BERNARD TEISSIER

Théorèmes de finitude en géométrie analytique

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. nº 451, p. 295-317

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__295_0>

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 451

THÉORÈMES DE FINITUDE EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

[d'après Heisuke HIRONAKA]

par Bernard TEISSIER

Introduction

On trouvera ici un fascicule de résultats sur les sous-ensembles sous-analytiques de H. Hironaka, c'est-à-dire les sous-ensembles d'espaces analytiques réels qui sont localement combinaison booléenne d'images de morphismes analytiques réels propres. On peut résumer les résultats pratiques en disant que les sous-analytiques ont les bonnes propriétés de finitude qui avaient été démontrées pour les semi-analytiques (cf. [12] et 4.2 pour la définition), qui en sont un cas particulier : stratification de Whitney, inégalités de Łojasiewicz... L'avantage des sous-analytiques est que l'image par un morphisme propre d'un sous-analytique est évidemment encore sous-analytique !

Les démonstrations sont longues et sur le point de paraître. On a cherché ici à montrer l'enchaînement de propriétés de finitude qui aboutit au résultat fondamental (théorème 4.6), dont les autres sont des corollaires comparativement faciles, et à expliciter comment un résultat "abstrait" sur les systèmes projectifs d'éclatements locaux (§ 1) permet d'épanouir par éclatement l'image d'un morphisme analytique propre jusqu'à ce qu'elle devienne semi-analytique. La résolution des singularités permet ensuite de se ramener du cas semi-analytique au cas semi-linéaire dans $\mathbf{R}^n$.

Il faut noter aussi que l'étude des sous-analytiques apporte des renseignements sur les systèmes de fonctions analytiques analytiquement indépendantes, comme le montre l'exemple suivant : soient $f_1,\dots,f_k \in \mathbf{R}\{x,y\}$ $(k \geq 3)$ k fonctions analytiques analytiquement indépendantes (telles que $f_i(0) = 0$), i.e. telles que le morphisme $\varphi : \mathbf{R}\{t_1,\dots,t_k\} \to \mathbf{R}\{x,y\}$ défini par $\varphi(t_i) = f_i$ soit injectif. Si les f_i convergent pour $x^2 + y^2 < 2\varepsilon^2$, nous obtenons un morphisme de la sphère S_ε de rayon ε de $R^3(x,y,z)$ dans R^k en composant la projection de S_ε sur $R^2(x,y)$ avec le morphisme $R^2 \to R^k$ donné par les f_i . L'image de ce morphisme dans R^k n'accepte d'être contenue dans aucune hypersurface analytique de R^k au voisinage de l'origine, mais est sous-analytique dans R^k en 0 .

Conventions et notations : $\square$ indique la fin d'une démonstration ou son absence.

Un espace K-analytique ($K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) est un espace annelé en K-algèbres locales, localement isomorphe à un modèle local $(F , \mathcal{O}_n|U/\mathfrak{I} \mid F)$ où F désigne un fermé d'un ouvert U de K^n, défini par $f_1 = \dots = f_k = 0$, où $f_i \in \Gamma(U,\mathcal{O}_n)$, $\mathcal{O}_n$ désignant le faisceau des germes de fonctions analytiques sur K^n , à valeurs (dans K et $\mathfrak{I}$ l'Idéal engendré par les f_i . Un espace analytique réel (resp. complexe) s'écrit $(X , \mathcal{O}_X)$ (resp. $(W , \mathcal{H}_W)$) mais on oubliera bien sûr d'écrire le faisceau structural, sauf nécessité. Nos espaces seront supposés σ-compacts.

Un espace analytique complexe $(W , \mathcal{H}_W)$ donne naissance à un autre espace analytique complexe $^*W$ en considérant $\mathcal{H}_W$ comme faisceau de $\mathbf{C}$-algèbres <u>via</u> la conjugaison complexe $\sigma : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$; on a ainsi un isomorphisme d'espaces annelés en R-algèbres $\rho_W : W \to {}^*W$ qui est l'identité sur les espaces sous-jacents et induit σ sur le faisceau des constantes $\underline{\mathbf{C}}$. Une autoconjugaison de $(W , \mathcal{H}_W)$ est un morphisme d'espaces R-annelés $h : (W , \mathcal{H}_W) \to (W , \mathcal{H}_W)$ tel que :

1) $h^2 = id_W$;

2) $\rho_W \circ h : W \to {}^*W$ soit un isomorphisme d'espaces analytiques complexes.

Une complexification d'un espace analytique réel $(X , \mathcal{O}_X)$ est un espace analytique complexe $(W,\mathcal{H}_W)$ muni d'une autoconjugaison h et d'un isomorphisme de $(X , \mathcal{O}_X)$ sur $(W^h , \mathcal{H}_W^h)$ (espace des invariants de h , partie réelle de W ; $W^h = \{w \in W / h(w) = w\}$, qui est toujours un espace analytique réel). Les complexifications des espaces et morphismes analytiques réels existent et sont essentiellement uniques en germe le long de leur partie réelle.

Nous utiliserons le théorème de finitude fondamental suivant ("Théorème de Cartan"). La réunion d'une famille croissante (ou même filtrante) de sous-modules cohérents d'un module cohérent sur un espace analytique est un module cohérent.

§ 1. La voûte étoilée (voir [5])

1.1 L'idée est d'associer à un espace analytique complexe W un espace annelé en anneaux locaux $p_W : \mathcal{E}_W \to W$, la voûte étoilée de W, qui domine tous les éclatements de W. Le point principal est que p_W est un morphisme propre. Ceci est à rapprocher de la définition par Zariski [14] de la "variété de Riemann" $\mathcal{R}(K/k)$ d'un corps K de fonctions algébriques définies sur un corps k, comme limite projective (topologique) des morphismes birationnels entre variétés algébriques propres sur k ayant K pour corps de fonctions, le point étant ici que $\mathcal{R}(K/k)$ est compacte.

Rappelons d'abord

DÉFINITION.- Un Idéal J d'un espace analytique complexe W (i.e. du faisceau structural $\mathcal{H}_W$ de W) est dit inversible s'il est inversible comme $\mathcal{H}_W$-Module, i.e. localement isomorphe à $\mathcal{H}_W$, ou encore s'il est cohérent et si son germe $J_w \subset \mathcal{H}_{W,w}$ en tout point $w \in W$ est engendré par un seul élément de $\mathcal{H}_{W,w}$, non diviseur de zéro.

DÉFINITION.- Etant donnés un espace analytique complexe W et un Idéal cohérent J de W, un morphisme $\pi : W' \to W$ d'espaces analytiques complexes est appelé éclatement de J (ou du sous-espace analytique fermé de W défini par J, qui est alors appelé centre de l'éclatement) si :

1) l'idéal $J.\mathcal{H}_{W'}$ est inversible ;
2) tout morphisme $h : T \to W$ tel que $J.\mathcal{H}_T$ soit inversible se factorise de façon unique par π.

