Michèle Vergne

Représentations unitaires des groupes de Lie résolubles

Séminaire N. Bourbaki, 1975, exp. nº 447, p. 205-226
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__205_0>

Séminaire BOURBAKI
26e année, 1973/74, n° 447

REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

par Michèle VERGNE

1. Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe. On se propose de décrire, si possible, le dual $\hat{G}$ de G, c'est-à-dire l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G en fonction de "données" intrinsèques à G : soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, où G opère par la représentation coadjointe. L'idée fondamentale depuis Kirillov est d'essayer d'associer à un élément de $\mathfrak{g}^*$ une représentation unitaire de G : naïvement, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors le dual $\hat{G}$ est l'ensemble des caractères unitaires de G, et tout caractère unitaire s'écrit $\chi(\exp X) = e^{if(X)}$, avec f élément de $\mathfrak{g}^*$; si $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie nilpotente et si $f \in \mathfrak{n}^*$ est telle que $f([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) = 0$, on associe évidemment à f le caractère e^{if}, où $(e^{if})(\exp X) = e^{if(X)}$; si $f([\mathfrak{n},\mathfrak{n}]) \neq 0$, on choisit alors une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension maximale parmi les sous-algèbres vérifiant $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = 0$, et on associe à f la représentation $\rho(f\,;\mathfrak{h})$ induite par le caractère e^{if} du sous-groupe $\exp \mathfrak{h}$ de $N = \exp \mathfrak{n}$.

1.1 Kirillov ([12]) démontre que si on choisit $\mathfrak{h}$ comme précédemment :

1.1.a $\mathfrak{h}$ vérifie la condition : $f([x,\mathfrak{h}]) = 0$ si et seulement si $x \in \mathfrak{h}$.

1.1.b $\rho(f\,;\mathfrak{h})$ est irréductible et sa classe $\rho(f)$ ne dépend pas de $\mathfrak{h}$ (vérifiant 1.1.a).

1.1.c l'application $f \mapsto \rho(f)$ de $\mathfrak{n}^*$ dans $\hat{N}$ définit une bijection de l'ensemble $\mathfrak{n}^*/N$ des orbites de la représentation coadjointe sur $\hat{N}$.

D'autre part, $\mathfrak{n}^*/N$ et $\hat{N}$ sont munis tous deux de topologies naturelles ; on savait que l'application ρ de $\mathfrak{n}^*/N$ dans $\hat{N}$ est continue ([12], [14]). I. Brown [7] vient de prouver que c'est un homéomorphisme.

On obtient donc dans le cas nilpotent une paramétrisation aussi agréable que possible de $\hat{N}$.

1.2 Et on est amené à penser qu'il y a une relation étroite entre les orbites de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ et le dual $\hat{G}$ de G .

[A partir de maintenant, G désignera toujours un groupe résoluble simplement connexe.]

Rappelons que si N est un groupe nilpotent simplement connexe, opérant dans un espace vectoriel réel de dimension finie par une représentation unipotente, alors toute orbite $N.x$ est fermée et simplement connexe, **et** le stabilisateur $N(x)$ de x est simplement connexe.

Par contre, la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ peut être très irrégulière. [Il suffit de considérer l'exemple du groupe de Mautner, i.e. le produit semi-direct $\mathbf{R} \times_s (\mathbf{C} \times \mathbf{C})$ avec $\mathbf{R}$ agissant dans $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$ par $t.(z_1,z_2) = (e^{it}z_1 , e^{i\lambda t}z_2)$ où λ est irrationnel.] **Les orbites de G dans $\mathfrak{g}^*$ ne sont pas en général localement fermées. D'autre part, si $g \in \mathfrak{g}^*$, le stabilisateur $G(g)$ n'est pas connexe en général ; G étant résoluble simplement connexe, la composante connexe $G(g)_0$ de $G(g)$ est simplement connexe. Elle a comme algèbre** de Lie $\mathfrak{g}(g) = \{X \in \mathfrak{g}$, tels que $g([X,Y]) = 0 \ \forall\ Y \in \mathfrak{g}\}$ et comme $g([\mathfrak{g}(g) , \mathfrak{g}(g)]) = 0$, g définit un caractère χ_g de $G(g)_0$.

1.3 <u>Définition</u>.- On dit que g est intégrable, si χ_g se prolonge en un caractère de $G(g)$.

Si g est intégrable, on note $\widehat{G(g)}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $G(g)$ qui se restreignent à $G(g)_0$ suivant χ_g , et $\overset{\circ}{\overline{G(g)}}$ l'ensemble des caractères de $G(g)$ triviaux sur $G(g)_0$.

Soit $O = G.g$ l'orbite de g , alors $G(g)/G(g)_0$ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(O)$ de l'orbite, et $\overset{\circ}{\overline{G(g)}}$ à $\widehat{\pi_1(O)}$; $\overset{\circ}{\overline{G(g)}}$ agit par multiplication simplement transitivement sur $\widehat{G(g)}$.

1.4 La généralisation des résultats de Kirillov au cas résoluble présentait des difficultés variées. Tout d'abord, contrairement au cas nilpotent, G n'est pas toujours de type I (et $\hat{G}$ n'est pas un T_0-espace). D'autre part, même si G est de type I, il n'est pas en général possible d'obtenir tout élément τ de $\hat{G}$ par induction d'un caractère d'un sous-groupe fermé ([20]). Toutefois, Dixmier [8] conjecturait que si G est de type I, tout élément τ de $\hat{G}$ pouvait s'obtenir comme représentation "induite holomorphe" et le démontrait si G est algébrique.

1.5 Résolvant à la fois toutes ces difficultés, Auslander et Kostant ont démontré les théorèmes suivants (cf. [1]) :

THÉORÈME 1.- G <u>est de type</u> I <u>si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées</u> :

(A) <u>Toute forme</u> $g \in \mathfrak{g}^*$ <u>est intégrable</u>.

(B) <u>Toute orbite</u> G.g <u>est localement fermée</u>.

Supposons G de type I ; formons $B(\mathfrak{g}^*) = \{p = (g,\bar{\chi})$ avec $g \in \mathfrak{g}^*$, et $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}\}$, où G opère naturellement. Auslander et Kostant donnent un procédé d'induction holomorphe associant à tout point $p = (g\,;\bar{\chi})$ et $\mathfrak{h}$ sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ vérifiant certaines conditions (Cg) qu'on définira en (2.3.1), une représentation $\underline{F}(p\,;\mathfrak{h})$ généralisant la construction de Kirillov. (L'utilisation de ces représentations induites holomorphes est un outil essentiel de la théorie). Et ils obtiennent :

THÉORÈME 2.- <u>Supposons</u> G <u>de type</u> I.

1. <u>Si</u> $\mathfrak{h}$ <u>vérifie les conditions</u> (Cg) , $\underline{F}(p\,;\mathfrak{h})$ <u>est irréductible et sa classe</u> $\underline{F}(p)$ <u>ne dépend pas de</u> $\mathfrak{h}$.

