SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES MARTINET

Bases normales et constante de l'équation fonctionnelle des fonctions *L* d'Artin

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. n° 450, p. 273-294

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__273_0>

Séminaire BOURBAKI 450-01
26e année, 1973/74, n° 450 Juin 1974

BASES NORMALES ET CONSTANTE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DES FONCTIONS L D'ARTIN

par Jacques MARTINET

Soit k un corps de nombres, et soit K une extension galoisienne finie de k dont le groupe de Galois est noté G ; pour tout corps de nombres L, nous notons O_L son anneau d'entiers. Nous examinons dans cet exposé les deux problèmes suivants :

(1) Que peut-on dire de la structure de O_K en tant que $O_k[G]$-module ? Nous étudierons en particulier l'existence de bases normales d'entiers, c'est-à-dire d'entiers θ formant avec leurs conjugués une base du O_k-module O_K. L'existence d'une base normale est clairement équivalente à la propriété pour O_K d'être un module libre sur $O_k[G]$.

(2) Soit χ un caractère de G, et soit $s \mapsto L(s,\chi,K/k)$ la fonction L d'Artin correspondante. La "fonction L étendue" est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui possède une équation fonctionnelle de la forme $\Lambda(s,\chi) = W(\chi,K/k)\Lambda(1-s,\bar{\chi})$; le symbole $\bar{}$ désigne la conjugaison complexe, et $W(\chi,K/k) = W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1, la constante de l'équation fonctionnelle. La relation évidente $W(\bar{\chi}) = \overline{W(\chi)}$ montre que l'on a $W = +1$ ou $W = -1$ lorsque χ est à valeurs réelles. Le second problème est précisément l'étude du signe de $W(\chi)$ dans ce cas.

Il est apparu, il y a peu de temps, que les problèmes (1) et (2) sont liés. Les résultats sont encore fragmentaires, et l'on doit faire souvent des hypothèses restrictives sur l'extension K/k ; ainsi, sauf mention du contraire, nous ne considérons que des extensions modérément ramifiées dans les paragraphes 1 et 2, consacrés respectivement aux bases normales et au signe de la constante W ; de plus, le corps de base k sera souvent le corps des nombres rationnels.

Divers mathématiciens ont obtenu des résultats sur ces problèmes. Comme

nous le verrons, la contribution de A. Fröhlich est particulièrement importante. Le rapporteur le remercie vivement de lui avoir transmis ses tout derniers résultats.

§ 1. Bases normales

1.1 On dit qu'une extension L'/L de corps de nombres est modérément ramifiée si pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de L et tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de L' au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'indice de ramification $e(\mathfrak{p}'/\mathfrak{p})$ n'est pas divisible par la caractéristique de $O_L/\mathfrak{p}$; il revient au même de dire que la trace dans l'extension L'/L est une surjection de $O_{L'}$ sur O_L. Pour une extension galoisienne K/k, on montre facilement que O_K est un $O_k[G]$-module projectif si et seulement si l'extension K/k est modérément ramifiée ; en particulier, seules les extensions modérément ramifiées peuvent posséder une base normale.

Le plus ancien résultat sur les bases normales est dû à Hilbert ([27], théorème 132) qui démontre qu'une extension abélienne des rationnels dont le discriminant est premier avec le degré possède une base normale. Le résultat est en fait exact pour toutes les extensions abéliennes modérément ramifiées des rationnels, le cas général étant dû à Speiser. Le principe de la démonstration est très simple : si $K/\mathbb{Q}$ est une extension abélienne, soit f le plus petit entier positif (le conducteur) tel que K soit contenue dans $\mathbb{Q}(\omega)$, ω désignant une racine d'ordre f de l'unité (l'existence du plongement dans un corps cyclotomique est le théorème de Kronecker-Weber). On constate que ω est une base normale de $\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q}$. Il est alors clair que la trace θ de ω dans $\mathbb{Q}(\omega)/K$ est une base normale de $K/\mathbb{Q}$.

1.2 Bien entendu, le procédé ci-dessus ne s'applique qu'aux extensions abéliennes ; pour décrire d'autres résultats, il est nécessaire de donner quelques indications sur l'arithmétique des algèbres semi-simples, résultats que nous appliquerons ensuite aux algèbres de groupes.

Soit A une algèbre semi-simple sur un corps de nombres k.

DÉFINITIONS.- Un ordre O de O_k dans A est un sous-anneau unitaire de A qui est un O_k-module de type fini et contient une base de A considérée comme espace vectoriel sur k.

On dit qu'un $\underline{O}$-module (à gauche) M est de rang r si M est un O_k-module sans torsion de type fini et vérifie en outre la conditon : $k \otimes_{O_k} M$ est libre de rang r sur A .

On dit qu'un $\underline{O}$-module M est localement libre si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de O_k , $M_{\mathfrak{p}} = (O_k)_{\mathfrak{p}} \otimes_{O_k} M$ est un module libre sur l'anneau $\underline{O}_{\mathfrak{p}} = (O_k)_{\mathfrak{p}} \otimes_{O_k} \underline{O}$, anneau qui est un ordre de $(O_k)_{\mathfrak{p}}$ dans A .

Soit E l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\underline{O}$-modules localement libres. Considérons comme équivalentes les classes dans E de deux $\underline{O}$-modules M et M' s'il existe deux $\underline{O}$-modules libres L et L' et un isomorphisme de $M \oplus L$ sur $M' \oplus L'$. L'opération somme directe induit sur l'ensemble quotient une structure de groupe ; le groupe ainsi obtenu sera appelé groupe des classes de $\underline{O}$ et noté $C\ell(\underline{O})$. C'est un groupe abélien fini. Lorsque $\underline{O} = O_k$, c'est le groupe usuel des classes d'idéaux de O_k . L'élément neutre de $C\ell(\underline{O})$ est constitué des classes des modules M stablement libres, qui possèdent en fait la propriété plus précise suivante : $M \oplus \underline{O}$ est isomorphe à $\underline{O} \oplus \underline{O}$.

1.3 Si $\underline{O}'$ est un ordre contenant $\underline{O}$, l'extension des scalaires induit un homomorphisme surjectif : $C\ell(\underline{O}) \longmapsto C\ell(\underline{O}')$. Cela s'applique au cas où $\underline{O}'$ est un ordre maximal. Le noyau de l'homomorphisme $C\ell(\underline{O}) \longmapsto C\ell(\underline{O}')$, dont nous allons voir qu'il ne dépend pas du choix de l'ordre maximal $\underline{O}'$ contenant $\underline{O}$, sera noté $D(\underline{O})$.