PROPOSITION.- L'éclatement d'un Idéal cohérent J d'un espace analytique complexe W existe et est unique à isomorphisme unique près.

Ceci résulte du théorème de Cartan, qui entraîne que toute $\mathcal{H}_W$-Algèbre graduée localement de type fini est localement de présentation finie si et seulement si ses composantes homogènes sont des $\mathcal{H}_W$-Modules cohérents.

Ceci entraîne que tout $w \in W$ possède un voisinage ouvert U au-dessus duquel on a une suite exacte

$$0 \to K \to \mathcal{H}_W|U[T_1,\ldots,T_M] \to \bigoplus_{\nu=0}^{\infty} J^{\nu}|U \to 0 ,$$

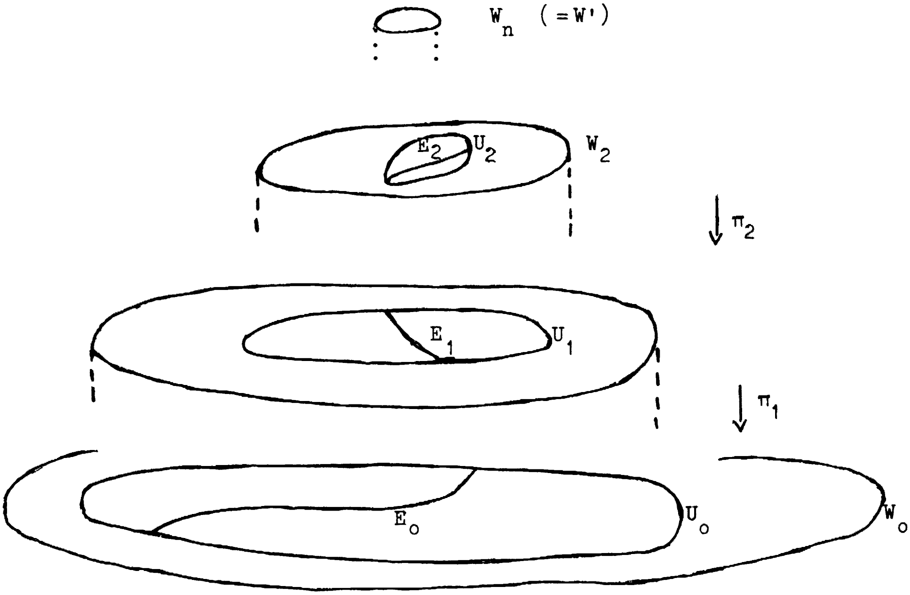
K étant engendré par un nombre fini d'éléments homogènes de $\mathcal{H}_W(U)[T_1,\ldots,T_M]$ définit un sous-espace de $U \times \mathbb{P}^{M-1}$. Ces espaces projectifs au-dessus de W se recollent pour former un W' qui a les propriétés voulues. □

Un éclatement est propre, et si son centre est rare (ou nulle part dense, i.e. le support de J est W) il est surjectif et biméromorphe.

Bien sûr, en géométrie analytique, on doit distinguer soigneusement entre les éclatements globaux, dont le centre est un sous-espace analytique fermé de W, et les éclatements locaux :

DÉFINITION.- Un éclatement local de W est un triplet (U,E,π) où U est un ouvert de W, E un sous-espace analytique fermé de $W|U$, et $\pi : W' \to W$ le composé de l'éclatement de $W|U$ de centre E et de l'inclusion $W|U \hookrightarrow W$ ($W|U$ désigne l'espace analytique obtenu en restreignant à U le faisceau structural de W).

La voûte étoilée $\mathcal{E}_W$ de W se conçoit comme ensemble de systèmes projectifs d'éclatements <u>locaux</u> au-dessus de W. Nous nous intéresserons donc d'abord aux morphismes d'espaces analytiques complexes $\pi : W' \to W$ qui sont composés d'une suite finie d'éclatements locaux. On obtient ainsi une sorte de tour de Babel ([1]):



Soit $\mathcal{E}(W)$ la catégorie dont les objets sont ces $\pi : W' \to W$ composés finis d'éclatements locaux, et dont les morphismes sont les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & W_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

On peut montrer, en utilisant la propriété universelle de l'éclatement, que $\mathrm{Hom}(\pi_1, \pi_2)$ contient au plus un élément, et qu'un tel élément $q : W_1 \to W_2$ est encore composé fini d'éclatements locaux.

DÉFINITION.- Une étoile e de W est une sous-catégorie de $\mathcal{E}(W)$, maximale parmi celles qui satisfont

E1) Pour tous π_1, π_2 dans e, il existe π_3 dans e

$$\begin{tikzcd}
& W_3 \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] \arrow[dd, "\pi_3"] & \\
W_1 \arrow[dr, "\pi_1"'] & & W_2 \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

tel que $\mathrm{Hom}(\pi_3,\pi_i) \neq \emptyset$ $(i = 1, 2)$,

E2) appelant q_1 , q_2 les morphismes correspondants, $q_i(W_3)$ est non vide et relativement compact dans W_i $(i = 1, 2)$.

Nous noterons $\mathcal{E}_W$ l'ensemble des étoiles de W .

Remarque.- L'étude des composés finis d'éclatements locaux est facilitée par le lemme suivant :

Soient $\mathcal{O}$ un anneau local et I un idéal de type fini de $\mathcal{O}$ qui est inversible. Tout système de générateurs $h_1,\ldots,h_k$ de I contient un élément h_i $(1 \leq i \leq k)$ tel que $I = h_i.\mathcal{O}$.

Ceci entraîne que le produit de deux idéaux de type fini est inversible si et seulement si chacun des deux l'est.

LEMME.- Soient $e \in \mathcal{E}_W$ une étoile, et $\pi : W' \to W$, $\pi \in e$. Alors, il existe un unique point $w' \in W'$ tel que, pour tout $\pi_\alpha \in e$ tel que $\mathrm{Hom}(\pi_\alpha, \pi) \neq \emptyset$, disons $\{q_\alpha\} = \mathrm{Hom}(\pi_\alpha, \pi)$, on ait $w' \in \overline{\mathrm{im}.q_\alpha}$ (image de q_α).

Démonstration. D'après la définition d'une étoile, il existe $\pi' : W'' \to W'$ dans $\mathcal{E}(W')$, tel que $\overline{\mathrm{im}.\pi'}$ soit un compact $K \subset W'$.

Les $K \cap \overline{\mathrm{im}.q_\alpha}$ sont des compacts ayant la propriété d'intersection finie non vide, d'après la définition d'une étoile. Leur intersection est donc non vide. Or, si w' est un point de cette intersection, on peut remarquer que, pour tout voisinage ouvert U de w' dans W , $W'|U \hookrightarrow W'$ appartient à e , (par la maximalité de e). On en déduit $\{w'\} = \bigcap \overline{\mathrm{im}.q_\alpha}$. En utilisant encore la définition d'une étoile, on voit que, pour tout α , il existe un β tel que $\overline{\mathrm{im}.q_\beta} \subset \mathrm{im}.q_\alpha$. Donc $\{w'\} = \bigcap \mathrm{im}.q_\alpha$.