2. <u>L'application</u> $p \mapsto \underline{F}(p)$ <u>définit une bijection entre</u> $B(\mathfrak{g}^*)/G$ <u>et</u> $\hat{G}$.

[Les questions de continuité restent ouvertes.]

On se propose de donner une idée de la démonstration du théorème 1 (et du théorème 2,2). Elle est compliquée par le fait suivant :

comme G contient le sous-groupe distingué nilpotent connexe $N = [G,G]$ dont on connait bien le dual, on aurait pu espérer, en suivant la méthode des petits groupes de Mackey, que G est de type I si, quel que soit $\rho \in \hat{N}$, toute représentation factorielle du stabilisateur $G(\rho)$ de ρ dont la restriction à N est un multiple de ρ est de type I, et si l'action de G dans $\hat{N}$ est régulière ; mais cette dernière condition n'est pas réalisée pour tous les groupes G de type I (ex. [2], p. 88). Un résultat d'Auslander-Moore [2] permettra de résoudre cette difficulté.

On s'inspirera dans notre exposé, outre bien entendu des travaux d'Auslander-Kostant, des idées développées ultérieurement par Pukanszky ([15], [16]). On va construire des représentations factorielles $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$ qui ne sont toutes de type I que si (A) et (B) sont réalisées. (Notons que J. Brezin [5] avait obtenu un critère du type I très proche de celui du théorème 1.)

2. Construction des représentations factorielles $\underline{F}(p)$

On va montrer, dans ce paragraphe, que la condition (A) est nécessaire. Voici quelle sera notre démarche : G contient le sous-groupe nilpotent connexe $N = [G,G]$. Par applications successives de la méthode des "petits groupes" de Mackey, on construira des représentations factorielles de G , à partir de représentations factorielles de groupes de plus en plus "petits", la procédure conservant le type.

On sera ainsi amené à étudier le type de certains groupes nilpotents non connexes, apparaissant comme quotients des groupes $G(g)$; le plus typique, qui apparaît lorsqu'on applique la procédure qui va suivre au groupe S de Dixmier (cf. [9]) ayant comme algèbre de Lie $\mathcal{S}$ de base $T_1\ T_2\ X_1\ Y_1\ X_2\ Y_2\ Z$ avec les relations $[T_i , X_i] = -2\pi Y_i$, $[T_i , Y_i] = 2\pi X_i$, $[T_1,T_2] = Z$ (les autres crochets d'éléments de base étant nuls ou déduits de ceux-ci par antisymétrisation), est le groupe E_λ défini sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2 \times T$, où T est le tore, par la loi

$$(z,t).(z',t') = (z + z' , \beta_\lambda(z,z')tt')$$

avec $\beta_\lambda((m_1,n_1),(m_2,n_2)) = \exp(2i\pi\lambda(m_1n_2 - m_2n_1))$, où λ est un nombre réel.

Ce groupe est de type I, si et seulement si λ est rationnel.

En vue d'appliquer la méthode de Mackey, on est d'abord amené à étudier le problème de l'extension des représentations irréductibles d'un groupe nilpotent connexe.

2.1 Induction holomorphe et extension des représentations irréductibles des groupes nilpotents.

Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, f un point de $\mathfrak{n}^*$ et s un automorphisme de $\mathfrak{n}$ laissant stable f , alors s laisse stable $\rho(f)$, et il existe donc un opérateur unitaire $V(s)$ défini à un scalaire de module 1 près tel que $V(s) \circ \rho(n) \circ V(s^{-1}) = \rho(s.n)$.

Il est possible de faire un choix canonique de V (théorème 2.1.4), S'il existe $\mathfrak{h}$ vérifiant (1.1.a) stable par s , alors un candidat pour $V(s)$ est

$$(V(s)\varphi)(n) = |\det \tfrac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{h}}\, s|^{-\frac{1}{2}}\, \varphi(s^{-1}.n) \ .$$

Mais en général, s n'a pas toutes ses valeurs propres réelles et il est impossible de trouver $\mathfrak{h}$ vérifiant (1.1.a) stable par s : on est confronté à ce problème pour la construction des représentations du groupe de l'oscillateur harmonique, i.e. le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ par le groupe de Heisenberg $N_3 = \{(z,t)$, avec $z \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, avec $(z,t).(z',t') = (z+z', 2\,\mathrm{Im}\, z\bar{z}' + t + t')\}$ et où l'action de $\mathbb{R}$ dans N_3 est donnée par : $\theta.(z,t) = (e^{i\theta}z,t)$.

La réalisation de Bargmann-Segal ([3], [19]) des représentations du groupe de Heisenberg dans un espace de fonctions entières en z permet d'obtenir une solution agréable à ce problème ([20]) et on introduit des représentations dans des espaces de fonctions holomorphes ou partiellement holomorphes.

2.1.1 <u>Définition des représentations induites holomorphes</u> (voir [4], ch. V)

Soient $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. On dit que $\mathfrak{h}$ est une polarisation positive au point g si $\mathfrak{h}$ vérifie :

a) $g([x,\mathfrak{h}]) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{h}$ (ceci est la condition 1.1.a, mais $x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ et g est prolongée par linéarité).

b) $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{e}^{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

c) on a $i\,g([x,\bar{x}]) \geq 0$ quel que soit $x \in \mathfrak{h}$.

On note $P^+(g)$ l'ensemble des polarisations positives au point g . On note $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$ et D_o le sous-groupe connexe de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$; on a $g([\mathfrak{d},\mathfrak{d}]) = 0$. On se donne de plus D un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$, et un caractère unitaire χ de D dont la restriction à D_o soit e^{ig} .

On note si $X \in \mathfrak{g}$, $(X.\varphi)(u) = \frac{d}{dt}\varphi(u \exp tX)|_{t=0}$. On prolonge par linéarité à $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$.

On note $\Delta_{D,G}$ le quotient Δ_D/Δ_G des fonctions modulaires de D et G ; et si $\underline{K}(G\,;D)$ désigne l'espace des fonctions continues sur G à support compact modulo D vérifiant $\varphi(td) = \Delta_{D,G}(d)\,\varphi(t)$, on note $\oint_{G/D} \varphi\, d\dot{g}$ l'unique forme linéaire positive G-invariante sur $\underline{K}(G\,;D)$. On note $\underline{L}(g\,;D\,;\chi)$ le complété pour la norme $\|\varphi\|^2 = \oint_{G/D} |\varphi|^2\, d\dot{g}$, des fonctions continues à support compact modulo D , vérifiant $\varphi(td) = \Delta_{D,G}(d)^{\frac{1}{2}}\chi(d)^{-1}\varphi(t)$. On note $\underline{L}(g\,;\mathfrak{h}\,;D\,;\chi)$ le complété dans $\underline{L}(g\,;D\,;\chi)$ du sous-espace des fonctions C^{∞} sur G vérifiant de plus

$$X.\varphi = (-i\langle g,X\rangle + \tfrac{1}{2}(\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}/\mathfrak{e}^{\mathbf{C}}}\, X))\varphi \qquad \text{quel que soit } X \in \mathfrak{h} .$$

[Cet espace s'identifie, en gros, à un espace de Hilbert de fonctions sur $GH \subset G^{\mathbf{C}}$ où $H = \exp \mathfrak{h} \subset G^{\mathbf{C}}$ vérifiant $\varphi(th) = (e^{ig}(h))^{-1}\varphi(t)$ et partiellement holomorphes.]