La considération des idempotents centraux irréductibles de l'algèbre A permet d'identifier A à la composée d'algèbres simples A_i de centres k_i et l'ordre maximal $\underline{O}'$ au composé d'ordres maximaux $\underline{O}'_i$ de A_i contenant l'anneau des entiers de k_i . On est ainsi ramené à considérer un ordre maximal $\underline{O}'$ d'une k-algèbre centrale simple A . Un $\underline{O}'$-module à gauche de rang r est alors localement libre (théorème de Auslander-Goldman,[4]), et est isomorphe à la somme directe d'un module libre de rang $r-1$ et d'un idéal à gauche I de $\underline{O}'$ (théorème de Chevalley-Steinitz). L'idéal I étant localement libre, on peut définir sa norme réduite, $N_{red}(I)$; c'est un idéal de O_k . Si M est un $\underline{O}'$-module de rang r isomorphe à une somme directe

$\underline{O}'^{r-1} \oplus I$, on pose $\mathrm{Nred}(M) = \mathrm{Nred}(I)$, et l'on vérifie la formule $\mathrm{Nred}(M \oplus M') = \mathrm{Nred}(I).\mathrm{Nred}(I')$ si M' est isomorphe à $\underline{O}'^{r'-1} \oplus I'$.

On dit qu'une place à l'infini v de k est ramifiée dans A si v est une place réelle et si l'algèbre étendue $k_v \otimes_k A$, où k_v est le complété de k pour v identifié au corps des nombres réels, est isomorphe à une algèbre de matrices sur le corps des quaternions de Hamilton. Soit $C\ell_A(k)$ le groupe des classes d'idéaux de k dans le sens restreint suivant : $C\ell_A(k)$ est le quotient du groupe des idéaux non nuls de k par le sous-groupe des idéaux principaux possédant un générateur positif à toutes les places à l'infini de k ramifiées dans A . La norme réduite définit par passage aux quotients un homomorphisme $N : C\ell(\underline{O}') \to C\ell_A(k)$. Au vocabulaire près, le théorème suivant est dû à Eichler ([12]) ; on pourra aussi consulter l'ouvrage de Swan-Evans ([40]).

THÉORÈME.- L'homomorphisme N est un isomorphisme de $C\ell(\underline{O}')$ sur $C\ell_A(k)$. Si de plus l'algèbre A n'est pas un corps de quaternions totalement défini (i.e. s'il existe une place à l'infini de k non ramifiée dans A ou si A n'est pas de rang 4 sur son centre), alors tout $\underline{O}'$-module stablement libre est libre.

Il est à noter que la seconde partie du théorème s'étend à un ordre $\underline{O}$ quelconque (Jacobinski [29] ; Fröhlich [18]). De plus, on a une suite exacte $0 \to D(\underline{O}) \to C\ell(\underline{O}) \xrightarrow{\varphi} C\ell_A(k) \to 0$, dans laquelle l'homomorphisme φ s'obtient en composant N avec l'homomorphisme $C\ell(\underline{O}) \mapsto C\ell(\underline{O}')$ provenant de l'extension des scalaires. Cela justifie la notation $D(\underline{O})$.

1.4 Les considérations qui précèdent s'appliquent dans le cas suivant : K/k désignant toujours une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G , on prend $A = k[G]$, $\underline{O} = O_k[G]$, et l'on considère le $\underline{O}$-module O_K . L'extension K/k étant modérément ramifiée, O_K est un $\underline{O}$-module localement libre de rang 1 , théorème dû à E. Noether ([36]) ; du reste, Swan ([39]) a montré que tous les $\underline{O}$-modules projectifs sont localement libres. Quant aux facteurs simples de l'algèbre $k[G]$, ils sont naturellement en bijection avec les classes de conjugaison sur k de caractères absolument irréductibles de G ,

le centre d'un facteur simple associé au caractère χ étant l'extension abélienne $k(\chi)$ de k .

Exemple.- On prend pour G le groupe diédral d'ordre $2p$, p premier, et $k = \mathbb{Q}$. On montre que le groupe $D(\underline{O})$ est réduit à l'élément neutre, et l'on démontre un théorème de base normale pour ces extensions en prouvant que l'image de O_K dans $C\ell_A(\mathbb{Q}')$ est triviale, $\mathbb{Q}'$ désignant le sous-corps réel maximal du corps des racines p-ièmes de l'unité, centre du facteur simple associé aux caractères irréductibles de degré 2 de G (thèse du rapporteur [33], 1968).

Limitons-nous maintenant au cas où le corps de base k est le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. L'étape suivante est due à Cougnard ([7]) qui a étudié les extensions non abéliennes à groupe de Galois d'ordre pq , p et q premiers. L'interprétation de ses résultats m'a conduit à proposer la conjecture suivante, dans l'énoncé de laquelle il n'y a pas lieu de faire une hypothèse de ramification modérée :

CONJECTURE.- Soit K une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G , et soit $\underline{O}'$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant l'ordre $\underline{O} = \mathbb{Z}[G]$. Alors, le sous-module $\underline{O}'.O_K$ de K est un $\underline{O}'$-module stablement libre.

Revenant au cas modéré, la conjecture s'exprime en disant que l'image de O_K dans $C\ell(\underline{O})$ est dans le sous-groupe $D(\underline{O})$, puisque les $\underline{O}'$-modules $\underline{O}'.O_K$ et $\underline{O}' \otimes_{\underline{O}} O_K$ sont isomorphes du fait que O_K est projectif sur $\underline{O}$; de plus, il suffit de considérer les modules $\underline{O}_\chi \otimes_{\underline{O}} O_K$, χ parcourant l'ensemble des caractères de G et $\underline{O}_\chi$ désignant un ordre maximal convenable du facteur simple correspondant à χ .

1.5 Une démonstration. L'exemple suivant n'est pas intéressant en lui-même, puisqu'il s'agit d'une extension abélienne des rationnels, mais permet de donner une idée des procédés utilisés par Cougnard et le rapporteur sans allonger démesurément l'exposé. Soit G le groupe cyclique d'ordre un nombre premier p , et soit $N = \sum_{s \in G} s$ la "norme" dans $\mathbb{Z}[G]$. Si M est un $\mathbb{Z}[G]$-module de rang 1 , le quotient M/M^G est un module sur l'anneau $A = \mathbb{Z}[G]/(N)$, qui est isomorphe à l'anneau des entiers du corps de racines p-èmes de l'unité.