COROLLAIRE.- Soit $\pi \in \mathcal{E}(W)$, et notons $\mathcal{E}_\pi$ l'ensemble des étoiles de W qui contiennent π : si $\pi : W' \to W$, nous obtenons une application $p_{W'} : \mathcal{E}_\pi \to W'$ ($p_{W'}(e) = w'$ où w' est le point obtenu au lemme prédédent).

En particulier, prenant $\pi = \mathrm{id}.W$, nous obtenons une application $p_W : \mathcal{E}_W \to W$. Cette application est surjective, puisque, pour tout point $w \in W$, les morphismes $\pi_U : W|U \hookrightarrow W$, U parcourant les voisinages ouverts de w dans W , vérifient les conditions E 1) et E 2) , et donc par Zorn, il existe une étoile e contenant tous les π_U, dont l'image par p_W est nécessairement w .

Nous allons maintenant munir $\mathcal{E}_W$ d'une topologie et d'un faisceau d'anneaux.

LEMME.- Les produits finis existent dans $\mathcal{E}(W)$. C'est-à-dire qu'étant donnés π_1 , π_2 dans $\mathcal{E}(W)$, il existe $\pi_3 \in \mathcal{E}(W)$, noté $\pi_1 \wedge \pi_2$, tel que $\pi' \in \mathcal{E}(W)$ se factorise par π_3 , si et seulement si, il se factorise par π_1 et π_2 . De plus $\mathcal{E}_{\pi_1 \wedge \pi_2} = \mathcal{E}_{\pi_1} \cap \mathcal{E}_{\pi_2}$.

On se ramène par récurrence au cas où π_1 et π_2 sont des éclatements locaux (U_1, E_1, π_1) et (U_2, E_2, π_2) de W et l'on vérifie que l'éclatement local $(U_1 \cap U_2, E_3, \pi_3)$ fait l'affaire, où E_3 est le sous-espace de $U_1 \cap U_2$ défini par le produit des idéaux définissant $E_1 \cap U_1 \cap U_2$ et $E_2 \cap U_1 \cap U_2$. Nous pouvons donc définir une topologie sur $\mathcal{E}_W$ en prenant pour base d'ouverts les $\mathcal{E}_\pi$ $(\pi \in \mathcal{E}(W))$. Puisque pour tout ouvert $U \subset W$, l'injection $W|U \hookrightarrow W$ appartient à $\mathcal{E}(W)$ (éclatement local de centre vide), il est clair que la projection $p_W : \mathcal{E}_W \to W$ est continue (et surjective).

On montre alors

THÉORÈME.- $p_W : \mathcal{E}_W \to W$ est propre.

$\square$

<u>Remarque</u>.- Les faits suivants aident à comprendre la nature de la voûte étoilée.

PROPOSITION 1 - Soit $\pi : W' \to W$; $\pi \in \mathcal{E}(W)$. Il existe une application (continue) unique $j_\pi : \mathcal{E}_{W'} \to \mathcal{E}_W$ telle que pour tout $\pi' \in e' \in \mathcal{E}_{W'}$, $\pi \circ \pi' \in j_\pi(e')$

De plus, j_π induit un homéomorphisme $\mathcal{E}_{W'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\pi$. □

PROPOSITION 2.- Soit $\pi : W' \to W$, $\pi \in \mathcal{E}(W)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) π est propre ;

2) π est obtenu par composition d'une suite finie d'éclatements globaux dont les centres sont tous rares ;

3) $j_\pi : \mathcal{E}_{W'} \to \mathcal{E}_W$ est un homéomorphisme. □

Remarque.- Si W est muni d'une autoconjugaison h , celle-ci se remonte en autoconjugaison $h : \mathcal{E}_W \to \mathcal{E}_W$ Une étoile est alors dite réelle si $h(e) = e$, et si W^R désigne la partie réelle de W , on a un morphisme $p_W^R : \mathcal{E}_W^R \to W^R$, où $\mathcal{E}_W^R$ désigne le fermé des étoiles réelles, qui est encore propre.

Nous allons maintenant munir $\mathcal{E}_W$ d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{V}_W$, comme suit : soit $e \in \mathcal{E}_W$. Si $\pi : W_\pi \to W$ appartient à e , soit $p_\pi(e) \in W_\pi$ l'image de e par $p_\pi : \mathcal{E}_W \to W_\pi$. Les algèbres analytiques $(\mathcal{H}_{W_\pi, p_\pi(e)})_{\pi \in e}$ forment un système inductif, et nous posons :

$$\mathcal{V}_{W,e} = \varinjlim_{\pi \in e} \mathcal{H}_{W_\pi, p_\pi(e)} .$$

Pour tout ouvert $U \subset \mathcal{E}_W$, $\Gamma(U, \mathcal{V}_W)$ est défini comme l'ensemble des éléments $h = (h_e)_{e \in U} \in \prod_{e \in U} \mathcal{V}_{W,e}$ tels que tout $e_o \in U$ possède un voisinage ouvert $\mathcal{E}_{\pi_o} \subset U$ $(\pi_o \in e_o)$ tel qu'il existe $h_o \in \Gamma(W_{\pi_o}, \mathcal{H}_{W_{\pi_o}})$ tel que pour tout $e' \in \mathcal{E}_{\pi_o}$, $h_{e'}$ soit l'image de h_o par le morphisme canonique $\mathcal{H}_{W_{\pi_o}, p_{\pi_o}(e')} \to \mathcal{V}_{W,e'}$.

THÉORÈME.- Si W est réduit, $(\mathcal{E}_W, \mathcal{V}_W)$ est un espace annelé en anneaux de valuation, $\mathcal{V}_W$ est cohérent, et p_W s'étend en un morphisme d'espaces annelés : $(\mathcal{E}_W, \mathcal{V}_W) \to (W, \mathcal{H}_W)$.

"Rappelons" d'abord :

DEFINITION.- Un anneau de valuation est un anneau commutatif unitaire A tel que tout système de générateurs $(h_1,\dots,h_k)$ d'un idéal I <u>de type fini</u> non nul de A contienne un élément h_i $(1 \leq i \leq k)$ tel que h_i soit non diviseur de 0 dans A et que $I = h_i.A$.

(Ceci entraîne que A est intègre, possède un seul idéal maximal.)

