JEAN-LOUIS VERDIER

Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ-adique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 423, p. 98-115

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__98_0>

INDÉPENDANCE PAR RAPPORT À ℓ DES POLYNÔMES CARACTÉRISTIQUES DES ENDOMORPHISMES DE FROBENIUS DE LA COHOMOLOGIE ℓ-ADIQUE

[d'après P. DELIGNE]

par Jean-Louis VERDIER

1. Résultat

Soient X une variété algébrique propre sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et $\bar{X}$ la variété sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ déduite de X par extension des scalaires. On dispose, pour tout nombre premier ℓ premier à q, d'une théorie cohomologique $H^{\cdot}(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ à valeurs dans les $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels [13]. Le $\bar{\mathbb{F}}_q$-endomorphisme de Frobenius $F_q : \bar{X} \to \bar{X}$ agit sur les espaces de dimension finie $H^r(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$. Les polynômes caractéristiques, en la variable t, de ces actions sont notés

1.1 $$\det(1 - tF_q \,; H^r_\ell(\bar{X})) .$$

Ces polynômes sont à coefficients entiers ℓ-adiques et les racines de ces polynômes dans une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ sont des unités car ce sont des polynômes caractéristiques d'automorphismes de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$.

Lorsque X est propre et lisse, on a une égalité de séries formelles en la variable t à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$:

1.2 $$\zeta(X,t) = \prod_r \det(1 - tF_q \,; H^r_\ell(\bar{X}))^{(-1)^{r+1}}$$

avec

$$\zeta(X,t) = \prod_x (1 - t^{\deg(x)})^{(-1)}$$

où x décrit les points fermés du schéma X [7]. Ces séries formelles sont donc à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

ON conjecture généralement que [19]

W 1) Les polynômes $\det(1 - tF_q\, ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et sont indépendants de ℓ.

W 2) Les racines dans $\mathbb{C}$ de $\det(1 - tF_q\, ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont de module $q^{-r/2}$.

THÉORÈME A (P. Deligne).- <u>Soit</u> X <u>une variété projective et lisse sur un corps fini</u> $\mathbb{F}_q$ <u>de caractéristique</u> $\neq 2$, <u>qui se remonte avec sa polarisation en caractéristique</u> 0. <u>Alors les polynômes</u> $\det(1 - tF_q\, ; H^r_\ell(\bar{X}))$ <u>sont à coefficients entiers et indépendants de</u> ℓ.

On dit que X propre sur $\mathbb{F}_q$ se remonte en caractéristique 0 s'il existe un anneau de valuation discrète A d'inégale caractéristique et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, et un schéma propre et plat Z sur $\operatorname{spec} A$ dont la fibre au-dessus du point fermé soit isomorphe à X. Si X est lisse, Z est lisse sur $\operatorname{spec} A$, On dit que X projective se remonte avec sa polarisation, si on peut trouver un schéma Z, comme ci-dessus, projectif sur $\operatorname{spec} A$ qui induise sur X un multiple du plongement projectif donné.

2. <u>Géométrie des pinceaux</u>

Soient k un corps, $X \xhookrightarrow{i} P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de l'espace projectif sur k de dimension N. L'ensemble des hyperplans de P^N est paramétré par un espace projectif $\check{P}^N$. Pour $s \in \check{P}^N$, on pose $Y_s = X \cap s$. Le lieu $\check{X} = \{s \in \check{P}^N \mid Y_s$ est singulier$\}$ est appelé la variété duale de X. Un <u>pinceau de sections hyperplanes</u> de X, ou simplement un pinceau, consiste en la donnée d'une droite projective $P^1 \subset \check{P}^N$, i.e. d'un point fermé de la grassmanienne $Gr(1,\check{P}^N)$, tel que $S = P^1 \cap \check{X}$ soit fini et tel que, pour tout $s \in S$, Y_s ne possède qu'un seul point singulier. Un <u>pinceau d'hypersurfaces</u> de degré d est un pinceau de sections hyperplanes du d-ième multiple du plongement i . L'axe d'un pinceau d'hyperplan est l'intersection commune des hyperplans du pinceau. On dit qu'un <u>pinceau</u> est <u>de Lefschetz</u> si pour les valeurs exceptionnelles $s \in S$ du paramètre, le point singulier de Y_s est un point singulier quadratique ordinaire [4] et si l'axe du pinceau est transverse à X . Le <u>plongement</u> $i : X \hookrightarrow P^N$ est dit <u>de Lefschetz</u> s'il existe un pinceau de Lefschetz de sections hyperplanes.