La classe de M/M^G dans $Cl(A)$ caractérise M à isomorphisme près. Si donc K est une extension de $\mathbb{Q}$ à groupe de Galois isomorphe à G, il suffit de prouver que la classe dans A de $O_K/\mathbb{Z}$ est triviale. Choisissons un caractère χ non trivial de G ; notons $\mathbb{Q}'$ le corps des racines p-èmes de l'unité et K' le composé $K\mathbb{Q}'$. Pour tout x de K, on peut former la résolvante de Lagrange $\langle x,\chi\rangle = \sum_{s\in G} \chi(s^{-1})\,(sx)$, à valeurs dans K'. Choisissons une base normale (*) θ de $K/\mathbb{Q}$, et posons $a(\chi) = (\langle\theta,\chi\rangle)^p$; c'est un élément de $\mathbb{Q}'$, et l'idéal principal qu'il engendre s'écrit de façon unique sous la forme $I(\chi)^p J(\chi)$, où $I(\chi)$ est un idéal fractionnaire de $\mathbb{Q}'$ et $J(\chi)$ un idéal entier sans puissance p-ème. Le caractère χ permet d'identifier les anneaux A et $O_{\mathbb{Q}'}$, et l'application $x \mapsto \dfrac{\langle x,\chi\rangle}{\langle\theta,\chi\rangle}$ définit par passage au quotient un isomorphisme de A-modules de $O_K/\mathbb{Z}$ sur un idéal fractionnaire I' de $\mathbb{Q}'$. On vérifie la double inclusion $pI(\chi)^{-1} \subset I' \subset I(\chi)^{-1}$; comme l'idéal pA est la puissance $(p-1)$-ème d'un idéal principal, la classe dans $Cl(A)$ de $O_K/\mathbb{Z}$ est la classe de l'idéal $I(\chi)^{-1}$. Ecrivons maintenant l'idéal $J(\chi)$ sous la forme d'un produit $\prod_{i=1}^{p-1} J_i(\chi)^i$, où les idéaux $J_i(\chi)$ sont entiers, sans facteur carré et premiers entre eux deux à deux. La décomposition de $J(\chi)$ est unique. Soit s_i, $i \not\equiv 0 \mod p$, l'élément du groupe de Galois H de $\mathbb{Q}'/\mathbb{Q}$ élevant chaque racine p-ème de l'unité à la puissance i ; pour $i \not\equiv 0 \mod p$, soit i' l'inverse de i mod. p compris entre 1 et $p-1$. En étudiant l'action sur $a(\chi)$ des éléments s_i, on constate que l'on a $J(\chi) = J_1(\chi)^r$, où r est l'élément $\sum_{i=1}^{p-1} i's_i$ de $\mathbb{Z}[H]$. On reconnait là "l'élément de Stickelberger" du corps $\mathbb{Q}'$: c'est un élément de $\mathbb{Z}[H]$ qui annule le groupe des classes de $\mathbb{Q}'$. Il en résulte que $J(\chi)$ est principal, donc que $I(\chi)^p$ est principal. En étudiant l'action de H sur l'idéal $I(\chi)$ et en utilisant une nouvelle fois la relation de Stickelberger, on montre que $I(\chi)$ lui-même est principal, ce qui achève la démonstration. (Il faut consi-

(*) On suppose seulement que les conjugués de θ forment une base d'espace vectoriel de K sur $\mathbb{Q}$.

dérer l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par N et $\sum_i i's_i$, qui annule le groupe des classes de $\mathbb{Q}'$.)

On peut définir un élément de Stickelberger pour toute extension cyclotomique (voir par exemple [30], chapitre IV), et en déduire un élément de Stickelberger r_L pour toute extension abélienne L des rationnels ; on obtient ainsi une relation sur les classes d'idéaux de L qui n'est triviale que si L est réelle. Etant donnés maintenant une extension galoisienne $K/\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G et un caractère χ de G induit par un caractère ψ d'un sous-groupe, on peut associer à χ des résolvantes de Lagrange $\langle x,\psi\rangle$, et démontrer dans certains cas la conjecture par des procédés analogues à ceux de l'exemple ci-dessus mais nettement plus compliqués, en utilisant l'élément de Stickelberger du centre du facteur simple associé à χ . Le théorème d'induction de Brauer pourrait peut-être permettre d'atteindre tous les caractères. Il est à noter que ce type de démonstration permet d'obtenir des résultats sans hypothèse de ramification modérée ; c'est le cas dans l'exemple traité.

1.6 Un théorème de Fröhlich. Tout récemment, et à la suite de nombreux résultats partiels, la conjecture proposée en 1.4 est devenue un théorème de Fröhlich (dans le cas modéré).

THÉORÈME.- *Soit $K/\mathbb{Q}$ une extension galoisienne modérément ramifiée de groupe de Galois G , et soit $\mathcal{O}'$ un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $\mathbb{Z}[G]$. Alors, $\mathcal{O}'.\mathcal{O}_K$ est un $\mathcal{O}'$-module stablement libre.*

A la suite d'un travail de Cougnard sur les groupes quaternioniens (cf. § 2) d'ordre $4p$, Fröhlich a prouvé le résultat pour les groupes dont tous les caractères sont réels. Ce cas particulier était fondamental pour étudier les problèmes exposés au § 2. Il s'agissait entre autres choses de résoudre les difficultés créées par l'existence de facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$ contenant un corps de quaternions, ce qui impose de prouver que certains idéaux principaux ont des générateurs totalement positifs (cf. 1.3). Fröhlich a ensuite résolu le problème pour des classes très étendues d'extension avant d'obtenir le résultat final.

La démonstration utilise des résolvantes qu'il avait définies il y a une douzaine d'années et qui ont fait l'objet de deux articles en 1966 ([14], [15]).

Une nouvelle rédaction adaptée aux problèmes que nous étudions dans cet exposé existe sous forme polycopiée ([22]).

Etant donnés une extension galoisienne modérément ramifiée K/k de groupe de Galois G et un caractère χ de G réalisable sur k par une représentation ρ, posons $(x|\chi) = \det(\sum_{s \in G} sx.\rho(s^{-1}))$ pour tout élément x de K. Si χ est de degré 1, on retrouve les résolvantes de Lagrange. Si χ n'est pas réalisable sur k, on augmente le corps de base, et l'on doit résoudre les difficultés causées par le fait que $K \otimes_k k(\chi)$ peut ne pas être un corps (dans l'article [23], K et $k(\chi)$ sont supposées linéairement disjointes sur k, mais Fröhlich sait traiter le cas général). Soit alors $(O_K|\chi)$ l'idéal engendré par les $(x|\chi)$, $x \in O_K$. On considère de façon analogue à ce qui a été fait dans 1.5 l'idéal $I(\chi) = (O_K|\chi).(\theta|\chi)^{-1}$, où θ désigne une base normale de K sur k. Les idéaux $I(\chi)$ permettent la détermination de l'image de O_K dans $C\ell(O_k[G])$. Fröhlich démontre un certain nombre de propriétés des résolvantes dont nous retiendrons les deux suivantes :

(i) $(O_K|\chi).(O_K|\bar{\chi}) = O_{k(\chi)}.f(\chi)$, où $f(\chi)$ est un idéal entier de k, le conducteur de χ ; le membre de gauche est un idéal qui peut être défini dans $k(\chi)$. Cette formule relie donc résolvantes et conducteurs d'Artin. Elle permet en particulier de démontrer que K/k ne peut posséder une base normale d'entiers que si les différents conducteurs $f(\chi)$ sont principaux.

