coprod_{\alpha} H_{i-n}(GL(P_\alpha), St(V_\alpha)) \to H_{i-1}(Q_{n-1}) \to \ldots$$

où les P_α parcourent les classes d'isomorphisme de A-modules projectifs de rang n et $V_\alpha = F \otimes_A P_\alpha$.

Le théorème 1 est une conséquence du théorème 6. En effet, ce dernier a le corollaire suivant

COROLLAIRE.- $H_i(Q_{n-1}) \simeq H_i(Q_n) \simeq H_i(Q)$ pour $n > i$.

D'autre part, les classes d'isomorphismes de A-modules projectifs de rang n sont en nombre fini ([4] Chapitre X, théorème 2.4). Le théorème 1 se démontre donc par récurrence sur n (le cas $n = 0$ est immédiat puisque Q_o est la catégorie ponctuelle), en utilisant la suite exacte (4.1) et le corollaire du théorème 6, à partir de la proposition suivante.

PROPOSITION 5.- Les groupes $H_i(GL(P_\alpha), St(V_\alpha))$ sont de type fini pour tout i et tout n .

Démonstration : On écrit P (resp. V) pour P_α (resp. V_α). On se ramène par une suite spectrale de Hochschild-Serre à montrer que les groupes $H_i(\Gamma', St(V))$ sont de type fini, avec Γ' un sous-groupe distingué d'indice fini de $GL(P)$ qui, de plus, est un sous-groupe arithmétique sans torsion du groupe algébrique G' défini de la manière suivante : c'est la composante connexe du noyau de l'application norme $N : G \to G_m$, où G est le groupe algébrique réductif sur $\mathbb{Q}$ dont les points R-rationnels $G(R)$ sont le groupe $GL(V \otimes_{\mathbb{Q}} R)$ des $F \otimes_{\mathbb{Q}} R$ automorphismes de $V \otimes_{\mathbb{Q}} R$, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R . Comme G' est un groupe réductif linéaire connexe sans caractère non-trivial, on est maintenant dans la situation étudiée par A. Borel et J.-P. Serre dans [6]. Le théorème de dualité qui y est démontré identifie les groupes d'homologie $H_*(\Gamma', St(V))$ aux groupes de cohomologie $H^*(\bar{X}/\Gamma')$ d'une variété à coins compacte. Ceci entraîne l'assertion de finitude souhaitée puisque celle-ci est triangulable (voir [20] n° 1.2).

Remarque.- A vrai dire, le module de Steinberg qui intervient dans [6] est défini par $St(V) = H_{\ell-1}(T(\mathcal{P}))$ où ℓ est le rang de G' et $T(\mathcal{P})$ est le complexe simplicial associé de la manière suivante à l'ensemble $\mathcal{P}$ des sous-groupes paraboliques de G' définis sur $\mathbb{Q}$: les faces σ_P et $T(\mathcal{P})$ correspondent bijectivement aux éléments $P \in \mathcal{P}$ et $\sigma_P \subset \sigma_Q$ si et seulement si $Q \supset P$ (voir [21], [23], [7] chapitre IV, § 2, exercice 10). L'application $\theta : \boxed{V} \to T(\mathcal{P})$ qui associe à un p-simplexe $W_o \leq \ldots \leq W_p$ de $\boxed{V}$ son stabilisateur dans $G'(Q)$ permet d'identifier ces deux complexes simpliciaux, ce qui entraîne l'équivalence des deux définitions du module de Steinberg (voir [7] chapitre IV, § 2, exercice 18 a, b, c).