On note $\underline{F}(g\,;\mathfrak{h}\,;D\,;\chi)$ la représentation de G par translation à gauche, et on dit que $\underline{F}$ est une représentation "induite holomorphe". Cette notion généralise la définition de $\rho(f\,;\mathfrak{h})$ de 1.1, et en fait, les premiers résultats sont

2.1.2 ([1]) PROPOSITION.- Soient $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, $f \in \mathfrak{n}^*$, $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ et $D = D_o$. Alors, la représentation $\underline{F}(f\,;\mathfrak{h})$ est équivalente à $\rho(f)$.

[On démontre ceci en se ramenant au cas du groupe de Heisenberg.]

2.1.3 PROPOSITION.- Soit s un automorphisme de $\mathfrak{n}$ laissant stable f ; alors il existe $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ stable par s .

Si s laisse stable f et $\mathfrak{h}$, la formule

$$(V_{\mathfrak{h}}(s)\varphi)(n) = |\det{}_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{n}}\, s|^{-\frac{1}{2}}\varphi(s^{-1}n)$$

définit un opérateur unitaire sur $\underline{L}(f\,;\mathfrak{h})$, et d'après 2.1.2 il existe un espace de Hilbert fixe $\underline{H}$, une représentation unitaire ρ de G dans $\underline{H}$, et pour tout $\mathfrak{h} \in P^+(f)$, une isométrie $U_\mathfrak{h}$ de $\underline{H}$ sur $\underline{L}(f\,;\mathfrak{h})$.

L'un des théorèmes cruciaux de la théorie est

2.1.4 THÉORÈME (Auslander-Kostant [1]).- L'opérateur $V(s) = U_\mathfrak{h}^{-1} \circ V_\mathfrak{h}(s) \circ U_\mathfrak{h}$ ne dépend pas du choix de la polarisation positive $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ stable par s .

(On peut se reporter aussi à [4], IV.4.1, IV.4.2, IV.5.1, et VIII.2, VIII.3, pour une rédaction des théorèmes énoncés dans ce paragraphe, ou à [18]. Et ce théorème est la partie essentielle de la démonstration du 1) du théorème 2.)

Si s_1 et s_2 sont deux automorphismes laissant stable f , on a $V(s_1) \circ V(s_2) = a(s_1,s_2)\ V(s_1 s_2)$ avec $a(s_1,s_2)$ scalaire qui en général est $\neq 1$, cependant on a

2.1.5 COROLLAIRE.- Soit F un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{n}$ laissant stable f , et tel que $[F,F] \subset \mathrm{Ad}\ N$, alors l'application $(\gamma,n) \mapsto V(\gamma) \circ \rho(n)$ définit une représentation $\nu(f)$ du produit semi-direct de F par N .

En effet, on montre qu'il existe $\mathfrak{h} \in P^+(f)$ stable sous tous les éléments s de F , et on a donc $V(s_1) \circ V(s_2) = V(s_1 s_2)$.

(Voir [10], pour une extension de ce résultat.)

2.2 Méthode des petits groupes

Soient G , $N = [G,G]$; $\mathfrak{n}$ l'algèbre de Lie de N et $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ la restriction des formes linéaires. G opère naturellement dans $\hat{N}$ et $\mathfrak{n}^*$, et il est clair (1.1.c) que si $f \in \mathfrak{n}^*$ le stabilisateur dans G de la représentation $\rho = \rho(f)$ est $G(f)N$.

D'après 2.1.5, on peut construire une extension canonique $\nu(f)$ de $\rho(f)$ au produit semi-direct $G(f) \times_s N$ (dont le groupe $G(f)N$ est un quotient par le groupe (s,s^{-1}) avec $s \in N(f)$).

Soit alors $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations factorielles τ de $G(f)$ dont la restriction à $N(f)$ soit un multiple du caractère χ_f de $N(f)$. Si $\tau \in X(f)$, $\tau \otimes \nu(f)$ est une représentation de $G(f) \times_s N$; elle passe au quotient et définit une représentation $\alpha(f\,;\tau)$ de $G(f)N$ et on voit facilement que toute représentation factorielle de $K = G(f)N$ dont la restriction à N est un multiple de $\rho(f)$ s'obtient ainsi.

2.2.1 Par conséquent, si $X(\rho)$ est l'ensemble des classes de représentations factorielles de G qui se restreignent à N suivant la quasi-orbite transitive $G.\rho$, on a une bijection entre $X(f)$ et $X(\rho(f))$ par

$$\tau \longmapsto \operatorname{Ind}\underset{K}{\overset{G}{\uparrow}} \alpha(f\,;\tau) = \underline{F}(f\,;\tau)$$

et le commutant de $\underline{F}$ est isomorphe à celui de τ de sorte que $\underline{F}$ est irréductible (resp. de type I) si et seulement si τ est irréductible (resp. de type I).

Etudions $X(f)$; si $Q(f) = \operatorname{Ker} \chi_f$, $Q(f)$ est un sous-groupe distingué de $G(f)$, et les représentations dans l'ensemble $X(f)$ sont des représentations de $G(f)/Q(f)$. On a $[G(f)\,,G(f)] \subset N(f)$ et $[G(f)\,,N(f)] \subset Q(f)$. Le groupe $G(f)/Q(f)$ est donc nilpotent ; si $G(f)$ était connexe, elles seraient de type I et multiples de représentations $\rho(m)$ associées à des formes linéaires.

On note $M = G(f)$, M_o la composante connexe de M , $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M ; on a $\mathfrak{m} = \{x \in \mathfrak{g}\ ;\ f([x,\mathfrak{n}]) = 0\}$ et $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n} = \mathfrak{n}(f)$. On pose $\mathfrak{q} = \operatorname{Ker} f \cap \mathfrak{n}(f)$; on a $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}(f)$, et $[\mathfrak{m}\,,\mathfrak{n}(f)] \subset \mathfrak{q}$, de sorte que $\mathfrak{m}/\mathfrak{q}$ est le produit direct d'une algèbre de Heisenberg par une algèbre de Lie abélienne. On note $\mathfrak{m}^*(f) = \{m \in \mathfrak{m}^*\ ,\ m|\mathfrak{n}(f) = f\}$, de sorte que $\mathfrak{m}^*(f) \subset (\mathfrak{m}/\mathfrak{q})^*$. Le groupe M_o/Q est un sous-groupe nilpotent connexe fermé distingué de M/Q , et on peut appliquer à cette situation la procédure précédente ; calculons, pour $m \in \mathfrak{m}^*(f)$, $M(\rho(m)) = M(m).M_o$.

Le lemme suivant est élémentaire.