PROPOSITION 2.1.- a) <u>Le carré du plongement</u> i <u>est de Lefschetz</u>.

b) <u>L'ensemble des pinceaux de Lefschetz est ouvert dans l'ensemble des points fermés de</u> $Gr(1,\check{P}^N)$.

c) <u>Soient</u> Y_o <u>une section hyperplane lisse de</u> X <u>et</u> $Gr(1,\check{P}^N)_{Y_o}$ <u>la sous-variété des droites de</u> $\check{P}^N$ <u>passant par</u> Y_o . <u>L'ensemble des pinceaux de Lefschetz est ouvert dans l'ensemble des points fermés de</u> $Gr(1,\check{P}^N)_{Y_o}$, <u>ouvert dense si</u> $X \xhookrightarrow{i} P^N$ <u>est un plongement de Lefschetz</u>.

d) <u>Si le plongement</u> $i : X \hookrightarrow P$ <u>est de Lefschetz, un point fermé de</u> $Gr(1,\check{P}^N)$ <u>est un pinceau de Lefschetz si et seulement s'il est en position générale par rapport à</u> $\check{X}$.

Voir [8] pour la démonstration.

3. Cohomologie des sections hyperplanes

3.1. <u>Le théorème de Lefschetz facile</u>. Soient k un corps algébriquement clos, $X \xhookrightarrow{i} P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de dimension $n+1$ de l'espace projectif à N dimensions sur k et Y une section hyperplane lisse de X . Alors pour tout nombre premier ℓ premier à la caractéristique de k , l'homomorphisme de restriction

$$H^r(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^r(Y,\mathbb{Q}_\ell)$$

est bijectif pour $i < n$ et injectif pour $i = n$.

(Voir [9] et [16] pour le cas de la cohomologie ℓ-adique et [2] pour le cas de la cohomologie transcendante (cohomologie "ordinaire").)

3.2. Le théorème de Lefschetz difficile. Soit X une variété projective purement de dimension $n+1$ sur un corps algébriquement clos k. Soient $u \in H^2(X,\mathbb{Q}_\ell[1])$, ℓ premier à $\mathrm{car}(k)$, la classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_X(1)$ et $L : H^\cdot(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^{\cdot+2}(X,\mathbb{Q}_\ell[1])$ la multiplication par u . On note (LV) la propriété :

(LV) Pour tout r tel que $0 \leq r \leq n$, l'application

$$L^{n-r+1} : H^r(X,\mathbb{Q}_\ell) \to H^{2n+2-r}(X,\mathbb{Q}_\ell[n-r+1]) ,$$

est bijective.

Lorsque $k = \mathbb{C}$ et lorsque X est lisse, la cohomologie ordinaire à coefficient dans $\mathbb{Q}$ possède la propriété (LV) (cf. [18] pour une démonstration utilisant la théorie des variétés kählériennes). On en déduit par le théorème de comparaison [13] que la propriété (LV) est satisfaite lorsque X est lisse et k de caractéristique zéro et par le théorème de spécialisation [13] que la propriété (LV) est satisfaite si X est lisse et se remonte avec sa polarisation en caractéristique zéro.