(ii) Si $K = \mathbb{Q}$, $(O_K|\chi) = O_{\mathbb{Q}(\chi)}\,\tau(\chi)$, où $\tau(\chi)$ est une somme de Gauss au sens de Hasse ([26]) : on a $\tau(\chi) = W(\chi)\,\widetilde{N(f(\chi))}^{\frac{1}{2}}$, où $W(\chi)$ est défini au § 2, et $\widetilde{N(f(\chi))}$ est la norme du conducteur modifiée en introduisant les places à l'infini (on se ramène aux caractères de degré 1).

C'est cette dernière formule qui conduit à la démonstration du théorème. La relation de Stickelberger n'intervient pas explicitement : cela est dû à l'utilisation de sommes de Gauss, qui interviennent précisément dans la démonstration de cette relation (cf. [30]).

1.7 Revenons maintenant aux bases normales proprement dites. Il y a des exemples d'extensions galoisiennes modérément ramifiées du corps $\mathbb{Q}$ qui ne possè-

dent pas de base normale. Le premier exemple a été donné par le rapporteur ([34]). On prend pour groupe de Galois G le groupe quaternionien d'ordre 8 (G est le groupe multiplicatif des quaternions ± 1 , $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$). On montre que les groupes $C\ell(\mathbb{Z}[G])$ et $D(\mathbb{Z}[G])$ coïncident et sont d'ordre 2 . Il existe alors des extensions qui possèdent une base normale et d'autres qui n'en possèdent pas. D'autres exemples ont été trouvés comme conséquence des résultats du § 2.

Il y a aussi des résultats positifs. Ainsi, le corps de base étant toujours $\mathbb{Q}$, Fröhlich a démontré des théorèmes de base normale lorsque G est l'un des groupes suivants :

(i) G est un groupe non abélien d'ordre pq , p premier, q divise $p-1$.

(ii) G est un groupe quaternionien d'ordre 2^n , $n \geq 4$. (*)

L'existence de bases normales est peut-être un "cas général", une fois que certaines obstructions sont levées ; le résultat (ii) est particulièrement frappant à cet égard. Nous verrons des exemples d'obstructions au § 2 .

L'étude des bases normales d'entiers proprement dites nécessite le calcul de $C\ell(\mathbb{Z}[G])$ ou de $D(\mathbb{Z}[G])$. Plusieurs procédés de calcul sont décrits dans la littérature. Jacobinski donne une formule globale analogue à celle du théorème de Eichler, mais faisant intervenir les groupes d'idéaux définis modulo un conducteur de la théorie du corps de classes ([29]). Fröhlich donne une formule écrite en termes d'idèles qui permet des calculs locaux et est de ce fait très commode dans les applications ([18]). Enfin, Reiner et Ullom ont donné une suite exacte issue de la suite exacte de Mayer-Vietoris en K-théorie qui peut être utilisée pour ces calculs ([38]).

§ 2. Fonctions L

On ne fait aucune hypothèse sur la ramification de K/k dans les n°s 2.1 à 2.4.

2.1 Soit K/k une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G , et soit χ un caractère de G . E. Artin ([2], [3]) a associé à l'extension K/k et au caractère χ une fonction $s \longmapsto L(s, \chi, K/k)$ définie lorsque s est un nombre complexe de partie réelle supérieure à 1 ,

(*) On n'a qu'une "base normale à stabilité près".

et prolongeable dans tout le plan complexe. Lorsque G est un groupe abélien et χ un caractère de degré 1, on retrouve via l'application de réciprocité les fonctions L de la théorie du corps de classes (fonctions L abéliennes). Les fonctions L d'Artin possèdent les propriétés suivantes :

(i) $L(s, \chi + \chi', K/k) = L(s, \chi, K/k).L(s, \chi', K/k)$.

(ii) Si K'/k est une sous-extension de K/k correspondant au sous-groupe H de G, et si χ est induit par un caractère ψ de H, on a :

$$L(s, \chi, K/k) = L(s, \psi, K/K') .$$

(iii) Si K'/K est galoisienne et si χ provient d'un caractère encore noté χ de G/H, on a :

$$L(s, \chi, K/k) = L(s, \chi, K'/k) .$$

Comme tout caractère est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de caractères induits par des caractères de degré 1 de sous-groupes (théorème de Brauer), on voit que les fonctions L d'Artin s'expriment comme produits de puissances entières positives ou négatives de fonctions L abéliennes ; en particulier, les fonctions L d'Artin sont méromorphes.

2.2 Les fonctions L possèdent une équation fonctionnelle reliant $L(s, \chi, K/k)$ à $L(1-s, \bar{\chi}, K/k)$, $\bar{\chi}$ désignant le conjugué complexe du caractère χ .

Les fonctions L sont définies par un produit de termes locaux associés aux idéaux premiers de k . En introduisant des termes locaux associés aux places à l'infini de k et un "terme exponentiel", on obtient la "fonction L étendue" $s \mapsto \Lambda(s, \chi, K/k)$, qui vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Lambda(s, \chi, K/k) = W(\chi, K/k)\Lambda(1-s, \bar{\chi}, K/k) ,$$

où $W(\chi, K/k) = W(\chi)$ est un nombre complexe de module 1, la constante de l'équation fonctionnelle qui nous intéresse, "Artin root number" dans la terminologie anglaise.

La constante W possède les propriétés analogues aux propriétés (i), (ii) et (iii) des fonctions L d'Artin, si bien que le calcul de W se ramène grâce au théorème de Brauer au calcul de la constante analogue des fonctions abéliennes. Or, la littérature contient des formules pour les fonctions L abéliennes (voir par exemple Lang [30], ou le "Bericht" de Hasse [25]). On peut

donc calculer effectivement dans le cas général la constante $W(\chi)$.