Soit maintenant $(h_1,\dots,h_k)$ un système de générateurs d'un idéal I de $\mathcal{V}_{W,e}$. D'après la définition d'une étoile, il existe $\pi \in e$ tel que les h_i soient images de $k_i \in \mathcal{H}_{W_\pi, p_\pi(e)}$. Si l'idéal engendré par les k_i n'est pas inversible, on peut le rendre inversible par un éclatement local $W_{\pi'} \to W_\pi$ tel que le composé $W_{\pi'} \to W$ soit dans e . L'idéal inversible de $\mathcal{H}_{W_{\pi'}, p_{\pi'}(e)}$ obtenu est engendré par l'image d'un des k_i , puisque $\mathcal{H}_{W_{\pi'}, p_{\pi'}(e)}$ est local. □

La cohérence de $\mathcal{V}_W$ se démontre en utilisant le fait que les anneaux locaux sont des anneaux de valuation pour vérifier par récurrence sur k que le noyau d'un morphisme $\mathcal{V}_W^k \to \mathcal{V}_W$ est localement de type fini. □

§ 2. <u>Théorème d'aplatissement local</u> (voir [7], [8])

2.1 Transformé strict d'un morphisme par une suite finie d'éclatements locaux.

Soient $f : Z \to W$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, et (U,E,π) , $\pi : W' \to W$ un éclatement local de W . On en déduit un éclatement local $(f^{-1}(U), f^{-1}(E), \omega)$, $\omega : Z' \to Z$, de Z , et par la propriété universelle de l'éclatement, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "f'"] & Z \arrow[d, "f"] \\ W' \arrow[r, "\pi"] & W \end{tikzcd}$$

f' s'appelle le morphisme transformé strict de f par π .

Remarquons que le morphisme canonique $Z' \to Z_{W'} = Z \times_U W'$ est une immersion fermée ; en fait, c'est un isomorphisme sur le sous-espace de $Z_{W'}$ défini par l'Idéal cohérent (grâce au théorème de Cartan)

$\bigcup_{\nu \geq 0} \underline{\mathrm{Ann}}_{Z_{W'}} (I_1^{\nu} . \mathcal{H}_{Z_{W'}})$, où $\underline{\mathrm{Ann}}$ désigne le faisceau (cohérent) des annihilateurs, et I_1 est l'Idéal inversible de $\mathcal{H}_{W'}$ fourni par π .

Ainsi, pour tout $w \in U$ et tout $w' \in \pi^{-1}(w)$, on a une immersion fermée $f'^{-1}(w') \hookrightarrow f^{-1}(w)$, puisque $f^{-1}(w)$ est aussi la fibre de $Z_{W'} \to W'$ au-dessus de w' . De plus, si f est plat, $Z' \cong Z \times_U W'$ et f' est la seconde projection.

On définit par récurrence le transformé strict de f par un π composé fini d'éclatements locaux.

THÉORÈME PLATIFIANT LOCAL.- Soient $f : Z \to W$ un morphisme d'espaces analytiques complexes, où W est réduit, $w \in W$ et L un compact de $f^{-1}(w)$. Il existe des suites finies d'éclatements locaux $(S_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq a}$ au-dessus de W , en nombre fini, ayant les propriétés suivantes :

1) Pour chaque α , les centres des éclatements locaux composant S_α sont tous nulle part denses dans leur espace ambiant.

2) Désignons par $\pi_\alpha : W_\alpha \to W$ le morphisme composé de la suite d'éclatements locaux S_α ; on peut associer à chaque α un compact $K_\alpha \subset W_\alpha$ de telle façon que $\bigcup_{\alpha=1}^{a} \pi_\alpha(K_\alpha)$ soit un voisinage de w dans W .

3) Pour chaque α , le morphisme f_α transformé strict de f par π_α

$$\begin{tikzcd} Z_\alpha \arrow[r, "\omega_\alpha"] \arrow[d, "f_\alpha"] & Z \arrow[d, "f"] \\ W_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & W \end{tikzcd}$$

est plat en tout point de $\omega_\alpha^{-1}(L)$.

4) De plus, si f est donné comme complexifié d'un morphisme analytique réel $f^R : Z^R \to W^R$, tel que $L \subset Z^R$, on peut choisir les π_α comme complexifiés de $\pi_\alpha^R : W_\alpha^R \to W^R$, et donc aussi les f_α comme complexifiés de $f_\alpha^R : Z_\alpha^R \to W_\alpha^R$, qui sont plats en tout point de $(\omega_\alpha^R)^{-1}(L)$.

La démonstration utilise :

PROPOSITION 1.- Soient $f : Z \to W$ un morphisme analytique complexe, $w \in W$ et L un compact de $f^{-1}(w)$. Il existe un germe de sous-espace analytique $(\mathbb{P}_{f,L}, w) \subset (W,w)$ possédant la propriété suivante :

Pour tout morphisme $h : W' \to W$ et tout point $w' \in h^{-1}(w)$, si nous considérons le changement de base par h

$$\begin{array}{ccc} Z_{W'} & \longrightarrow & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \xrightarrow{h} & W \end{array}$$

f' est plat en tout point de $w' \times L$, si et seulement si, le germe (h,w') se factorise par l'inclusion $(\mathbb{P}_{f,L}, w) \subset (W,w)$. De plus, si f est complexifié de $f^R : Z^R \to W^R$, avec $L \subset X^R$, $(\mathbb{P}_{f,L}, w)$ est complexifié d'un sous-germe de (W^R, w) .

PROPOSITION 2.- Reprenons la situation de la proposition 1, et soit $U \subset W$ un voisinage ouvert de w dans W dans lequel $(\mathbb{P}_{f,L}, w)$ est représenté par un sous-espace analytique fermé $\mathbb{P}_{f,L} \subset W|U$. Considérons le transformé strict de f par l'éclatement local $(U, \mathbb{P}_{f,L}, \pi)$ correspondant :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\omega} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W' & \xrightarrow{\pi} & W . \end{array}$$

Pour tout point $w' \in \pi^{-1}(w)$, il existe au moins un point $x \in L$ tel que l'inclusion de germes $(f'^{-1}(w'), x') \subset (f^{-1}(w), x)$, où $x' = x \times w'$, soit <u>stricte</u>.

On démontre les propositions 1 et 2 ([7], [8]) en utilisant le fait que tout point $x \in f^{-1}(w)$ possède un voisinage ouvert V tel que $f|V$ soit représentable comme composé d'une immersion $V \subset W \times \mathbf{C}^N$, et de la première projection $W \times \mathbf{C}^N \to W$, et en mettant sous une forme appropriée à l'étude de la platitude les équations définissant, localement en x, V dans $W \times \mathbf{C}^N$. $\square$

Pour achever la démonstration du théorème, on utilise la propreté de $p_W : \mathcal{E}_W \to W$ comme suit : à chaque étoile $e \in p_W^{-1}(w)$, on associe une suite infinie d'éclatements locaux $S(e) = \{(U_i, E_i, \pi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ où $\pi_i : W_{i+1} \to W_i$, satisfaisant les conditions suivantes :

1) $W_o = W$ et le morphisme composé $W_i \to W$ appartient à e pour tout $i \in \mathbb{N}$.