2.2.2 Lemme.- Soient $m \in \mathfrak{m}^*(f)$ et $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que $g|\mathfrak{n} = f$ et $g|\mathfrak{m} = m$, alors $\exp(\mathfrak{n}(f)).g = g + (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^{\perp}$ = i.e. $\{\ell \in \mathfrak{g}^*$ tel que $\ell|\mathfrak{m}+\mathfrak{n} = g\}$ et on a $M(m) = N(f)\ G(g)$.

Avec les notations de 2.2.2, on a donc $M(\rho(m)) = G(g)M_o$.

Si $X \in \mathfrak{g}$ et $u \in G$, on a $u.X - X \in \mathfrak{n}$, et par conséquent $G(g) = \{u \in G$, tels que $g(u.X) = g(X)\}$ ou encore

2.2.3 $G(g) = \{u \in G \ ; \ f(u.X - X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}\}$ et $G(g)$ ne dépend que de la restriction f de g à $\mathfrak{n}$.

D'autre part, il est clair d'après 2.2.3 que si $u \in G(g)$, u commute à M_o modulo Q ; enfin $G(g) \cap M_o = G(g)_o$, car $G(g) \cap M_o = M_o(g)$ est connexe (voir 1.2).

2.2.4 Dans les notations de 2.2.2, on note $X(g)$ l'ensemble des représentations factorielles σ de $G(g)$ dont la restriction à $G(g)_o$ soit un multiple de χ_g et $X(m)$ l'ensemble des représentations factorielles de M qui se restreignent à M_o suivant la quasi-orbite transitive $M.\rho(m)$.

. On a $X(m) \subset X(f)$.

. Si $\sigma \in X(g)$, alors $\sigma \otimes \rho(m)$ est une représentation du groupe $G(g) \times M_o$ (produit direct) qui passe au quotient $G(g)M_o$ et on a une bijection entre $X(g)$ et $X(m)$ par

$$\sigma \longmapsto \operatorname{Ind}_{G(g)M_o}^{M} \sigma \otimes \rho(m) = \tau(m\,;\sigma) ,$$

les commutants de σ et de τ sont isomorphes.

. Enfin, si l'action de M dans $\mathfrak{m}^*(f)$ est régulière, on a

$$X(f) = \bigcup_{m \in \mathfrak{m}^*(f)/M} X(m) .$$

Il est nécessaire donc d'étudier de près $X(g)$.

Notons $Q(g)$ le noyau de χ_g , il est clair qu'on a

2.2.5 g *est intégrable* [(1.3)] *si et seulement si* $G(g)/Q(g)$ *est commutatif*.

Dans ce cas, toutes les représentations de $X(g)$ sont factorielles et multiples des caractères $\bar{\chi} \in \widehat{G(g)}$.

Si g n'est pas intégrable, on introduit le centre $\overline{G(g)/Q(g)}$ de $G(g)/Q(g)$; on appelle $\overline{G(g)}$ le stabilisateur réduit de g , et comme $[G(g)\, ,\, G(g)] \subset N(g) \subset N(f)$, on a :

2.2.6 $\overline{G(g)} = \{a \in G(g) \; ; \; \chi_f(a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}) = 1 \;\; \forall\; b \in G(g)\}$ *de sorte que* $\overline{G(g)}$ *ne dépend que de la restriction* f *de* g *à* $\mathfrak{n}$.

On notera encore $\widehat{\overline{G(g)}}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $\overline{G(g)}$ prolongeant χ_g et $\overset{\circ}{\overline{G(g)}}$ l'ensemble des caractères $\bar{\chi}$ de $\overline{G(g)}$ triviaux sur $G(g)_o$.

La proposition suivante est cruciale ([15], ch. I, 1.1, p. 465-472).

2.2.6 PROPOSITION.- *Soit* $\bar{\chi} \in \widehat{\overline{G(g)}}$; *la représentation* $\sigma(\bar{\chi}) = \mathrm{Ind}\,{}^{G(g)}_{\overline{G(g)}}\!\uparrow \bar{\chi}$ *est une représentation factorielle de* $G(g)$ *qui est de classe finie*. *Elle est de type* I *si et seulement si* $\overline{G(g)}$ *est d'indice fini dans* $G(g)$.

Donnons une idée de la démonstration de cette proposition.

On peut passer au quotient par $Q(g)$ et le seul cas non trivial est celui où $\chi_g \neq \mathrm{id}$, alors $G(g)_o/Q(g)$ est isomorphe au tore T et d'autre part, $G(g)/G(g)_o$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n = Z$; on peut choisir ([2], p. 188) une section s de $G(g)/G(g)_o$ dans $G(g)/Q(g)$ telle que $s(z)s(z') = \beta(z,z')s(z+z')$ avec β forme bilinéaire alternée sur $Z \times Z$ à valeurs dans T .

2.2.7 Le groupe $G(g)/Q(g)$ s'identifie alors au groupe Z_β des couples

(z,u) , $z \in Z$, $u \in T$, avec la loi $(z,u).(z',u') = (z+z', \beta(z,z')uu')$, et le groupe $\overline{G(g)}/Q(g)$ s'identifie au sous-groupe $\bar{Z}_\beta$ des couples (z,u) avec $\beta(z,z')^2 = \chi_g(s(z)s(z')s(z)^{-1}s(z')^{-1}) = 1$ quel que soit $z' \in Z$.

Soit Z_o le noyau de la forme bilinéaire β , Z_o peut être considéré comme un sous-groupe de Z_β ; et la restriction de $\bar{\chi}$ à Z_o est un caractère du groupe abélien Z_o ; on peut l'étendre en un caractère ψ du groupe abélien Z , et quitte à modifier la section $s(z) = (z,1)$ en $s'(z) = (z,\psi(z)^{-1})$, on peut supposer que $\bar{\chi}$ est trivial sur Z_o . Passons au quotient par Z_o ; on est ramené au cas où Z est un groupe discret dénombrable (un quotient de $\mathbb{Z}^n$) β une forme bilinéaire alternée sur $Z \times Z$ à valeurs dans T telle que $\bar{Z} = \{z \in Z$, tels que $\beta(z,z')^2 = 1 \ \forall z' \in Z\}$ soit fini. Soit $\bar{\chi}$ un caractère de $\bar{Z}_\beta$ dont la restriction à T soit le caractère $\chi_o(u) = u$; et on considère la représentation $\sigma(\bar{\chi})$ induite à Z_β par le caractère $\bar{\chi}$ de $\bar{Z}_\beta$.

Considérons σ_o la représentation induite par χ_o , on peut la réaliser dans $L^2(Z)$, et on peut calculer suffisamment explicitement l'algèbre de Von Neumann $R(\sigma_o)$ engendrée par σ_o et son commutant $R(\sigma_o)'$, pour montrer que si $\delta(o)$ est la masse de Dirac au point 0 de Z , $\Phi(T) = \langle T\delta(o), \delta(o)\rangle$ est une trace finie fidèle sur $R(\sigma_o)$ et $R(\sigma_o)'$ (si $f \in L^1(Z) \subset L^1(Z_\beta)$, on a $\Phi(\sigma_o(f)) = f(o)$) ; comme $\bar{Z}$ est fini, on peut réaliser $\sigma(\bar{\chi})$ comme sous-représentation de σ_o et on en déduit facilement la proposition.