Signalons que les formules donnant les constantes W des fonctions abéliennes se présentent sous la forme d'un produit de termes locaux associés à chaque place de k , presque tous égaux à 1 , et qui sont essentiellement des sommes de Gauss. Il est tentant de définir dans le cas général des constantes locales en utilisant le théorème de Brauer. Malheureusement, le résultat dépend de l'expression du caractère comme combinaison linéaire de caractères induits. Dwork ([11]) avait obtenu en 1955 des constantes locales définies au signe près. Deligne ([10]) a défini de "bonnes" constantes locales en 1972 à la suite des travaux de Langlands ([31]).

Il est possible que les démonstrations des résultats que nous allons exposer puissent être simplifiées grâce à ce résultat de Deligne.

2.3 Revenant à l'équation fonctionnelle, on voit immédiatement la relation $W(\bar{\chi}, K/k) = W(\chi, K/k)$, qui entraîne que $W(\chi)$ est un nombre réel égal à $+1$ ou à -1 lorsque χ est un caractère à valeurs réelles. Nous ne nous occupons plus désormais que de caractères à valeurs réelles.

Ces caractères sont de deux types :

. type 1 : χ est le caractère d'une représentation de G par des matrices à coefficients réels ; on dit que χ est réalisable sur R .

. type 2 : il n'existe aucune représentation de G par des matrices à coefficients réels qui ait pour caractère χ .

Lorsque χ est absolument irréductible, il lui correspond un facteur simple A_χ de centre R de l'algèbre $R[G]$. Alors, χ est de type 1 (resp. de type 2) si l'algèbre A_χ est isomorphe à une algèbre de matrices sur R (resp. à une algèbre de matrices sur le corps des quaternions).

Jusqu'à une époque récente, on ne connaissait pas d'exemple de caractère χ vérifiant $W(\chi) = -1$. Ainsi, si K/k est une extension quadratique, la fonction L correspondante possède une constante égale à $+1$, puisqu'elle est quotient de deux fonctions zêta. Les premiers exemples avec $W = -1$ ont été obtenus indépendamment par Armitage ([1]) et Serre (lettres de Serre au rapporteur) en 1971.

L'exemple d'Armitage est fondé sur un article de Serre ([43]) consacré au conducteur d'Artin des caractères réels, (le conducteur d'Artin d'un caractère χ , noté $F(\chi , K/k)$, est un idéal de k qui intervient dans le terme exponentiel de l'équation fonctionnelle (pour une définition, voir [42], chapitre VI) ; la détermination de $F(\chi , K/k)$ se ramène au cas où χ est de degré 1 , cas dans lequel il coïncide avec le conducteur de la théorie du corps de classes). Fröhlich avait posé le problème de savoir si le conducteur d'un caractère réel était dans le carré d'une classe. Serre démontre que c'est le cas pour les caractères du type 1 , et donne un contre-exemple pour une extension munie d'un caractère du type 2 (il connaissait déjà des contre-exemples dans le cas des corps de fonctions). Armitage considère alors une extension K/k possédant un caractère χ pour lequel $F(\chi , K/k)$ n'est pas dans le carré d'une classe, puis choisit un caractère quadratique ψ sur le groupe des classes de k qui applique $F(\chi , K/k)$ sur -1 . Au caractère ψ est attachée une extension quadratique k' de k , et χ et ψ définissent naturellement des caractères χ' et ψ' sur $K' = k'K$. Armitage montre alors que le produit $W(\chi').W(\psi')$ est égal à -1 .

A la même époque, Serre avait conjecturé que la constante $W(\chi)$ était égale à $+1$ lorsque le caractère χ était réalisable sur $\mathbb{R}$; il avait même une démonstration de ce fait dans le cas des corps de fonctions. Il lui fallait donc un corps possédant un caractère réel du type 2 . Il considéra un de mes exemples de corps quaternionien de degré 8 dépourvu de base normale, fit pour ce corps le calcul des sommes de Gauss pour un caractère de degré 1 induisant le caractère irréductible de degré 2 du groupe de Galois de l'extension, et trouva ainsi par un calcul direct un exemple de constante $W(\chi)$ égale à -1 , exemple qui devait jouer un rôle important dans la suite.

2.4 La conjecture de Serre mentionnée ci-dessus fut résolue indépendamment par A. Fröhlich et J. Queyrut en 1972, et a été publiée dans un article commun à Inventiones ([24]). Les auteurs démontrent le

THÉORÈME.- Soient k un corps de nombres (ou un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini), K une extension galoisienne de k et χ un caractère réalisable sur $\mathbb{R}$ du groupe de Galois de K/k . Alors, la constante $W(\chi , K/k)$ a la valeur $+1$.

La démonstration repose sur un résultat de théorie des groupes utilisé par Serre dans l'étude du conducteur des caractères réels : tout caractère réalisable sur $\mathbf{R}$ est combinaison $\mathbb{Z}$-linéaire de caractères induits par des caractères réalisables sur $\mathbb{R}$ de degré 1 ou 2 de sous-groupes de G . Les caractères de degré 1 ne présentent aucune difficulté. Dans le cas des caractères de degré 2 , on se ramène au cas d'un caractère fidèle. Le groupe de Galois de l'extension est alors un groupe diédral, et l'on peut faire des calculs explicites, les caractères de degré 2 d'un groupe diédral étant induits par un caractère de degré 1 d'un sous-groupe cyclique d'indice 2 .

2.5 Examinons maintenant le groupe quaternionien d'ordre 8 . C'est le groupe multiplicatif G formé des quaternions $\{\pm 1 , \pm i , \pm j , \pm k\}$. Il possède 4 caractères de degré 1 et un caractère irréductible χ de degré 2 ; l'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ s'identifie au produit $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times H$, où H est le corps des quaternions "usuels" sur $\mathbb{Q}$. Les ordres maximaux ont pour nombre de classes 1 , et l'on a vu que le groupe $C\ell(\mathbb{Z}[G]) = D(\mathbb{Z}[G])$ est d'ordre 2 ; nous l'identifions à $\{-1,+1\}$. Pour une extension modérément ramifiée $K/\mathbb{Q}$, on note U_K , en suivant Fröhlich, l'image de O_K dans ce groupe. Fröhlich ([17]) démontre le

THÉORÈME.- $W(\chi , K/\mathbb{Q}) = U_K$.

Cela met en évidence un lien surprenant entre le signe de W et la structure de G-module de O_K , envisagé par Serre dès le premier exemple, et qui s'est avéré rapidement probable à la suite de nombreux cas particuliers traités par Armitage.

Il n'est pas possible de donner des indications sur la démonstration, qui est très technique. Fröhlich donne des formules permettant un calcul immédiat de $W(\chi)$ pour une extension $K/\mathbb{Q}$ donnée. L'égalité $W(\chi) = U_K$ s'obtient ensuite en comparant ces formules avec celle que j'avais donnée pour U_K . On ne possède pas de démonstration plus directe de cette égalité dont la raison profonde nous échappe.