2) Soit $f_i : Z_i \to W_i$ le transformé strict de f par $\{(U_k, E_k, \pi_k)\}_{0 \leq k < i}$

$$\begin{array}{ccccc}
Z_{i+1} & \xrightarrow{\omega_i} & Z_i & \xrightarrow{\omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-1}} & Z \\
\downarrow{\scriptstyle f_{i+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
W_{i+1} & \xrightarrow{\pi_i} & W_i & \xrightarrow{\pi_1 \circ \dots \circ \pi_{i-1}} & W
\end{array}$$

d'après la condition 1, $e \in \mathcal{E}_{W_i}$ et l'on a donc un point $w_i = p_{W_i}(e) \in W_i$, dont l'image dans W est w.

Soit d'autre part $L_i = (\omega_1 \circ \dots \circ \omega_{i-1})^{-1}(L)$; L_i est un compact de $f_i^{-1}(w_i)$, éventuellement vide. On impose :

α) $(\mathbb{P}_{f_i, L_i}, w_i)$ est représenté par un sous-espace analytique fermé $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{f_i, L_i} \subset W_i|U_i$. (Si $L_i = \emptyset$, on peut prendre n'importe quel voisinage ouvert U_i de w_i dans W_i, et $\mathbb{P}_i = W_i|U_i$.)

β) $E_i = \mathbb{P}_i \cap W_i^*$ où W_i^* est le plus petit sous-espace analytique fermé de $W_i|U_i$ tel que $W_i^* - \mathbb{P}_i = W_i|U_i - \mathbb{P}_i$. (Ceci entraîne que E_i est nulle part dense dans W_i. En particulier $L_i = \emptyset \Rightarrow E_i = \emptyset$ et $\pi_i = \mathrm{id}(W|U_i)$.)

[On utilise ici le fait que W (et donc W_i) est réduit.]

On peut montrer que ces conditions déterminent uniquement $S(e)$, au choix des ouverts U_i près.

Il résulte alors de la proposition 2 qu'une telle suite $S(e)$ stationne à un rang fini, i.e. il existe $i_o \in \mathbb{N}$ tel que f_{i_o} soit plat en tout point de L_{i_o} , et donc $E_i = \emptyset$ et $\pi_i = id(W_i|U_i)$ pour tout $i \geq i_o$. En effet, sinon on aurait une suite décroissante infinie de sous-espaces analytiques fermés de $f^{-1}(w)$, chaque inclusion étant stricte en au moins un point de L , ce qui est impossible d'après le théorème de Cartan.

On obtient ainsi, pour chaque étoile $e \in p_W^{-1}(w)$, un morphisme $\pi_e : W_e \to W$ appartenant à e , et un point w_e $(= p_{W_e}(e)) \in W_e$ tel que le transformé strict f_e de f par π_e

$$\begin{array}{ccc} Z_e & \xrightarrow{\omega_e} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle f_e} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W_e & \xrightarrow{\pi_e} & W \end{array}$$

soit plat en tout point de $f_e^{-1}(w_e) \cap \omega_e^{-1}(L)$. Ce dernier étant compact, l'ouverture de la platitude nous en donne un voisinage ouvert N_e dans Z_e tel que f_e soit plat en tout point de N_e .

D'autre part, f_e induit un morphisme propre $\omega_e^{-1}(L) \to W_e$, et nous pouvons donc choisir un voisinage ouvert V_e de w_e dans W_e tel que $f_e^{-1}(V_e) \cap \omega_e^{-1}(L) \subset N_e$. Si nous nous souvenons que $p_{W_e} : \mathcal{E}_{W_e} \to W_e$ et que $\mathcal{E}_{W_e}$ s'identifie à un ouvert de $\mathcal{E}_W$, nous voyons que $p_{W_e}^{-1}(V_e)$ est un voisinage ouvert de e dans $\mathcal{E}_W$ et que $p_W^{-1}(w) \subset \bigcup_e p_{W_e}^{-1}(V_e)$, e parcourant $p_W^{-1}(w)$.

Grâce à la propreté de p_W , on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini, i.e. il existe un nombre fini d'étoiles e_α $(1 \leq \alpha \leq a)$ tel que $p_W^{-1}(w) \subset \bigcup_{\alpha=1}^{a} p_{W_{e_\alpha}}^{-1}(V_{e_\alpha})$ et on peut trouver un voisinage ouvert U de w dans W tel que $p_W^{-1}(U) \subset \bigcup_{\alpha=1}^{a} p_{W_{e_\alpha}}^{-1}(V_{e_\alpha})$. Posant $W_\alpha = W_{e_\alpha}|V_{e_\alpha}$, on voit que la famille des morphismes induits $W_\alpha \xrightarrow{\pi_\alpha} W$ a les propriétés du théorème.

Si $f : Z \to W$ est complexifié d'un morphisme analytique réel propre, on peut choisir $S(e)$ (c'est-à-dire les ouverts U_i) de façon que tous les morphismes intervenant soient des complexifiés de morphismes analytiques réels, grâce à la dernière assertion de la proposition 1.

Remarque.- On doit également à Hironaka un théorème d'aplatissement propre, analogue en géométrie analytique d'un théorème de Raynaud [13].

THÉORÈME.- Soient $f : Z \to W$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, où Y est réduit, et $\mathfrak{F}$ un faisceau cohérent sur Z ; il existe une suite localement finie d'éclatements à centres nulle part denses telle que le morphisme composé $\pi : W' \to W$ possède la propriété suivante

$$\begin{array}{ccc} Z \times_W W' & \xrightarrow{\omega} & Z \\ \downarrow f' & \square & \downarrow f \\ W' & \xrightarrow{\pi} & W \end{array}$$

$\omega^*\mathfrak{F}$ réduit modulo sa f'-torsion devient f'-plat. (Voir [4].)

§ 3. Résolution des singularités des espaces analytiques réels

3.1 PROPOSITION.- Soit X un espace analytique réel. Il existe une suite de sous-espaces analytiques fermés $\{X^{(i)}\}_{0 \leq i < \infty}$ de X telle que

1) $|X^0| = |X|$ et $|X^{(i)}| \supset |X^{(i+1)}|$ pour tout $i \geq 0$.

2) Tout point de X possède un voisinage ouvert ne rencontrant qu'un nombre fini des $|X^{(i)}|$.

3) $X^{(i)} - X^{(i+1)}$ est lisse.

La démonstration se fait en complexifiant X , en regardant la filtration du complexifié $\widetilde{X}$ par $\operatorname{sing} \widetilde{X}$, $\operatorname{sing}(\operatorname{sing} \widetilde{X})$ ... et en l'induisant sur X . □

3.2 THÉORÈME (Désingularisation I).- Soit X un espace analytique réel. Tout $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme

$\pi : X' \to X|U$ propre, surjectif et relativement algébrique (i.e. tel qu'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circ"] & U \times \mathbf{R}^N \arrow[dl, "p_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

où j est une immersion fermée dont l'image est définie par un idéal engendré par un nombre fini de polynômes en les coordonnées de $\mathbf{R}^N$, à coefficients analytiques sur U) et où X' est <u>lisse</u>.