2.2.8 Comme la représentation $\sigma(\bar{\chi})$ est un élément (particulier) de $X(g)$, pour que le groupe G soit de type I, il est donc au moins nécessaire que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, $\overline{G(g)}$ soit d'indice fini dans $G(g)$, mais si on change g en tg avec $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $G(g)$ ne change pas, et il est clair d'après 2.2.7 que $\overline{G(tg)}$ est d'indice fini dans $G(g)$ pour tout $t \neq 0$ si et seulement si $\overline{G(g)} = G(g)$.

La condition (A) est donc nécessaire.

2.3 Réalisation des représentations factorielles $\underline{F}(g,\bar{\chi})$

On considère $B(\mathfrak{g}^*) = \{p = (g,\bar{\chi})$ avec $g \in \mathfrak{g}^*$, $\bar{\chi} \in \widehat{\overline{G(g)}}\}$. On associe à $\bar{\chi}$ l'élément particulier $\sigma(\bar{\chi})$ de $X(g)$ et suivant la procédure décrite en 2.2.4 et 2.2.1, on construit la représentation factorielle suivante de $K = G(f)N$

$$\alpha(p) = \alpha(f\,;\tau(m\,;\sigma(\bar{\chi}))) = \left(\operatorname{Ind}\underset{\overline{G(g)}M_o}{\overset{G(f)}{\uparrow}} (\sigma(\bar{\chi}) \otimes \rho(m))\right) \otimes \nu(f)$$

et l'élément $\underline{F}(p) = \operatorname{Ind}\underset{K}{\overset{G}{\uparrow}} \alpha(p)$ de $X(\rho(f))$.

Le commutant de $\underline{F}$ est isomorphe à celui de $\sigma(\bar{\chi})$, $\underline{F}$ est donc de classe semi-finie, et si $\overline{G(g)} = G(g)$, $\underline{F}$ est irréductible.

Le groupe G opère naturellement dans $B(\mathfrak{g}^*)$ et on a donc $\underline{F}(p) \sim \underline{F}(p')$ si et seulement si $p' = g.p$ avec $g \in G$. On peut montrer qu'on peut réaliser la représentation $\underline{F}(p)$ comme une représentation induite holomorphe.

2.3.1 DÉFINITION.- Soient $g \in \mathfrak{g}^*$, $f = g|\mathfrak{n}$; on dit qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}^C$ vérifie les conditions Cg si $\mathfrak{h}$ est une polarisation positive au point g stable par $\overline{G(g)}$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}^C$ est une polarisation positive au point f stable par $G(f)$.

On montre [1] que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, il existe $\mathfrak{h}$ vérifiant les conditions Cg (voir aussi [4], IV, 4.2) et on montre que $\bar{D} = \overline{G(g)}\, D_o$ est fermé et que, quel que soit $\bar{\chi}_g \in \widehat{\overline{G(g)}}$, il existe un caractère $\bar{\chi}$ de $\bar{D}$ prolongeant e^{ig} sur D_o et $\bar{\chi}$ sur $\overline{G(g)}$. On considère la représentation $\underline{F}(g\,;\mathfrak{h}\,;\bar{D}\,;\bar{\chi}) = \underline{F}(g\,;\mathfrak{h}\,;\bar{\chi}_g)$ de 2.1.1, et on montre en utilisant le théorème 2.1.4 et 2.1.2

2.3.5 PROPOSITION.- Quel que soit $p = (g,\bar{\chi}_g)$ de $B(\mathfrak{g}^*)$ et $\mathfrak{h}$ vérifiant

<u>les conditions</u> Cg, <u>la représentation</u> $\underline{F}(g\,;\mathfrak{h}\,;\bar{\chi}_g)$ <u>est dans la classe de</u> $\underline{F}(p)$.

<u>Remarque</u>.- Ceci correspond clairement au 1) du théorème 2 (1.5)

3. Régularisation des mauvaises actions

Nous allons montrer que la condition (B) du théorème 1 est nécessaire. Voici quelle sera notre démarche : supposons pour simplifier que, quel que soit $g \in \mathfrak{g}^*$, le stabilisateur $G(g)$ de g soit connexe ; on peut alors associer à g la représentation factorielle $\underline{F}(g\,;\chi_g)$; si l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est irrégulière, on va grouper suivant une relation d'équivalence R , les mauvaises orbites en "paquets" $\mathcal{O}_R$, munir chaque paquet d'une mesure μ , G-invariante ergodique et on obtient suivant le procédé général dû à Effros [11] en considérant $\underline{F}(\mathcal{O}_R) = \int_{\mathcal{O}_R} \underline{F}(p)\, d\mu$ une représentation factorielle qui n'est pas de type I .

Mais il y a lieu d'étudier l'action de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$ qui est légèrement plus compliquée.

3.1 <u>Relation d'équivalence</u> R

Soit G un groupe localement compact séparable, opérant continûment dans un espace métrisable complet X . On dit que l'action de G dans X est régulière, si toute orbite G.x est localement fermée ; ceci est aussi équivalent à la condition : quelle que soit $x \in X$, si $G(x)$ désigne le stabilisateur de x , l'application $g\,G(x) \longmapsto g.x$ est un homéomorphisme de $G/G(x)$ sur G.x .

Supposons que G agisse régulièrement sur X , et considérons la relation d'équivalence $R : x \sim y$ si $\overline{G.x} = \overline{G.y}$; on voit immédiatement que, comme les orbites G.x sont ouvertes dans leur adhérence, les classes d'équivalence de cette relation coïncident avec les orbites sous G .

3.1.1 On définit la relation d'équivalence R par $x \sim y$ si $\overline{G.x} = \overline{G.y}$ quelle que soit l'action de G dans X .

On note $\mathcal{O}_R$ les classes d'équivalence ; si $\mathcal{O} = G.x$ est localement fermée, alors $\mathcal{O}_R(x) = G.x$, et plus généralement si Y est un sous-espace de X localement fermé G-invariant et si $y \in Y$, on a $\mathcal{O}_{R_Y}(y) = \mathcal{O}_{R_X}(y)$.

Problème.- Est-ce que les classes d'équivalence sont localement fermées ? Nous allons voir qu'il en est bien ainsi sous certaines conditions.

3.1.2 PROPOSITION.- Supposons qu'il existe $\tilde{G} \supset G$ un groupe localement compact séparable opérant régulièrement dans X et tel que $[\tilde{G},\tilde{G}] \subset G$. Alors

(1) Soit $\tilde{\mathcal{O}}$ une orbite suivant $\tilde{G}$, et $x \in \tilde{\mathcal{O}}$; l'adhérence dans $\tilde{G}$ de $G.\tilde{G}(x)$ est un groupe $G(\tilde{\mathcal{O}})$ qui ne dépend que de $\tilde{\mathcal{O}}$ et on a

$$G(\tilde{\mathcal{O}}).x = \tilde{G}.x \cap \overline{G.x} = \mathcal{O}_R(x) \quad \text{quel que soit} \quad x \in \tilde{\mathcal{O}} .$$

En particulier, $\mathcal{O}_R(x)$ est localement fermée.