Soit maintenant X une variété projective de dimension $n+1$ lisse et connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, qui se remonte en caractéristique zéro. Alors $\bar{X}$ possède la propriété (LV) . On en déduit les équations fonctionnelles pour $0 \leq r \leq n$:

3.2.1. $$\det(1 - tF_q\, ; H_\ell^{2n+2-r}(\bar{X})) = \det(1 - q^{n+1-r}tF_q\, ; H_\ell^r(\bar{X})) .$$

4. La cohomologie évanescente

Soient $\bar{k}$ un corps algébriquement clos, $\bar{X} \overset{i}{\hookrightarrow} P^N$ une sous-variété fermée de dimension $n+1$, lisse et connexe de l'espace projectif sur $\bar{k}$, qui se remonte en caractéristique zéro, $\bar{Y}$ une section hyperplane lisse. Le cup-produit

$$H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) \times H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^{2n}(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)$$

induit sur $\mathrm{Im}(H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell))$ une forme bilinéaire non dégénérée (la démonstration de cette propriété utilise (LV) pour X et pour Y [9]). On a donc une décomposition orthogonale

4.0 $$H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Im}(H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)) \oplus E^n_\ell \ .$$

Le sous-espace $E^n_\ell \hookrightarrow H^n(\bar{Y},\mathbb{Q}_\ell)$ est appelé l'espace de la <u>cohomologie évanescente</u>.

Soient maintenant X une sous-variété fermée de dimension $n+1$ lisse et connexe de l'espace projectif P^N sur un corps k, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. Soient $(Y_s)_{s \in P^1}$ un pinceau rationnel sur k, S l'ensemble des valeurs exceptionnelles du pinceau. Pour tout point géométrique $\bar{s}$ de $P_1 - S$ (à valeur dans $\bar{k}$) $Y_{\bar{s}}$ est une section lisse de $\bar{X}$ et $\bar{s} \longmapsto H^n(Y_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est un système local au sens étale sur $P^1 - S$. Si $\bar{s}_o$ est un point géométrique fixe de $P^1 - S$, ce système local est décrit par une action de $\hat{\Pi}_1(P_1 - S, \bar{s}_o)$ sur $H^n(Y_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell)$ appelée action de <u>monodromie globale</u>.

On a une suite exacte :

4.1 $$0 \rightarrow \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_o) \rightarrow \hat{\Pi}_1(P_1 - S, \bar{s}_o) \rightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow 0 \ ,$$

où $\hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}})$ est le $\hat{\Pi}_1$ <u>géométrique</u>, obtenu après extension des scalaires à $\bar{k}$. La restriction de la monodromie globale au $\hat{\Pi}_1$ géométrique est appelée <u>monodromie globale géométrique</u>.

Le système local $\bar{s} \longmapsto H^n(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$ s'identifie à un sous-système local de $\bar{s} \longmapsto H^n(Y_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell)$ (3.1) et l'action de $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$ sur $H^n(X_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell)$ se factorise par $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et s'identifie alors à l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $H^n(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell)$.

Lorsque X se remonte en caractéristique zéro, la décomposition $H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Im}(H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell) \to H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell)) \oplus E^n_\ell$ est préservée par l'action de la monodromie.

PROPOSITION 4.2.- <u>Si</u> $\mathrm{car}(k) \neq 2$, <u>si</u> X <u>se remonte en caractéristique zéro et si</u> $(Y_s)_{s \in P^1}$ <u>est un pinceau de Lefschetz,</u> $H^n(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ <u>s'identifie aux points fixes de</u> $H^n(Y_{\bar{s}_o}, \mathbb{Q}_\ell)$ <u>sous l'action de la monodromie géométrique.</u>

Voir [9] pour la démonstration.

Etudions l'action de la monodromie sur la cohomologie évanescente. Notons $\mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$ (resp. $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$) le groupe des similitudes (resp. des automorphismes) de la forme bilinéaire sur E^n_ℓ induite par le cup-produit. Ce sont aussi les points rationnels sur $\mathbb{Q}_\ell$ de groupes algébriques définis sur $\mathbb{Q}_\ell$ et notés $\mathrm{Sim}(E^n_\ell)$ et $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)$. On a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n) \to \mathrm{Sim}(E^n) \to G_m \to 0 ,$$

donnant lieu à une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) \to \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) \to \mathbb{Q}^*_\ell .$$

Notons $\chi : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \mathbb{Q}^*_\ell$ le caractère décrivant l'opération de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $\mathbb{Q}_\ell[1]$. La monodromie induit sur E^n_ℓ des similitudes et on a un diagramme commutatif à lignes exactes :

4.3
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{k}} - S_{\bar{k}}, \bar{s}_o) & \to & \hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o) & \to & \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \bar{\rho} & & \downarrow \rho & & \downarrow \chi^{-n} & & \\
0 & \to & \mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) & \to & \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell) & \to & \mathbb{Q}^*_\ell & &
\end{array}$$

où ρ (resp. $\bar{\rho}$) est la représentation de monodromie (resp. géométrique).