De plus, étant donnée une filtration $(X^{(i)})$ de X comme en 3.1, on peut choisir π de telle façon que X' soit réunion disjointe d'espaces analytiques réels $X'^{(i)}$ ouverts et fermés dans X', et que π induise $\pi^{(i)} : X'^{(i)} \to X^{(i)}$ tel que :

1) $(\pi^{(i)})^{-1}(\text{sing } X^{(i)})$ nulle part dense dans $X'^{(i)}$;

2) $\pi^{(i)}$ induit un isomorphisme :

$$X'^{(i)} - (\pi^{(i)})^{-1}(\text{sing } (X^{(i)}) \to X^{(i)}|U - \text{sing } X^{(i)} .$$

2 π n'induit pas en général une immersion ouverte sur le complémentaire d'un fermé rare de X' . □

3.3 THÉORÈME (Désingularisation II). Soient X un espace analytique réel, lisse, et J un Idéal cohérent de $\mathcal{O}_X$. Tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme d'espaces analytiques réels $\pi : X' \to X|U$ où :

1) π est propre, surjectif et relativement algébrique.

2) X' est lisse.

3) Si Y est le sous-espace analytique défini par J , $X' - \pi^{-1}(Y)$ est dense dans X' et π induit un isomorphisme $X' - \pi^{-1}(Y) \to X|U - Y$.

4) L'idéal $J.\mathcal{O}_{X'}$ définit un diviseur à croisements normaux de X' , i.e. pour tout $x' \in X'$, il existe un système de coordonnées locales $x_1,\dots,x_N$ de X' centré en x' tel que $J.\mathcal{O}_{X',x'}$ soit engendré par

$x_1^{a_1} \dots x_N^{a_N}$ $(a_i \in \mathbb{N})$.

Ces trois résultats sont des applications du théorème de Cartan et de [2] (voir surtout chap. I, p. 158 sq.).

§ 4. Sous-ensembles sous-analytiques (voir [6], [7])

4.1 DÉFINITION.- Soient X un ensemble et $\Delta \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X , tel que $\emptyset \in \Delta$. On appelle saturation élémentaire de Δ , et l'on note $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des parties de X de la forme

$$\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_{ij} - B_{ij})$$

où I et J sont des ensembles d'indices finis non vides et A_{ij} , $B_{ij} \in \Delta$ pour tous $i \in I$, $j \in J$.

$\tilde{\Delta}$ est le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{P}(X)$ contenant Δ et stable par réunion, intersection et différence de deux de ses éléments.

4.2 DÉFINITION.- Soit X un espace analytique réel. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit semi-analytique en $x_0 \in X$ s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que $A \cap U$ appartienne à la saturation élémentaire de $\Delta_+(U)$, ensemble des sous-ensembles de U de la forme $\{x \in U / f(x) > 0\}$ où $f \in \mathcal{O}(U)$ i.e. est une fonction analytique réelle sur $X|U$. On dit que A est semi-analytique dans X s'il l'est en tout $x_0 \in X$.

Remarque.- Si l'on remplace > 0 par ≥ 0 , on ne change pas la saturation élémentaire.

4.3 DÉFINITION.- Soit X un espace analytique réel. Un sous-ensemble A de X est dit sous-analytique en $x_0 \in X$ s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans X tel que $A \cap U$ appartienne à la saturation élémentaire de $\Gamma(U)$, ensemble des sous-ensembles de U de la forme $g(Y)$, où $g : Y \to X|U$ est un morphisme analytique réel propre.

4.4 Montrons que tout semi-analytique est sous-analytique. Il suffit de montrer que, pour tout ouvert U de X , tout sous-ensemble de la forme

$A = \{x \in X / f(x) \geq 0\}$ est dans $\Gamma(U)$ si $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Or, A est l'image de la restriction de la projection $U \times R \to U$ au sous-ensemble analytique de $U \times R$ défini par $f(x) - t^2 = 0$.

4.5 La classe des sous-ensembles sous-analytiques est donc la plus petite classe de sous-ensembles d'espaces analytiques réels contenant la classe des sous-ensembles semi-analytiques et stable par opérations booléennes et morphismes propres.

Le théorème principal de la théorie est :

4.6 THÉORÈME (de rectilinéarisation).- Soient X un espace analytique réel, A un sous-ensemble sous-analytique de X et K un compact de X . Il existe des morphismes d'espaces analytiques réels, $\{\pi_\alpha : V_\alpha \to X\}_{1 \leq \alpha \leq a}$, en nombre fini, tels que :

1) $V_\alpha \cong R^{n_\alpha}$ $(1 \leq \alpha \leq a)$;

2) on peut associer à chaque α un compact $K_\alpha \subset V_\alpha$ de telle façon que $\bigcup_{\alpha=1}^{a} \pi_\alpha(K_\alpha)$ soit un voisinage de K dans X ;

3) pour chaque α , $\pi_\alpha^{-1}(A)$ est une réunion finie de quadrants dans R^{n_α} , (un quadrant est un sous-ensemble $Q \subset R^n$ tel qu'il existe un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sur R^n et une partition $\{1, \ldots, n\} = I^+ \cup I^o \cup I^-$ tels que $Q = \{x \in R^n / x_i > 0$, $x_i = 0$, ou $x_i < 0$ selon que $i \in I^+$, $i \in I^o$, $i \in I^-\}$).

4) Si X est lisse, on peut choisir π_α comme composé d'éclatements de X , à centres rares En particulier π_α induit une immersion ouverte sur un ouvert dense de V_α . (Voir Désingularisation I.)

L'idée de la démonstration est que si l'on parvient à démontrer un théorème analogue où " $\pi_\alpha^{-1}(A)$ réunion de quadrants" est remplacé par " $\pi_\alpha^{-1}(A)$ semi-analytique" on a gagné, en appliquant le théorème de résolution II au produit de toutes les fonctions analytiques qui interviennent dans la définition locale d'un semi-analytique. C'est pour se ramener à cela que l'on utilise le théorème platifiant local du § 2. Tout d'abord, le problème est local, et il suffit de regarder l'image d'un morphisme propre $f : Y \to X$. Par le théorème de résolution I, on peut supposer Y lisse et même réunion de sphères, en recouvrant un espace lisse par des boules puis en revêtant les boules par des sphères et en faisant la somme disjointe de toutes ces sphères. On peut aussi supposer que X est lisse, par résolution de la base, changement de base et résolution de la source. (C'est ici que l'on perd le 4)). Finalement, on étudie $f : Y \to X$, où Y est une réunion de sphères, X est lisse, et l'image réciproque de tout compact de X ne rencontre qu'un nombre fini de sphères. Ensuite, en étudiant le rang de l'application tangente df , on s'aperçoit que l'on peut se ramener au cas où, pour tout point $x \in f(Y)$, il existe une composante connexe Y_α de Y telle que $f|Y_\alpha : Y_\alpha \to Y$ soit fini, et que $x \in f(Y_\alpha)$ (le tout au-dessus d'un voisinage ouvert de x dans X). Arrivé là, on montre :

LEMME.- Dans la situation $f : Y \to X$ à laquelle nous venons de nous ramener, si E est un sous-espace analytique de X tel que f induise un morphisme $f^{-1}(E) \to E$ plat, il existe un sous-espace analytique ouvert et fermé Y_E de $f^{-1}(E)$ tel que f induise un morphisme fini (i.e. propre et à fibres finies) [1] $Y_E \to E$ tel que $f(Y_E) = f(Y) \cap E$.