Il était alors naturel de chercher à obtenir un résultat analogue au précédent pour tous les caractères à valeurs réelles, mais non réalisables sur $\mathbb{R}$. Les résultats que je vais décrire succinctement portent essentiellement sur des extensions galoisiennes des rationnels à groupe de Galois quaternionien (il est

du reste vraisemblable que l'étude du signe de la constante W se ramène au cas des extensions relatives galoisiennes ayant pour groupe de Galois un groupe quaternionien ou éventuellement un des trois sous-groupes finis "exceptionnels" d'ordres respectifs 24 , 48 et 120 du groupe multiplicatif du corps des quaternions, extensions de l'un des groupes $\mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5$ par un groupe d'ordre 2 .

DÉFINITION.- Soit n un entier positif. Le groupe quaternionien d'ordre 4n est défini par deux générateurs σ et τ liés par les relations $\tau^4 = 1$, $\sigma^n = \tau^2$ et $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}$.

Pour $n = 1$, on obtient le groupe cyclique d'ordre 4 . Pour $n > 1$, on obtient un groupe dont le centre est d'ordre 2 , et dont le quotient par le centre est isomorphe au groupe diédral d'ordre 2n . Celui-ci étant noté d'ordinaire D_n , je noterai H_n le groupe quaternionien d'ordre 4n , extension du groupe D_n par un groupe d'ordre 2 .

Avant d'entrer dans les détails, donnons un résultat général dû à Fröhlich :

THÉORÈME.- Soit K/k une extension galoisienne modérément ramifiée de groupe de Galois G . Soient χ_1 et χ_2 deux caractères réels de G conjugués sur $\mathbb{Q}$. Alors, $W(\chi_1, K/k) = W(\chi_2, K/k)$.

Revenons à une extension K de $\mathbb{Q}$. Les facteurs simples de $\mathbb{Q}[G]$ sont associés aux classes de conjugaison de caractères irréductibles. Par conséquent, la valeur de $W(\chi)$ ne dépend que du facteur simple associé à χ .

Le groupe H_3 a été considéré par Queyrut ([37]) , qui utilisait les classes d'isomorphisme de modules de rang 1 au lieu des classes stables (mais cela n'a pas d'importance pour ce groupe particulier). Fröhlich ([19]) a ensuite considéré les groupes H_{p^r} , p premier impair. Il y a dans ce cas r classes de conjugaison sur $\mathbb{Q}$ de caractères absolument irréductibles de type 2 ; soient $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ ces classes. Notons $\underline{O}$ l'anneau $\mathbb{Z}[H_{p^r}]$. Il définit des homomorphismes θ_i pour $1 \leq i \leq r$ de $D(\underline{O})$ dans $\{-1,+1\}$. Comme l'image de O_K dans $Cl(\underline{O})$ est en fait dans $D(\underline{O})$, on

peut considérer les nombres $\varepsilon_i = \theta_i(0_K)$. Fröhlich démontre alors le

THÉORÈME.- (1) Soient ε_i' , $i = 1,\ldots,r$, des nombres égaux à $+1$ ou à -1 . Il existe une infinité d'extensions galoisiennes modérément ramifiées $K/\mathbb{Q}$ ayant un groupe de Galois isomorphe à H_{p^r} vérifiant pour tout i $W(\Phi_i) = \varepsilon_i'$.

(2) Si $p \equiv 3 \mod 4$, on a, pour tout i , $\varepsilon_i = W(\Phi_i)$.

(3) Si $p \equiv 1 \mod 4$, on a, pour tout i , $\varepsilon_i = +1$.

On a donc une bonne interprétation du signe de W en termes de G-modules lorsque p est congru à 3 modulo 4 ; dans l'autre cas, on ne fait que lever une obstruction à l'existence de bases normales.

On peut interpréter le rôle de la congruence modulo 4 de la façon suivante : soit H_i le facteur simple de $\mathbb{Q}[H_{p^r}]$ correspondant à Φ_i ; son centre est le sous-corps réel maximal du corps des racines p^i-èmes de l'unité ; il possède un unique idéal premier p_i au-dessus de p , et il est clair que p_i est le seul idéal premier du centre éventuellement ramifié dans H_i . Or, toutes les places à l'infini du centre de H_i sont ramifiées dans H_i . Comme celles-ci sont au nombre de $(-1)^{(p-1)/2}$, la loi de réciprocité de Hasse montre tout de suite que H_i possède de la ramification pour une place finie si et seulement si p est congru à 3 modulo 4 .

Fröhlich a confirmé cette interprétation en étudiant les groupes H_{2^r} : un des facteurs simples de l'algèbre sur $\mathbb{Q}$ de ce groupe est un corps de quaternions. Pour $r \geq 2$, ce corps de quaternions est non ramifié pour les places finies, et l'invariant analogue à celui que nous avons considéré pour le groupe d'ordre 8 prend la valeur $+1$ sur l'anneau des entiers de l'extension, bien que la constante W puisse prendre chacune des valeurs -1 et $+1$; du reste, pour $r \geq 2$, 0_K est un $\mathbb{Z}[G]$-module stablement libre. Il serait intéressant d'avoir d'autres exemples.

Signalons pour terminer ce paragraphe la suggestion suivante de Fröhlich : considérer des $\mathbb{Z}[G]$-modules munis d'une forme bilinéaire, et définir un groupe

$C\ell_1(\mathbb{Z}[G])$ à l'aide de cette structure additionnelle. L'image de O_K dans ce groupe est un invariant plus fin que son image dans $C\ell(\mathbb{Z}[G])$, et Fröhlich m'a dit avoir des résultats dans cette direction. Peut-être peut-on espérer obtenir par ce procédé une interprétation dans le cas général du signe de W .

§ 3. Extensions "sauvagement" ramifiées

3.1 Il s'agit de celles qui ne sont pas modérément ramifiées (wildly ramified extensions). Nous nous proposons de donner quelques indications concernant les problèmes traités dans les paragraphes 1 et 2. Soit donc K/k une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G . Il est clair que l'on ne peut pas espérer trouver des bases normales lorsque l'extension n'est pas modérément ramifiée. Une idée naturelle est de remplacer $O_k[G]$ par "l'ordre associé à l'extension" : $\underline{O}(K/k) = \{\lambda \in k[G] \mid \lambda O_K \subset O_K\}$. S'il existe un ordre $\underline{O}$ sur lequel O_K est un module libre, alors $\underline{O} = \underline{O}(K/k)$.