THÉORÈME B.- <u>On suppose que</u> $\mathrm{car}(k) \neq 2$ <u>et que</u> X <u>se remonte en caractéristique zéro avec sa polarisation. Il existe un entier</u> $d_o > 0$, <u>tel que, pour tout nombre premier</u> ℓ <u>premier à</u> $\mathrm{car}(k)$, <u>tout entier</u> $d \geq d_o$ <u>et tout pinceau de Lefschetz d'hypersurface de degré</u> d , <u>l'image de</u> $\bar{\rho}$ (4.3) <u>soit dense pour la topologie de Zariski dans</u> $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)$.

Pour n impair, on peut prendre $d_o = 1$ et le théorème B dans ce cas est dû à Kajdan et Margoulis. Pour n pair, le théorème B est dû à P. Deligne. La démonstration de ce théorème est indiquée au n° 6.

5. <u>Théorème</u> B ⇒ <u>Théorème</u> A

5.1. Soit $i : X \hookrightarrow P^N$ une sous-variété fermée lisse et connexe de dimension $n+1$ d'un espace projectif sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$, qui se remonte en caractéristique zéro. Quitte à remplacer i par un multiple convenable, on peut supposer que i est un plongement de Lefschetz (2.1) et que l'entier d_o du théorème B est égal à 1 . On se propose de démontrer le théorème A pour X et pour cela on raisonne par récurrence sur la dimension de X , l'assertion étant triviale lorsque cette dimension est nulle.

5.2. <u>On se ramène tout d'abord au cas où</u> $i : X \hookrightarrow P^N$ <u>possède un pinceau de Lefschetz rationnel sur</u> $\mathbb{F}_q$ <u>ayant une section lisse rationnelle sur</u> $\mathbb{F}_q$. En effet, il existe un entier m_o tel que pour tout $m \geq m_o$, il existe un pinceau de Lefschetz rationnel sur $\mathbb{F}_{q^m}$ ayant une section lisse rationnelle sur $\mathbb{F}_{q^m}$ (2.1). Si on sait démontrer le théorème A sous cette hypothèse supplémentaire, on en déduit que pour tout $m \geq m_o$ et tout r , les polynômes $\det(1 - tF^m_q ; H^r_\ell(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers et indépendants de ℓ . Il en résulte facilement le théorème A pour X .

5.3. Soit donc $(Y_s)_{s \in P^1}$ un pinceau de Lefschetz rationnel sur $\mathbb{F}_q$, $s_o \in P^1 - S$,

$\deg(s_o) = 1$, et $\bar{s}_o$ un point géométrique au-dessus de s_o à valeurs dans $\mathbb{F}_q$. D'après le théorème de Lefschetz facile (3.1), on a des isomorphismes, compatibles avec l'action du Frobenius

$$H^r(\bar{X},\mathbb{Q}_\ell) \simeq H^r(Y_{\bar{s}_o},\mathbb{Q}_\ell) \qquad r < n .$$

Utilisant alors 3.2.1, on voit que l'hypothèse de récurrence entraîne que les polynômes $\det(1 - tF_q ; H^r(\bar{X}))$ sont à coefficients entiers indépendants de ℓ pour $r \neq n , n+1 , n+2$.

5.4. <u>Il suffit alors de montrer que les polynômes</u> $\det(1 - tF_q ; H^n_\ell(\bar{X}))$ <u>sont à coefficients entiers et indépendants de</u> ℓ . En effet, en vertu de 3.2.1, on en déduit que $\det(1 - tF_q ; H^{n+2}_\ell(\bar{X}))$ est à coefficients entiers et ne dépend pas de ℓ et en utilisant la fonction $\zeta(X,t)$ (1.2) on en déduit que $\det(1 - tF_q ; H^{n+1}_\ell(\bar{X}))$ est à coefficients entiers et indépendants de ℓ .