Maintenant, l'idée est de complexifier le morphisme f et d'appliquer le théorème d'aplatissement du § 2. C'est parce que le complexifié d'un morphisme propre ne l'est pas en général que l'on a besoin d'un énoncé non-propre. [En fait, il semble bien raisonnable que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre dont le complexifié est encore propre, l'image $f(X)$ est semi-analytique dans Y , au moins si X et Y sont non singuliers, l'idée étant que la différence entre $f(X)$ et la partie réelle de l'image du complexifié de f se trouve dans le discriminant, que l'on peut rendre celui-ci à croisements normaux par éclatements et raisonner par récurrence sur la dimension (les éclatements ont la propriété voulue grâce à un théorème de Tarski-Seidenberg-Łojasiewicz, voir plus bas)] Quoi qu'il en soit, après avoir complexifié f , on applique le lemme précédent aux centres d'éclatement qui interviennent dans le théorème platifiant, au-dessus desquels on est plat par définition, d'une part, et aux morphismes transformés stricts, qui deviennent plats par le théorème, d'autre part. On est ainsi ramené à démontrer que l'image d'un morphisme analytique réel fini et plat est semi-analytique. Ou bien, on utilise le théorème de

[1] Un espace analytique réel est dit fini si l'ensemble sous-jacent est un nombre fini de points et si les anneaux locaux sont artiniens.

Tarski-Seidenberg-Łojasiewicz [12] selon lequel l'image d'un morphisme relativement algébrique [i.e. tel que l'on ait, localement sur X , un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr] & X \times \mathbb{R}^N \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

où $j(Y)$ est défini par des égalités et inégalités de fonctions polynômes en les variables de $\mathbb{R}^N$, ce qui est le cas pour un morphisme fini !] est semi-analytique, ou bien comme, puisque f est plat, son complexifié est encore à fibres finies et plat, on cherche à montrer directement que l'image d'un morphisme propre dont le complexifié est à fibres finies et plat est semi-analytique. □

Ce théorème simplifie considérablement l'étude des sous-ensembles sous-analytiques, et permet de démontrer les résultats du

4.7 Fascicule de résultats sur les sous-analytiques (dans X , espace analytique réel)

4.7.1 PROPOSITION 1.- Si $A \subset X$ est sous-analytique, il existe un morphisme analytique réel propre $f : Y \to X$ tel que $\operatorname{im} f = \bar{A}$.

En particulier, l'intérieur et l'adhérence d'un sous-analytique sont sous-analytiques. □

4.7.2 PROPOSITION 2.- Si $A \subset X$ est sous-analytique, tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert qui ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de A . De plus, chaque composante connexe de A est sous-analytique. □

4.7.3 PROPOSITION 3.- Si $A \subset X$ est sous-analytique, tout point $x \in \bar{A}$ possède un voisinage ouvert U dans X tel que, pour tout $y \in U \cap A$, il existe un morphisme analytique réel $\varphi :]-1,1[\to X|U$ tel que $\varphi(0) = x$ et $y \in \operatorname{im} \varphi \subset A \cap U$. □

4.7.4 THÉORÈME.- Si $A \subset X$ est sous-analytique, il existe une partition localement finie $A = \cup A_\alpha$ telle que chaque A_α soit un sous-espace analytique réel lisse et connexe de X , sous-analytique dans X , et que $A_\alpha \cap \overline{A_\beta} \neq \emptyset \Rightarrow A_\alpha \subset \overline{A_\beta}$ et (A_α, A_β) satisfait les conditions a) et b) de Whitney en tout point de A_α . □

4.7.5 (Inégalité de Łojasiewicz, obtenue comme corollaire du théorème de résolution II).

Soient f analytique sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$, $Z(f)$ l'ensemble de ses zéros. Pour toute fonction g, C^∞ dans U, qui s'annule sur $Z(f)$, et pour tout compact K de U, il existe un entier $N = N(g,K)$ et une constante $C \in \mathbf{R}_+$ tels que

$$|g(x)|^N \leq C.|f(x)| \qquad \forall\, x \in K\ . \ \square$$

4.7.6 (Une autre inégalité de Łojasiewicz, même méthode).

Dans la situation précédente, pour tout compact K de U, nous pouvons trouver N et C tels que

$$C|f(x)| \geq (\text{distance }(x,Z(f)))^N \qquad \forall\, x \in K\ . \ \square$$

4.7.7 (La plus difficile inégalité de Łojasiewicz, généralisée aux sous-analytiques).

Soient A et B deux sous-ensembles sous-analytiques de $\mathbf{R}^n$ tels que $A \cap B \neq \emptyset$. Pour tout compact K de $\mathbf{R}^n$, il existe $N \in \mathbf{N}$ et $C \in \mathbf{R}_+$ tels que

$$C(\text{dist}(x,A) + \text{dist}(x,B)) \geq (\text{dist}(x,A \cap B))^N \quad \forall\, x \in K\ . \ \square$$

4.7.8 (Conditions de Whitney strictes).

Soient M_1, M_2 deux sous-espaces analytiques réels lisses connexes localement fermés dans $\mathbf{R}^n$, tels que $\overline{M_1} \supset M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, et que (M_1,M_2) satisfasse les conditions a) et b) de Whitney en tout point de M_2.

Etant donnés $(x,y) \in M_1 \times M_2$, si nous identifions $\mathbf{R}^n$ à son espace tangent en x, nous pouvons parler de l'angle de la droite $\overline{xy}$ joignant x et y dans $\mathbf{R}^n$ avec l'espace tangent T_x à M_1 en x. Notons $\theta(T_x, \overline{xy})$ cet angle. On définit la fonction de Whitney $W(x,y) = \sin \theta(T_x, \overline{xy})$ sur $M_1 \times M_2$. On peut formuler les conditions a) et b) de Whitney en disant que W s'étend en une fonction continue sur $(M_1 \cup M_2) \times M_2$ <u>qui s'annule</u> sur la diagonale de $M_2 \times M_2$. Le résultat est que, si M_1 et M_2 sont sous-analytiques, pour tout compact K de M_2, on peut trouver $N \in \mathbf{N}$ et $C \in \mathbf{R}_+$ tels que $W(x,y)^N \leq C\ \text{dist}(x,y)$.