Démonstration du théorème 6

On verra que la suite exacte (4.1) est une forme dégénérée de la suite spectrale (1.2). Celle-ci, pour le foncteur $w : Q_{n-1} \to Q_n$ et le système local constant Z , s'écrit :

$$E^2_{p,q} = \varinjlim_p^{Q_n} (P \to H_q(w/P)) \Rightarrow H_{p+q}(Q_{n-1}) . \tag{4.3}$$

La catégorie w/P des flèches $u : P' \to P$ dans Q_n de source dans Q_{n-1} s'identifie à l'ensemble J des strates admissibles (P_o,P_1) de P avec $rg(P_1/P_o) < n$, ordonné par la relation $(P_o,P_1) \leq (P'_o,P'_1)$ si $P'_o \leq P_o$ et $P_1 \leq P'_1$. Lorsque $rg\ P \leq n-1$, l'élément $(0,P)$ est maximal dans J qui est donc contractible. Dans le cas $rg\ P = n$, l'application $P' \to P' \otimes_A F$ est une bijection ordonnée entre les facteurs directs de P et les sous-espaces vectoriels de V , puisque A est un anneau de Dedekind. Ainsi J s'identifie à l'ensemble $J(V)$ des strates (W_o,W_1) dans V satisfaisant la condition $\dim(W_1/W_o) < n$ ordonné comme J . Pour $n = 1$, $J(V)$ est l'ensemble

$\{(0,0)\ ,\ (V,V)\}$ sans relation d'ordre entre ses deux éléments, autrement dit $BJ(V) = S^{o}$.

<u>Lemme</u> 5.- <u>Pour</u> $n \geq 2$, <u>il existe une équivalence d'homotopie</u> $GL(V)$-<u>équivariante</u> $g : \boxed{V} \to BJ(V)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer que l'application d'ensembles ordonnés $\bar{g} : \mathrm{Simpl}(\boxed{V}) \to J(V)$ qui, à tout p-simplexe $W_o \leq \ldots \leq W_p$ de $\boxed{V}$, associe la strate (W_o, W_p) , satisfait aux hypothèses du théorème 2. Or la fibre géométrique $g/(U_o, U_1)$ est la catégorie dont les objets sont les p-simplexes $W_o \leq \ldots \leq W_p$ avec $U_o \leq W_o$ et $W_p \leq U_p$ (ordonnés par inclusion). Elle est donc équivalente à la catégorie contractile Simpl U_1/U_o

Grâce au lemme 5 et aux remarques qui le précèdent, on connait maintenant l'homologie de W/P , compte tenu du corollaire au théorème 5. En résumé, on a :

$$(4.4) \qquad n = 1 , \qquad H_o(W/P) = \begin{cases} \mathbb{Z} & P = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \mathrm{rg}\, P = 1 \ , \end{cases}$$

$$(4.5) \qquad n \geq 2 , \qquad \begin{aligned} & H_o(W/P) = \mathbb{Z} \\ & H_q(W/P) = 0 \qquad\qquad q \neq 0 \ , \ n-1 \ , \\ & H_{n-1}(W/P) = \begin{cases} 0 & \mathrm{rg}\, P < n \\ St(V) & \mathrm{rg}\, P = n \ . \end{cases} \end{aligned}$$

On se limitera au cas $n \geq 2$; un raisonnement analogue utilisant (4.4) permet de démontrer le théorème pour $n = 1$. Par (4.5), on a $E^2_{p,q} = 0$, $q \neq 0$, $n - 1$ et la suite spectrale (4.3) dégénère en une suite exacte

$$\ldots \to H_p(Q_{n-1}) \to H_p(Q_n) \to E^2_{p,n-1} \to H_{p-1}(Q_{n-1}) \to \ldots .$$

Il nous faut maintenant identifier $E^2_{p,n-1} = \varinjlim{}^{Q_n}_{p} (P \to H_{n-1}(W/P))$ avec le terme correspondant de (4.1). Pour simplifier l'écriture, définissons un foncteur

$L : Q_n \to Ab$ par

$$L(P) = H_{n-1}(W/P) = \begin{cases} 0 & \text{rg } P < n \\ St(V) & \text{rg } P = n\ ,\quad V = P \otimes_A F\ . \end{cases}$$