5.5. Pour tout $s \in P^1 - S$, on a une section lisse Y_s définie sur le corps résiduel $\kappa(s)$ de $X_s = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa(s)$. Notons F_s la substitution de Frobenius relative à $\kappa(s)$. La décomposition 4.0 fournit la relation

5.5.1. $$\det(1 - tF_s ; H^n_\ell(\bar{Y}_s)) = \det(1 - tF_q^{\deg(s)} ; H^n_\ell(\bar{X}))\det(1 - tF_s ; E^n_{\ell,s}) .$$

Le deuxième facteur du deuxième membre peut encore s'interpréter ainsi :

Pour tout $s \in P^1 - S$, on a un homomorphisme $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\kappa(s)) \to \hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o)$ défini à conjugaison près. L'image de F_s par cet homomorphisme est encore notée F_s . Elle est définie à conjugaison près dans $\hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o)$. On a de plus la représentation de monodromie $\rho : \hat{\Pi}_1(P^1 - S , \bar{s}_o) \to \mathrm{Sim}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$ et on a

$$\det(1 - tF_s ; E^n_{\ell,s}) = \det(1 - t\rho(F_s) ; E^n_\ell) .$$

PROPOSITION 5.6.- <u>Soient</u> $P(t) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$ <u>et</u> $Q(t) = \prod_j (1 - \beta_j t)$ <u>deux polynômes tels que les</u> α_i <u>et les</u> β_j <u>soient des unités d'une extension algébrique</u>

<u>finie</u> $\mathbb{Q}'_\ell$ <u>de</u> $\mathbb{Q}_\ell$. <u>Pour tout point fermé</u> $s \in P^1 - S$ <u>posons</u>

$P^{\deg(s)}(t) = \prod_i (1 - \alpha_i^{\deg(s)} t)$, $Q^{\deg(s)}(t) = \prod_j (1 - \beta_j^{\deg(s)} t)$. <u>Si pour tout point fermé</u> $s \in P^1 - S$, $P^{\deg(s)}(t)$ <u>divise</u> $Q^{\deg(s)}(t).\det(1 - t\rho(F_s) ; E_\ell^n)$, <u>alors</u> $P(t)$ <u>divise</u> $Q(t)$.

5.7. <u>L'assertion</u> Théorème B $\Rightarrow$ Théorème A <u>résulte de</u> 5.6

En effet, 5.6 caractérise $\det(1 - tF_q ; H_\ell^n(\bar{X}))$ comme étant le plus petit commun multiple des polynômes $P(t) = \prod_i (1 - \alpha_i t)$, α_i unités dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$, tels que $P^{\deg(s)}(t)$ divise pour tout $s \in P^1 - S$, les polynômes à coefficients entiers et indépendants de ℓ , $\det(1 - tF_s ; H_\ell^n(\bar{Y}_s))$.

5.8. <u>Démontrons la proposition</u> 5.6. Par récurrence sur le degré de P , on peut supposer que $P(t) = (1 - \alpha t)$ et par l'absurde, on peut supposer que $\alpha \neq \beta_j$ pour tout j . Comme α est une unité ℓ-adique, il existe un et un seul caractère continu $\sigma \mapsto \alpha^\sigma$ de $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$ dans $\mathbb{Q}'^*_\ell$ tel que pour les Frobenius F_s , $s \in P^1 - S$, on ait