(2) Si $x \in \tilde{\mathcal{O}}$, la topologie sur $\mathcal{O}_R(x)$ coïncide avec la topologie d'espace homogène par $G(\tilde{\mathcal{O}})$.

La démonstration est immédiate : par exemple, comme la topologie sur $\tilde{G}.x$ est la topologie d'espace homogène de $\tilde{G}/\tilde{G}(x)$, on voit que, pour tout $x \in \tilde{\mathcal{O}}$, $\tilde{G}.x \cap \overline{G.x} = G(\tilde{\mathcal{O}}).x$.

3.2 On considère $B(\mathfrak{g}^*)$ et l'action naturelle de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$, on munit $B(\mathfrak{g}^*)$ de la topologie suivante :

Une suite (g_n, χ_n) tend vers (g_o, χ_o) si g_n tend vers g_o dans $\mathfrak{g}^*$, et si pour toute suite de points $c_n \in \overline{G(g_n)}$ convergente vers $c_o \in \overline{G(g)}$, $\chi_n(c_n)$ tend vers $\chi_o(c_o)$.

Il est clair que l'application $(g,\chi) \mapsto g$ de $B(\mathfrak{g}^*)$ sur $\mathfrak{g}^*$ est continue.

On va étudier la relation d'équivalence R sur $B(\mathfrak{g}^*)$.

Soit $\tilde{G}$ le plus petit sous-groupe algébrique d'automorphismes de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathrm{Ad}\, G$; $\tilde{G}$ agit dans G , $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{n}^*$, etc..., on a $[\tilde{G},\tilde{G}] = \mathrm{Ad}[G,G]$ et $\tilde{G}$ agit régulièrement dans $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{n}^*$ d'après un résultat classique de Chevalley.

Soient $r : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{n}^*$ la restriction, $\widetilde{G}.f$ une orbite sous $\widetilde{G}$ dans $\mathfrak{n}^*$, $\underline{U} = r^{-1}(\widetilde{G}.f)$ et $B(\underline{U}) = \{(g,\bar{\chi})$ avec $g \in \underline{U}\}$, $\underline{U}$ étant localement fermée, $B(\underline{U})$ est localement fermée dans $B(\mathfrak{g}^*)$ et il suffit d'étudier la relation d'équivalence R sur chaque $B(\underline{U})$.

Montrons que les groupes $\overset{\diamond}{G(g)}$, lorsque g varie dans $\underline{U}$, peuvent être identifiés à un groupe constant ; en effet, lorsque g varie dans $\underline{U}$, on voit (2.2.3) que les groupes $\widetilde{H} = \widetilde{G}(g)\mathrm{Ad}\,N$, $H = G(g)N$, $\bar{H} = \overline{G(g)}N$ et $H_0 = G(g)_0N$ restent constants ; et comme par exemple $H = \{u \in G\ ;\ u.g \in N.g\}$ et $N.g$ est fermée simplement connexe (1.2), on voit que H, $\bar{H}$, H_0 sont des sous-groupes fermés de G, que la composante connexe de H est H_0 et que $\widetilde{H}$ est fermé dans $\widetilde{G}$.

On note $\overset{\diamond}{H}$ l'ensemble des caractères de $\bar{H}$ triviaux sur H_0, on voit alors que

3.2.1 Quel que soit $g \in \underline{U}$, le groupe $G(g)/G(g)_0$ est isomorphe à H/H_0 ; et l'opération de restriction définit un isomorphisme entre $\overset{\diamond}{H}$ et $\overset{\diamond}{\overline{G(g)}}$.

Si m est le rang du groupe abélien libre $\bar{H}/H_0$, on a donc $\overset{\diamond}{H}$ isomorphe à T^m.

Si $\chi \in \overset{\diamond}{H}$ et $\bar{\chi}_g \in \widehat{\overline{G(g)}}$, on note $\chi\bar{\chi}_g$ le caractère de $\overline{G(g)}$ défini par $(\chi\bar{\chi}_g)(u) = \chi(u)\bar{\chi}_g(u)$, $\overset{\diamond}{H}$ agit sur $B(\underline{U})$ par $\chi.(g,\bar{\chi}_g) = (g,\chi\bar{\chi}_g)$.

D'autre part, soit $\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*\ ;\ \lambda([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]) = 0\}$, si $\lambda \in \Lambda$, on pose $\lambda.(g,\chi) = (g + \lambda, e^{i\lambda}\,\bar{\chi}_g)$.

D'autre part, $\widetilde{G}$ opère aussi naturellement sur $B(\underline{U})$ et on voit que les opérations de $\widetilde{G}$, $\overset{\diamond}{H}$, Λ sur $B(\underline{U})$ commutent et sont continues.

3.2.2 Il est clair que $B(\underline{U})$ est homogène sous $\widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H} \times \Lambda$; $B(\underline{U})$ étant localement fermée, $B(\underline{U})$ est donc munie de la topologie d'espace homogène par $\widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H} \times \Lambda$.

Soient $g \in \underline{U}$ et $\widetilde{\mathcal{O}}$ l'orbite (localement fermée) de g sous $\widetilde{G}$; alors $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ est localement fermée et homogène par $\widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H}$; de plus

$$[\widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H}, \widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H}] = \mathrm{Ad}[G, G] \times \{1\} .$$

On peut alors appliquer la proposition 3.1.2 avec le groupe $\widetilde{G} \times \overset{\diamond}{H}$ à la place de $\widetilde{G}$ (l'action de G dans $B(\mathfrak{g}^*)$ se factorise à travers Ad G) pour conclure :

3.2.3 <u>Soit</u> $p = (g, \bar{\chi}_g)$ <u>un point de</u> $B(\mathfrak{g}^*)$ <u>et</u> $\widetilde{\mathcal{O}} = \widetilde{G}.g$; <u>alors</u>

$$\mathcal{O}_R(p) = \underline{\text{adhérence de}}\ G.p\ \underline{\text{dans}}\ B(\widetilde{\mathcal{O}}) .$$

3.2.4 En fait, $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ est difféomorphe à $\widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\diamond}{H}$; pour montrer cela il suffit de construire une section continue de $\widetilde{\mathcal{O}}$ dans $B(\widetilde{\mathcal{O}})$:

Soit $p_o = (g_o, \bar{\chi}_o) \in B(\widetilde{\mathcal{O}})$; si $t \in \widetilde{G}$ stabilise g_o, en général t ne stabilise pas $\bar{\chi}_o$. On pose alors $w(t) = (t.\bar{\chi}_o)\bar{\chi}_o^{-1}$ i.e. $(w(t))(u) = \chi_{g_o}((t^{-1}.u)u^{-1})$; il est clair que $w(t) \in \overset{\diamond}{H}$ et que w est un homomorphisme de $\widetilde{G}(g_o)$ dans $\overset{\diamond}{H}$; par définition même de $\overline{G(g_o)}$, $w(t)$ est trivial si $t \in \mathrm{Ad}\ G(g_o)$, en particulier si $t \in \widetilde{G}(g_o) \cap [\widetilde{G}, \widetilde{G}]$, et w peut s'étendre en un homomorphisme du sous-groupe fermé $\widetilde{H} = \widetilde{G}(g_o)[\widetilde{G}, \widetilde{G}]$ de $\widetilde{G}$ trivial sur Ad H dans $\overset{\diamond}{H}$ (isomorphe à T^m) et donc finalement w s'étend en un homomorphisme (dépendant de $\widetilde{\mathcal{O}}$) de $\widetilde{G}$ dans $\overset{\diamond}{H}$: si l'on pose $s(t.g_o) = (t.g_o, w(t)^{-1}\ t.\bar{\chi}_o)$, on obtient alors une section continue de $\widetilde{\mathcal{O}}$ dans $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ et dans l'identification de $B(\widetilde{\mathcal{O}})$ avec $\widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\diamond}{H}$ l'action de $\widetilde{G}$ devient $u.(g,\alpha) = (u.g, w(u)\alpha)$ et on a si p correspond à $(g,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\diamond}{H}$ $(g \in \widetilde{\mathcal{O}}, \alpha \in \overset{\diamond}{H})$,

$$\mathcal{O}_R(p) = \text{adhérence de } \{(u.g, w(u)\alpha) ; u \in G\} \text{ dans } \widetilde{\mathcal{O}} \times \overset{\diamond}{H}$$

3.2.5 <u>Soit</u> K <u>un sous-groupe fermé de</u> G <u>contenant</u> [G,G] . <u>Alors l'action de</u> K <u>dans</u> $B(\underline{U})$ <u>régulière si et seulement si l'action de</u> K <u>dans</u> U <u>est régulière</u>.

En effet, on peut appliquer la proposition (3.1) au groupe $\mathrm{Ad}\,K \subset \widetilde{G} \times \hat{H}$, et $\mathcal{O}_{R,K}(p) = \{\text{adh. des } (k.g, w(k)\alpha), k \in K\}$ dans $\widetilde{\mathcal{O}} \times \hat{H}$. Comme $\hat{H}$ est compact, si $p = (g,\alpha) \in \widetilde{\mathcal{O}} \times \hat{H}$, $g \in \underline{U}$, la projection de $\mathcal{O}_{R,K}(p)$ sur $\widetilde{\mathcal{O}}$ est $\widetilde{\mathcal{O}} \cap \overline{K.g} = \mathcal{O}_{R,K}(g)$. Donc si l'action de K dans $B(\underline{U})$ est régulière, celle de K dans $\underline{U}$ l'est. Réciproquement, soit $g \in \underline{U}$ et $O = K.g$ une orbite munie de la topologie de $K/K(g)$; si $p = (g,\chi)$, comme w est trivial sur $G(g)N$, on a $K(p) = K(g)$, et si donc $u_n.p \longmapsto p$, on a $u_n.g \longmapsto g$, de sorte que $u_n \to 1 \mod K(p) = K(g)$.

3.3 Mesure ergodique sur $\mathcal{O}_R(p)$

PROPOSITION (Pukanszky [15], p. 545).- Il existe une unique mesure de Radon positive G-invariante sur $\mathcal{O}_R(p)$.

Soit $p = (g,\chi) \in B(\mathfrak{g}^*)$ et $g \in \widetilde{\mathcal{O}}$; on peut voir aussi que $\widetilde{G}$ agit régulièrement dans $B(\mathfrak{g}^*)$:

Donc si $B(p)$ = adhérence de $\mathrm{Ad}\,G.\widetilde{G}(p)$ dans $\widetilde{G}$, $\mathcal{O}_R(p)$ est, d'après 3.1.2, homogène sous $B(p)$ et sa topologie est celle de $B(p)/\widetilde{G}(p)$, (on a $\widetilde{G}(p) = \widetilde{G}(g) \cap \ker w \supset \mathrm{Ad}\,G(g)$). Pour l'existence, il suffit donc de montrer que $B(p)/\widetilde{G}(p)$ a une mesure $B(p)$-invariante, ce qu'on prouve facilement.

3.4 Représentation factorielle $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$

Soit $p_o = (g_o, \bar{\chi}_{g_o}) \in B(\widetilde{\mathcal{O}})$; il existe $\mathfrak{h}_o$ sous-algèbre de $\mathfrak{g}^C$, polarisation positive au point g_o, vérifiant les conditions Cg_o et stable sous $\widetilde{G}(g_o)$; alors si $g = t.g_o$, on pose $\mathfrak{h}_g = t.\mathfrak{h}_o$ qui ne dépend que de g. On peut former la représentation concrète $\underline{F}(g ; \bar{\chi}_g ; \mathfrak{h}_g)$ dans $\underline{L}(g ; \bar{\chi}_g ; \mathfrak{h}_g) = \underline{L}(p ; \mathfrak{h}_g)$. On peut définir alors sur le champ d'espaces de Hilbert

$\underline{L}(p) = \underline{L}(p\,;\mathfrak{h}_g)$ pour $p \in \mathcal{O}_R$, muni de μ , une structure de champ mesurable, et former $\underline{F}(\mathcal{O}_R) = \int_{\mathcal{O}_R} \underline{F}(p)\, d\mu(p)$.

On démontre alors ([15], p. 549-551).

THÉORÈME (Pukanszky).- <u>La représentation</u> $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$ <u>est factorielle</u>. <u>Elle est de type</u> I <u>si et seulement si</u> $\mathcal{O}_R(p)$ <u>est une</u> G-<u>orbite et si</u> $\underline{F}(p)$ <u>est de type</u> I (i.e. <u>si</u> $\overline{G(g)}$ <u>est d'indice fini dans</u> $G(g)$).

Et ceci termine donc la démonstration de la nécessité de la condition (B) (lemme 3.2.5 appliqué à G).

4. Suffisance des conditions

Nous supposerons donc maintenant que l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$ est régulière et que toute orbite g est intégrable.

Nous allons reprendre la procédure de 2. Tout d'abord, avec les notations de 2.2

4.1 <u>Si l'action de</u> G <u>dans</u> $\mathfrak{g}^*$ <u>est régulière</u>, <u>alors quel que soit</u> $f \in \mathfrak{n}^*$, <u>l'action de</u> M <u>sur</u> $\mathfrak{m}^*(f)$ <u>est régulière</u>.

En effet, soit $\mathfrak{t}$ un supplémentaire de $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$, cela définit une injection $\mathfrak{m}^*(f) \subset (\mathfrak{m} + \mathfrak{n})^* \subset \mathfrak{g}^*$ et on a avec les notations de 2.2.2 $M.m = (G.g) \cap \mathfrak{m}^*(f)$.

Si, de plus, l'action de G dans $\mathfrak{n}^*$ était régulière, on aurait terminé, d'après (2.2) et $X(g)$ se composant des multiples des caractères $\bar{\chi}$ dans $\widehat{G(g)}$, on obtiendrait aussi le 2) du théorème 2. Mais il n'est pas ainsi en général.