La situation est beaucoup plus compliquée que dans le cas modéré. Ainsi, il est en général faux que O_K soit projectif sur son ordre associé (F. Bertrandias et M.-J. Ferton, [6]) ; la situation est peut-être plus simple lorsque le corps de base est le corps des rationnels, voir Jacobinski [28]). Par ailleurs, il existe des modules projectifs sur $\underline{O}(K/k)$ qui ne sont pas localement libres ; cette situation se présente pour $k = \mathbb{Q}$ et G le groupe symétrique sur 3 lettres, exemple dans lequel on peut trouver pour $\underline{O}(K/k)$ un ordre héréditaire non maximal. Enfin, il semble extrêmement difficile de donner une description de l'ordre $\underline{O}(K/k)$.

Lorsque k est le corps des nombres rationnels, on a néanmoins des résultats positifs. Ainsi, O_K est libre sur $\underline{O}(K/\mathbb{Q})$ dans les cas suivants :

- Le groupe G est abélien. C'est un théorème dû à Leopoldt (1959, [32] ; voir aussi Jacobinski, [28]). La démonstration se fait en plongeant K dans un corps cyclotomique, mais est beaucoup plus difficile que dans le cas modéré.

- Le groupe G est un groupe diédral d'ordre $2p$, p premier. Le résultat est dû à A.-M. Bergé. Elle définit des invariants caractérisant à isomorphisme près les modules de rang 1 sur $\mathbb{Z}[G]$, et les calcule dans le cas d'une extension. Un des invariants sert en particulier à assurer que le module consi-

déré, supposé projectif sur un ordre contenant $Z[G]$, est localement libre sur cet ordre ([5]).

3.2 On peut considérer dans le cas "sauvage" la conjecture du § 1 (qui est évidemment vérifiée pour les deux classes de groupes considérées ci-dessus) : si $\underline{O}'$ est un ordre maximal de $\mathbb{Q}[G]$ contenant $Z[G]$, $\underline{O}'.O_K$ est un $\underline{O}'$-module stablement libre. La conjecture est vérifiée pour les groupes non abéliens d'ordre pq , p et q premiers ; elle résulte du travail de Cougnard déjà cité ([7]). Cougnard ([9]) vient d'en obtenir une démonstration pour les p-groupes, sous la seule restriction que l'extension $K/\mathbb{Q}$ soit linéairement disjointe sur $\mathbb{Q}$ des corps $\mathbb{Q}(\chi)$, χ parcourant les caractères irréductibles de G . Cette restriction, qui n'est pas fondamentale, provient de la nécessité d'étendre le corps de base pour réaliser les représentations. La bonne catégorie à considérer pour ces problèmes est celle des algèbres galoisiennes au sens de Hasse, catégorie qui a l'avantage sur celle des extensions d'être stable par extension du corps de base.

3.3 On aimerait aussi relier dans le cas sauvage le signe de la constante de l'équation fonctionnelle pour les caractères réels à des propriétés de l'anneau des entiers considéré comme G-module. Hors du cas modéré, il n'y a à ma connaissance aucun résultat, ni aucune conjecture. Les deux remarques suivantes mettent en évidence la difficulté du problème.

. Soient χ et χ' deux caractères réels conjugués sur $\mathbb{Q}$ de G . On a vu que les constantes $W(\chi)$ et $W(\chi')$ coïncident dans le cas modéré. Fröhlich a donné un exemple montrant qu'il n'en est plus de même dans le cas sauvage ; autrement dit, étant donné un caractère réel χ de G , il se peut que le signe de $W(\chi)$ ne dépende pas uniquement du facteur simple de l'algèbre du groupe de Galois associé à χ .

. Considérons maintenant les extensions $K/\mathbb{Q}$ quaternioniennes de degré 8 . Il y a, rappelons-le, un unique caractère irréductible χ de degré 2 , qui est réel mais non réalisable sur R . Fröhlich ([17]) a montré le résultat suivant : la suite des groupes de ramification de l'idéal $2Z$ étant donnée parmi les suites a priori possibles, il existe une infinité d'extensions avec $W(\chi) = +1$ et une infinité d'extensions avec $W(\chi) = -1$. Plus précisément,

étant donnés deux ensembles finis et disjoints S et T de nombres premiers impairs, on conserve la liberté de choix pour le signe de $W(\chi)$ en se restreignant aux extensions ramifiées sur S et non ramifiées sur T. Or, si 2 se ramifie, c'est-à-dire si l'extension $K/\mathbb{Q}$ n'est pas modérément ramifiée, le rapporteur a montré que O_K est libre sur son ordre associé ([35]).

§ 4. Ce que l'on peut espérer

Les résultats de 1.6 et 3.2 permettent de considérer la conjecture de 1.4 comme très vraisemblable. On ne peut évidemment pas faire la conjecture analogue pour des extensions relatives K/k : il y a de nombreux exemples pour lesquels le module obtenu n'est même pas libre sur O_k. On peut toutefois espérer que les classes des modules de la forme $\underline{O}'.O_K$ constituent un sous-groupe de $Cl(\underline{O}')$, $\underline{O}'$ désignant un ordre maximal de $k[G]$ contenant $O_k[G]$. Dans l'esprit du rapporteur, la détermination d'un tel sous-groupe serait liée à l'existence d'une relation de Stickelberger dans le groupe des classes d'idéaux des extensions cyclotomiques relatives, existence conjecturale mais très vraisemblable à la suite des travaux récents de A. Brumer.

Il y a un résultat de Fröhlich dans cette direction (les notations sont celles de 1.6). Il démontre dans le cas modéré la formule :

$$(*) \qquad N_{k/\mathbb{Q}}((O_K|\chi)) = O_{\mathbb{Q}(\chi)}\,\tau(\chi)\ .$$

Il définit par ailleurs une norme $N : Cl(O_k[G]) \longmapsto Cl(\mathbb{Z}[G])$, et il déduit de $(*)$ que la classe de O_K dans $Cl(O_k[G])$ est envoyée par N dans le sous-groupe $D(\mathbb{Z}[G])$ de $Cl(\mathbb{Z}[G])$.

Signalons à ce propos que la formule $(*)$ jointe à celles de 1.6 a d'intéressantes conséquences pour les sommes de Gauss. Elle montre immédiatement que $\tau(\chi)$ est un entier algébrique, résultat dû à Dwork. Fröhlich a en outre montré que l'expression $\tau(\chi)^{\varphi(1)}\,\tau(\varphi)^{\chi(1)}\,\tau(\chi\varphi)^{-1}$ est un entier algébrique.