$$\alpha^{F_s} = \alpha^{\deg(s)} .$$

Le $\hat{\Pi}_1$ géométrique est contenu dans le noyau de ce caractère. Comme $\alpha \neq \beta_j$ pour tout j , l'ensemble des σ tels que $\alpha^\sigma \neq \beta_j^\sigma$ pour tout j , est un ouvert U non vide stable par translation à droite par le $\hat{\Pi}_1$ géométrique. Donc, pour tout s tel qu'un conjugué de F_s soit dans U , $\alpha^{\deg(s)}$ est racine de $\det(1 - \rho(F_s)t ; E_\ell^n)$. D'après le théorème de Čebotarev [12], les conjugués des F_s sont denses dans $\hat{\Pi}_1(P^1 - S, \bar{s}_o)$. Donc, pour tout σ dans U , α^σ est racine de $\det(1 - \rho(\sigma)t ; E_\ell^n)$. En particulier, soit $\sigma_o \in U$; α^{σ_o} est racine de $\det(1 - \rho(\sigma_o)\rho(\tau) ; E_\ell^n)$ pour tout élément τ du $\hat{\Pi}_1$ géométrique. D'après le théorème B, l'image par ρ du $\hat{\Pi}_1$ géométrique est dense dans $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)$ pour la topologie de Zariski. Donc α^{σ_0} est racine de $\det(1 - \rho(\sigma_0)v ; E^n_\ell)$ pour tout $v \in \mathrm{Aut}(E^n_\ell)(\mathbb{Q}_\ell)$. On se convainc facilement que c'est idiot.

6. Démonstration du théorème B

6.1. Réduction à la caractéristique zéro. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, A un anneau de valuation discrète complet dont le corps des fractions soit de caractéristique zéro. Soient X un sous-schéma fermé lisse et connexe de dimension $n+1$ sur $\mathrm{spec}(A)$ de P^N_A , X_o la fibre spéciale, $X_{\bar{\eta}}$ la fibre générale au-dessus d'un point géométrique générique de $\mathrm{spec}(A)$. Soit $(Y_s)_{s \in P^1(k)}$ un pinceau de Lefschetz pour X_o . Alors ce pinceau se remonte en caractéristique zéro et s'étend en un pinceau paramétré par P^1_A avec un lieu exceptionnel S_A fini et étale sur $\mathrm{spec}(A)$. La cohomologie évanescente pour ce pinceau est un système local sur $P^1_A - S_A$ [13]. On peut montrer que l'action de monodromie de $\hat{\Pi}_1(P^1_A - S_A)$ sur la cohomologie évanescente est modérément ramifiée [9]. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \hat{\Pi}_1^{mr}(P^1_k - S_k) \\ & & \downarrow \\ \hat{\Pi}_1(P^1_{\bar{\eta}} - S_{\bar{\eta}}) & \to & \hat{\Pi}_1^{mr}(P^1_A - S_A) \end{array}$$

où, faute de préciser les points bases, les flèches ne sont pas définies qu'à automorphisme intérieur près (mr indique la ramification modérée). On a aussi un théorème de spécialisation qui affirme que ces flèches sont des isomorphismes [17]. Par suite, les images dans $\mathrm{Aut}(E^n_\ell)$ de l'action de monodromie de la fibre spéciale et de la fibre géométrique générale sont égales. On est donc ramené à démontrer le théorème B lorsque $\mathrm{car}(k) = 0$.

De plus, par application du principe de Lefschetz, on peut supposer que $k = \mathbb{C}$.

6.2. Réduction à la cohomologie transcendante. Notons $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ le groupe d'homotopie des lacets, $\iota : \Pi_1(P^1 - S, s_o) \to \hat{\Pi}_1(P^1 - S, s_o)$ l'homomorphisme canonique dans son complété profini, E^n l'espace de cohomologie évanescente sur $\mathbb{Q}$, $\rho_t : \Pi_1(P^1 - S, s_o) \to \mathrm{Aut}(E^n)(\mathbb{Q})$ l'opération de monodromie transcendante. On en déduit une action $\rho_t \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}_\ell}$ de $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ sur $E^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$. Il résulte du théorème de comparaison qu'il existe un isomorphisme $E^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \simeq E^n_\ell$ compatible avec les monodromies [13].

Notons $M(E^n)$ la fermeture de Zariski de $\rho_t(\Pi_1(P^1 - S, s_o))$ dans $\mathrm{Aut}(E^n)$, $\mathrm{Der}(E^n)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(E^n)$, $\mathcal{M}(E^n)$ l'algèbre de Lie de $M(E^n)$, sous-algèbre de $\mathrm{Der}(E^n)$. Comme la formation de la fermeture de Zariski commute à l'extension des scalaires, il suffit pour démontrer le théorème B de montrer que $M(E^n) = \mathrm{Aut}(E^n)$.