Les démonstrations des inégalités .7 et .8 utilisent .6 et l'on démontre les choses en mettant sous forme de quadrants tout ce que l'on peut. $\square$

§ 5. Courts commentaires sur la voûte étoilée (voir [2], [9], [10])

Il s'agit de préciser le rapport entre la voûte étoilée et la "variété de Riemann" de Zariski d'une variété algébrique propre sur $\mathbf{C}$. Il y a deux passages : local/global et analytique/algébrique.

Tout d'abord, regardons l'espace annelé en anneaux locaux $(\Gamma_W , \mathcal{B}_W)$ limite projective des éclatements globaux de W .

C'est un espace annelé propre au-dessus de W : $(\Gamma_W , \mathcal{B}_W) \xrightarrow{e_W} (W, \mathcal{H}_W)$.

Nous obtenons un morphisme canonique $(\mathcal{E}_W , \mathcal{V}_W) \xrightarrow{j_W} (\Gamma_W , \mathcal{B}_W)$ d'espaces annelés au-dessus de W en associant à chaque étoile $e \in \mathcal{E}_W$ le système projectif des $\pi \in e$ qui sont propres (voir § 2, proposition 2), j_W est clairement continu et surjectif (parce qu'un point de Γ_W détermine un système projectif de points dont on peut trouver des voisinages satisfaisant les axiomes des étoiles, donc contenus dans une étoile, par Zorn). Mais, on peut montrer que, si $\dim W > 2$, j_W n'est jamais un isomorphisme. Hironaka le fait en montrant que le morphisme induit $\mathrm{Pic}\, \Gamma_W \to \mathrm{Pic}\, \mathcal{E}_W$ n'est pas surjectif. (En fait, les anneaux locaux de Γ_W ne sont pas de valuation.)

Comparons maintenant $(\Gamma_W , \mathcal{B}_W)$ et la surface de Riemann $\mathcal{R}(W)$ dans le cas où W est une variété algébrique compacte. Grâce au lemme de Chow, les éclatements de sous-variétés algébriques sont cofinaux parmi les morphismes propres et biméromorphes dont $\mathcal{R}(W)$ est la limite projective.

Par GAGA, $(\Gamma_W , \mathcal{B}_W)$ apparaît comme la limite projective des éclatements de sous-variétés algébriques munis de leur structure complexe : $(\Gamma_W , \mathcal{B}_W)$ est une "analytifiée" de la variété de Riemann.

Pour terminer, voici un exemple d'un autre type de théorème de finitude que la voûte étoilée devrait permettre d'aborder. (Voir [9])

Soit $w \in W$ un point d'un espace analytique complexe. La fonction de Samuel de W en w définie par $H_w(\nu) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}_{W,w}/\mathfrak{m}^{\nu+1}$ où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{H}_{W,w}$, est un invariant intéressant. Rappelons qu'un éclatement $\pi : W' \to W$ est permis en $w \in W$ si c'est

l'éclatement d'un Idéal J tel que le sous-espace défini par J soit lisse en w et que $\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} J^{\nu}/J^{\nu+1}$ soit plat sur $\mathcal{H}_W/J$ en w . On peut montrer (cf. [3]) que si π est permis, pour tout $w' \in \pi^{-1}(w)$,
$H_{w'}(\nu) \leq H_w(\nu) \quad \forall \ \nu \in \mathbb{N}$, et de plus, si l'on prend un système projectif de points dans une suite d'éclatements locaux permis $w_0 \leftarrow w_1 \leftarrow \dots w_i \leftarrow \dots$ la fonction de Samuel H_{w_i} se stabilise à un cran fini.

Le problème est : montrer que, étant donné $w \in W$, tous les points se projetant sur w , dans tous les composés possibles d'éclatements locaux permis, ne fournissent qu'un nombre fini de fonctions de Samuel distinctes.

Note ajoutée en janvier 1975 : Après l'exposé, V.I. Arnol'd m'a fait informer de l'existence des travaux suivants sur les images des ensembles semi-analytiques relativement compacts :

[a] A.M. GABRIELOV - Sur les projections d'ensembles analytiques, Funktional Analiz, iego prilojenc, 2:4 (1968), 18-30.

[b] A.M. GABRIELOV - Sur les applications des ensembles analytiques, Thèse, Université de Moscou, 1973.

Les résultats de [a] permettent de prouver dans l'esprit des démonstrations de Łojasiewicz [12] les résultats de 4.7. Le fait que les objets étudiés en [a] engendrent tous les sous-analytiques résulte du théorème 4.6. Par ailleurs, Hironaka vient de prouver le théorème de triangulation des sous-analytiques :

[c] H. HIRONAKA - Triangulation of algebraic sets, Proceedings A.M.S. Inst. Alg. Geom. Arcata (1974), à paraître.

Enfin, je signale :

[d] H. HARDT - Stratification of real analyting mappings and images, preprint, School of Math. Univ. of Minnesota (1974 ?).

[e] H. HARDT - Slicing and intersection theory for chains associated with real analytic varieties, Acta Math., 129 (1972), 57-136.

[f] J. POLY - Chaînes sous-analytiques, Thèse, Univ. de Poitiers, 1974

BIBLIOGRAPHIE

[1] Genèse, 11,4.

[2] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of on algebraic variety over a field of characteristic 0 . Annals of Math., vol. 79, n° 1 et 2, (1964).

[3] H. HIRONAKA - Bimeromorphic smoothing of complex analytic spaces, Preprint, Université de Warwick (1971).

[4] H. HIRONAKA - Flattening of complex analytic maps, Preprint Harvard (1973).

[5] H. HIRONAKA - La voûte étoilée, In Singularités à Cargèse, Astérisque n° 7 et 8 (1973).

[6] H. HIRONAKA - Subanalytic sets, In "Number theory, algebraic geometry and commutative algebra", volume in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya (publisher) 1973.

[7] H. HIRONAKA - Introduction to real analytic spaces and maps, Cours à l'Instituto Leonida Torelli Pise, 1973.

[8] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE, B. TEISSIER - Platificateur local en géométrie analytique, et aplatissement local, In Astérisque n° 7 et 8 (1973).

[9] M. LEJEUNE et B. TEISSIER - Thèses, Paris VII (1973).

[10] H. ISS'SA - On the meromorphic function field of a Stein variety, Annals of Math., vol. 83, n° 1, (1966).

[11] S. ŁOJASIEWICZ - Triangulation of semi-analytic sets, Ann. di Sc. Norm. di Pisa, 1965, 449-474.

[12] S. ŁOJASIEWICZ - Ensembles semi-analytiques, Preprint Ecole Polytechnique A 66-765 (1965).

[13] M. RAYNAUD - Flat modules in Algebraic geometry, Compositio Mathematica, Vol. 24, fasc. 1 (1972), 11-31.

[14] O. ZARISKI - The Compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50 (1944), 683-691.