Limitons-nous toujours aux extensions modérées, et fixons k et G. On peut espérer que les classes des modules O_K constituent un sous-groupe $C_{k,G}$ de $Cl(O_k[G])$. Il faudrait définir un sous-groupe convenable $D_{k,G}$ de

$C\ell(O_k[G])$ contenant $C_{k,G}$, et, pour toute classe de conjugaison sur $\mathbb{Q}$ Φ de caractères réels non réalisables sur $\mathbb{R}$, un homomorphisme $\theta_\Phi : D_{k,G} \to \{-1,+1\}$, tel que $W(\Phi) = +1$ entraîne $\theta_\Phi(O_K) = +1$. L'image réciproque par N de $D(\mathbb{Z}[G])$ est peut-être un bon candidat. Mais il n'y a à ma connaissance aucun exemple d'interprétation de W en termes de $O_k[G]$-modules lorsque k n'est pas le corps des nombres rationnels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARMITAGE - Zêta Functions with a Zero at $s = \frac{1}{2}$, Invent. Math., 15 (1972), p. 199-205.

[2] E. ARTIN - Über eine neue Art von L-Reihen, Hamb. Abh., (1923), et collected papers n° 2.

[3] E. ARTIN - Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Hamb. Abh., (1930), et Collected papers n° 8.

[4] M. AUSLANDER et O. GOLDMAN - Maximal Orders, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), p. 1-24.

[5] A.-M. BERGÉ - Sur l'arithmétique d'une extension diédrale, Ann. Inst. Fourier, 22-2 (1972), p. 31-59.

[6] F. BERTRANDIAS et M.-J. FERTON - Sur l'anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, 274-A (1972), p. 1330-1333.

[7] J. COUGNARD - Sur les extensions galoisiennes non abéliennes de degré pq (p et q premiers) des rationnels, C. R. Acad. Sc. Paris, 274-A (1972), p. 936-939.

[8] J. COUGNARD - Sur l'anneau des entiers des extensions galoisiennes à groupe de Galois quaternionien d'ordre $4p$, Publ. Math. Bordeaux, 1 (1973-74), p. 1-21.

[9] J. COUGNARD - Entiers d'une p-extension, à paraître.

[10] P. DELIGNE - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular Functions of One Variable II, p. 501-597, Lecture Notes in Math. n° 349, Springer-Verlag, 1973.

[11] B. DWORK - On the Artin Root Number, Amer. J. Math., 78 (1956), p. 444-472.

[12] M. EICHLER - Über die Idealklassenzahl hypercomplexer Systeme, Math. Zeit., 43 (1938), p. 481-494.

[13] A. FRÖHLICH - The Module Structure of Kummer Extensions over Dedekind Domains, J. reine angew. Math., 209 (1962), p. 39-53.

[14] A. FRÖHLICH - Some Topics in the Theory of Module Conductors, Oberwolfach Berichte, 2 (1966), p. 59-83.

[15] A. FRÖHLICH - Resolvents, Discriminants and Trace Invariants, J. of Algebra, 4 (1960), p. 173-198.

[16] A. FRÖHLICH - Radical Modules over a Dedekind Domain, Nagoya Math. Journal, 27 (1966), p. 643-662.

[17] A. FRÖHLICH - Artin Root Numbers and Normal Integral Bases for Quaternion Fields, Invent. Math., 17 (1972), p. 143-166.

[18] A. FRÖHLICH - Locally free modules over arithmetic orders, à paraître in J. reine angew. Math.

[19] A. FRÖHLICH - Module invariants and Root numbers for quaternion fields of degree $4\ell^r$, à paraître in Proc. Camb. Phil. Soc.

[20] A. FRÖHLICH - Artin root numbers for quaternion characters, à paraître in Symposia Math.

[21] A. FRÖHLICH - The root numbers, conductors and representations of Artin for generalized quaternion groups, à paraître in Proc. London Math.

[22] A. FRÖHLICH - Module Conductors and Module Resolvents, à paraître.

[23] A. FRÖHLICH - Arithmetic and Galois module structure for tame extensions, à paraître.

[24] A. FRÖHLICH et J. QUEYRUT - On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations, Invent. Math., 20(1973), p. 125-138.

[25] H. HASSE - Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht D. Math. Ver., (1926, 1927 et 1930).

[26] H. HASSE - GAUSSsche Summen zu Normalkörpern über endlich-algebraischen Zahlkörpern, Abh. Akad. Wiss. Berlin (1952).

[27] D. HILBERT - Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht D. Math. Ver., (1897).

[28] H. JACOBINSKI - Über die Hauptordnung eines Körpers als Gruppenmodul, J. reine angew. Math., 213 (1963), p. 151-164.

[29] H. JACOBINSKI - Genera and decomposition of lattices over orders, Acta Math., 121 (1968), p. 1-29.

[30] S. LANG - Algebraic Number Theory, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

[31] R. P. LANGLANDS - On the functional equation of the Artin L-functions, Notes polycopiées, Yale.

[32] H. W. LEOPOLDT - Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers, J. reine angew. Math., 201 (1959), p. 119-149.

[33] J. MARTINET - Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre 2p , Ann. Inst. Fourier, 19-1 (1969), p. 1-80.

[34] J. MARTINET - Modules sur l'algèbre du groupe quaternionien, Ann. Sc. de l'E. N. S., 4ème série, 4 (1971), p. 299-308.

[35] J. MARTINET - Sur les extensions à groupe de Galois quaternionien, C. R. Acad. Sc. Paris, 274-A (1972), p. 933-935.

[36] E. NOETHER - Normal Basis bei Körpern ohne höhere Verzweigung, J. reine angew. Math., 167 (1932), p. 147-162.

[37] J. QUEYRUT - Extensions quaternioniennes généralisées et constante de l'équation fonctionnelle des séries L d'Artin, Publ. Math. Bordeaux, (1972/73), 5, p. 91-119.

[38] I. REINER et S. ULLOM - A Mayer-Vietoris sequence for class groups, Journal of Algebra, à paraître.

[39] R. SWAN - Induced representations and projective modules, Ann. of Math., 71 (1960), p. 552-578.

[40] R. SWAN et E. EVANS - K-theory of finite groups and orders, Lecture Notes in Math., 149, Springer-Verlag, 1970.

[41] J.-P. SERRE - Sur la rationalité des représentations d'Artin, Ann. of Math., 72 (1960), p. 406-420.

[42] J.-P. SERRE - Corps locaux, 2ème édition, Hermann, Paris, 1968.

[43] J.-P. SERRE - Conducteurs d'Artin des caractères réels, Invent. Math., 14 (1971), p. 173-183.