Cependant, nous allons montrer, grâce à un théorème de C.C. Moore, que si les conditions (A) et (B) sont satisfaites, alors toute représentation factorielle de G se restreint à N suivant une quasi-orbite transitive $G.\rho(f)$; et la suffisance des conditions (A) et (B) sera claire, ainsi que le 2) du théorème 2.

Soit $C(\mu)$ une quasi-orbite pour l'action de G dans $\hat{N}$. Il existe alors $f \in \mathfrak{n}^*$, telle que le support de $C(\mu)$ soit contenu dans $\tilde{G}.\rho(f)$, et lorsque λ parcourt $\tilde{G}.f$, le stabilisateur $K = G(\lambda)N$ de la représentation $\rho(\lambda)$ ne varie pas.

On note comme en 3.2 $\underline{U} = r^{-1}(\tilde{G}.f)$ et $\hat{K}_{\underline{U}} = \{\pi$ classes de représentations irréductibles de K dont la restriction à N soit un multiple de $\rho(\lambda)$, pour un $\lambda \in \tilde{G}.f\}$.

Alors, d'après 2.2 (et 4.1), on voit que l'application $p \mapsto \alpha(p)$ (définie en 2.3) définit un isomorphisme de $B(\underline{U})/K$ sur $\hat{K}_{\underline{U}}$.

En utilisant le fait que $B(\underline{U})$ est homogène sous $\tilde{G} \times \overset{+}{H} \times \Lambda$, il est facile de montrer que cette application est continue, et d'autre part on a

4.2 <u>Si l'action de</u> G <u>dans</u> $\mathfrak{g}^*$ <u>est régulière</u>, <u>l'action de</u> K <u>dans</u> $B(\underline{U})$ <u>est régulière</u>.

En effet, d'après 3.2.5, il suffit de démontrer que l'action de K dans $\underline{U}$ l'est ; mais si $g \in \underline{U}$, on a $K.g = r^{-1}(N.f) \cap G.g$.

D'autre part, d'après ([2], p. 81), on sait que $\hat{K}_{\underline{U}}$ est standard, il s'ensuit que les structures boréliennes de $B(\underline{U})/K$ et $\hat{K}_{\underline{U}}$ sont isomorphes, et comme G opère régulièrement dans $\mathfrak{g}^*$ et donc dans $B(\underline{U})$, il s'ensuit que toute quasi-orbite dans $\hat{K}_{\underline{U}}$ est transitive.

Soit λ une représentation factorielle de G se restreignant à N suivant une quasi-orbite $C(\mu) \subset \tilde{G}.\rho(f)$; alors d'après le théorème 3 (ch. II de [2]) , λ se restreint à K suivant une quasi-orbite $C(\nu)$ contenue dans $\hat{K}_{\underline{U}}$ au-dessus de $C(\mu)$; $C(\nu)$ étant transitive, il s'ensuit que $C(\mu)$ l'est ; on termine ainsi la démonstration du théorème 1 et évidemment ainsi du théorème 2,2).

5. Quelques compléments

Si G est un groupe résoluble simplement connexe quelconque (non nécessairement de type I), Pukanszky [16] a démontré que l'application qui à la représentation factorielle $\underline{F}(\mathcal{O}_R)$ associe son noyau dans la C^*-algèbre de G est une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence $\mathcal{O}_R$ sur $\mathrm{Prim}(C^*(G))$. Il démontre [15] aussi que ces représentations factorielles permettent d'écrire une décomposition centrale de la représentation régulière de G . Enfin [17], il vient de montrer que ce sont "les" représentations factorielles normales de G (à quasi-équivalence près) : On dit qu'une représentation factorielle T est normale, si, $R(T)$ désignant l'algèbre de Von Neumann engendrée par T , il existe une trace Φ normale fidèle semi-finie sur $R(T)$ et telle qu'il existe un $v \in C^*(G)^+$, avec $0 < \Phi(T(v)) < +\infty$, qu'on appelle alors caractère de la représentation T . (Pour les caractères des groupes de type I, voir M. Duflo [4], chap. 9.)

Ces représentations sont donc particulièrement intéressantes du point de vue de l'analyse harmonique de G : et il montre d'ailleurs que, quel que soit le groupe de Lie connexe, l'application qui à une représentation factorielle normale T fait correspondre son noyau dans la C^*-algèbre du groupe, est une bijection de l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales et l'ensemble des idéaux primitifs.

Enfin, on peut se reporter aux exposés de C. C. Moore [13] pour un historique et un résumé de l'ensemble des résultats de la théorie des représentations des groupes résolubles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. AUSLANDER - B. KOSTANT - Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math., vol. 14 (1971), p. 255-354.

[2] L. AUSLANDER - C. C. MOORE - Unitary representations of solvable Lie groups, Memoirs of the A.M.S., n° 62, 1966.

[3] V. BARGMANN - On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform I, Comm. on Pure and Applied Maths., vol. 14 (1961), p. 187-214.

[4] P. BERNAT et co-auteurs - Représentations des groupes de Lie Résolubles, Dunod, Paris, 1972.

[5] J. BREZIN - Unitary representations theory for solvable Lie groups, Memoirs of the A.M.S., n° 79, 1968.

[7] I. BROWN - Dual topology of a Nilpotent Lie group, Annales Scient. de l' E.N.S., 6 (1973), p.

[8] J. DIXMIER - Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques, Bull. Soc. Math. de France, vol. 94 (1966), p. 181-206.

[9] J. DIXMIER - Sur le revêtement universel d'un groupe de Lie de type I, C.R. Acad. Sc., Paris, vol. 252 (1961), p. 2805-2806.

[10] M. DUFLO - Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, Annales Scient. de l'E.N.S., 5 (1972), p. 71-120.

[11] E. EFFROS - Transformation groups and C^*-algebras, Annals of Math., 81 (1965), p. 38-55.

[12] A.A. KIRILLOV - Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk, 17 (1962), p. 57-110.

[13] C. C. MOORE - Representations of solvable and nilpotent groups, Proc. of the Williamstown conference on harmonic analysis, 1972.

[14] L. PUKANSZKY - On unitary representations of exponential groups, Journ. of Functional Analysis, vol. 3 (1969), p. 73-113.

[15] L. PUKANSZKY - Unitary representations of solvable Lie groups, Annales Scient. de l'E.N.S., 4 (1971), p. 464-608.

[16] L. PUKANSZKY - The primitive Ideal space of solvable Lie groups, Invent. Math., 22 (1973), p. 74-118.

[17] L. PUKANSZKY - Characters of connected Lie groups, preprint, (to appear) Bull. A.M.S.

[18] S. QUINT - Representations of solvable Lie groups, Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, 1972.

[19] I. SEGAL - Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field, Illinois J. of Math., 6 (1962), p. 500-523.

[20] R.F. STREATER - The representations of the oscillator group, Comm. in Mathematical Physics, vol. 4 (1967), p. 217-236.