Soit Q' la sous-catégorie pleine de Q_n dont les objets sont les A-modules de rang strictement égal à n. Par définition, L a un support dans Q' et l'on observe que, pour tout p,

$$\varinjlim_p^{Q_n} L \simeq \varinjlim_p^{Q'} L/Q'\ ,$$

puisque les complexes standard ([8] App. II, prop. 3.3) qui permettent de calculer ces foncteurs dérivés de $\varinjlim$ sont isomorphes. Or, dans Q', il n'y a pas de place pour des sous-quotients propres et Q' est donc équivalente au groupoïde Q'' des modules projectifs de rang n avec leurs isomorphismes pour flèches. Par ([8] II, 6.1.5), Q'' est équivalente au groupoïde $\coprod_\alpha GL(P_\alpha)$ ayant pour objets les P_α de l'énoncé du théorème et pour flèches leurs automorphismes. Ainsi

$$E^2_{p,n-1} \simeq \varinjlim_p^{Q''} L/Q'' \simeq \coprod_\alpha H_p(GL(P_\alpha)\,,\, St(V_\alpha))$$

puisque $L(P_\alpha) = St(V_\alpha)$. Ceci achève la démonstration du théorème 6 et donc du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

Les articles suivis de la mention Seattle ont paru dans Algebraic K-theory (Batelle Institute Conférence 1972), Lecture Notes in Maths, vol. 341, 342, 343, Springer-Verlag.

[1] D. ANDERSON - Relationship among K-theories, Seattle.

[2] D. ANDERSON, M. KAROUBI, J. WAGONER - Relations between higher algebraic K-theories, Seattle.

[3] H. BASS - K-theory and stable algebra, Publ. Math. I.H.E.S., n° 22 (1964), 5-60.

[4] H. BASS - Algebraic K-theory, Benjamin, New York (1968).

[5] A. BOREL - Cohomologie réelle stable des groupes S-arithmétiques classiques, C.R.Acad. Sci. Paris, t. 274 (1972), A 1700-A 1703.

[6] A. BOREL et J.-P. SERRE - Adjonction de coins aux espaces symétriques ; applications à la cohomologie des groupes arithmétiques, C.R.Acad. Sci. Paris, t. 271 (1970), A 1156-A 1158.

[7] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, Chapitres IV, V et VI, Hermann 1968.

[8] P. GABRIEL and M. ZISMAN - Calculus of fractions and homotopy theory, Ergebnisse der Math., New Series, Vol. 35, Springer-Verlag, New York (1967).

[9] S. M. GERSTEN - Higher K-theory of rings, Seattle.

[10] A. GROTHENDIECK - Revêtement étales et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, 1960/61 (SGA 1), Lecture Notes in Maths, vol. 224 (1971), Springer-Verlag.

[11] S. LICHTENBAUM - Values of zeta-functions, étale cohomology and algebraic K-theory, Seattle.

[12] J. MILNOR - Introduction to algebraic K-theory, Annals of Math. Studies 72, Princeton University Press (1971).

[13] D. QUILLEN - Homotopical algebra, Lecture Notes in Maths., vol. 43, Springer-Verlag (1967).

[14] D. QUILLEN - Cohomology of groups, Actes, Congrès Intern. Math. Nice (1970), t. 2, 47-51.

[15] D. QUILLEN - On the group completion of a simplicial monoïd, à paraître.

[16] D. QUILLEN - Higher algebraic K-theory I, Seattle.

[17] D. QUILLEN - Finite generation of the groups K_i of rings of algebraic integers (notes rédigées par H. Bass), Seattle.

[18] J.E. ROOS - Sur les foncteurs dérivés de $\varprojlim$, C.R.Acad. Sci. Paris, t. 252 (1961), A 3702-A 3704.

[19] G. SEGAL - Classifying spaces and spectral sequences, Publ. Math. I.H.E.S., n° 34 (1968).

[20] J.-P. SERRE - Cohomologie des groupes discrets, dans "Prospects in Mathematics", Annals of Math. Studies 70, Princeton University Press, 1970.

[21] L. SOLOMON - The Steinberg character of a finite group with BN-pair, dans Theory of finite groups (Symposium edited by R. Brauer and C.H. Sah), Benjamin, New York, 1969, 213-221.

[22] R. G. SWAN - Algebraic K-theory, Actes, Congrès Intern. Math. Nice, 1970, t. 1, 191-199.

[23] J. TITS - Structures et groupes de Weyl, Sém. Bourbaki, 17e année, 1964/65, exp. n° 288, Addison-Wesley/Benjamin, New York.