6.3. La formule de Picard-Lefschetz. Soient $S = s_1, \ldots, s_m$ les valeurs exceptionnelles du pinceau de Lefschetz $(Y_s)_{s \in P^1}$. Choisissons des lacets σ_j qui engendrent $\Pi_1(P^1 - S, s_o)$ et qui, pour tout j , tournent autour de s_j . Quitte à prendre un multiple convenable du plongement $X \hookrightarrow P^N$, il existe, pour tout j , des éléments $\delta_j \in E^n$ tels qu'on ait pour tout $x \in E^n$ la formule de Picard-Lefschetz :

6.3.1. $\rho_t(\sigma_j)(x) = x - (-1)^k (x \cup \delta_j)\delta_j$, $n = 2k$ ou $2k + 1$,
avec $(\delta_j \cup \delta_j) = (-1)^k 2$ si $n = 2k$.

Les éléments δ_j sont uniquement déterminés, au signe près, par ces propriétés. Ils engendrent la cohomologie évanescente. Ils sont conjugués sous l'action de la monodromie. (Cf. [6] pour le cas transcendant, et [9] pour le cas étale.)

On en déduit en particulier que dans le cas n pair, $M(E^n)$ comporte des symétries. Pour démontrer le théorème B, il suffit donc de montrer que $\mathcal{M}(E^n) = \mathrm{Der}(E^n)$.

6.4. Semi-simplicité. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz et du fait que les cycles évanescents sont conjugués et engendrent E^n que la représentation de $M(E^n)$ sur E^n est absolument simple.

PROPOSITION 6.4.1.- a) *Si* n *est impair,* $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbb{C}$ *est une algèbre simple,* E^n *est un* $\mathcal{M}(E^n)$*-module absolument simple.*

b) *Si* n *est pair, deux cas seulement sont possibles :*

1) $\mathcal{M}(E^n)$ *est semi-simple,* $E^n \otimes \mathbb{C} \simeq V^k$ *où* V *est un* $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbb{C}$*-module simple ;*

2) $\mathcal{M}(E^n)$ *est abélienne,* E^n *est un* $\mathcal{M}(E^n)$*-module semi-simple.*

Supposons n impair. Il résulte de la formule de Picard-Lefschetz que $M(E^n)$ est engendré par des éléments unipotents et par suite $M(E^n)$ est connexe. Donc E^n est un $\mathcal{M}(E^n)$-module absolument simple. Le centre de $\mathcal{M}(E^n)$ opère scalairement. Comme il doit préserver une forme alternée, le centre est nul, d'où a).

Supposons que n soit pair. Notons $M^o(E^n)$ la composante neutre de $M(E^n)$. Le radical unipotent de $M^o(E^n)$ est trivial. Donc $M^o(E^n)$ est réductif. Soit $E^n \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_\alpha V_\alpha^{k(\alpha)}$ une décomposition de E^n en modules isotypiques sous $M^o(E^n)(\mathbb{C})$. Le groupe $M(E^n)/M^o(E^n)$ opère sur l'ensemble des α . Comme E^n est un $M(E^n)$-module absolument simple, l'ensemble des α est un espace homogène sous $M(E^n)/M^o(E^n)$ et $k(\alpha)$ ne dépend pas de α . Mais $M(E^n)/M^o(E^n)$ est engendré par des symétries et les symétries laissent des hyperplans fixes. Si l'ensemble des

α n'est pas réduit à un élément, on a $\dim(V_\alpha^k) = 1$ pour tout α ; d'où $k = 1$ et $\dim(V_\alpha) = 1$. Par suite $\mathcal{M}(E^n)$ est abélienne. Sinon, on a $E^n \otimes C \simeq V^k$. Le centre de $M^o(E^n)(C)$ opère scalairement. Comme il préserve une forme bilinéaire non nulle, ce centre est contenu dans $\{-1 , +1\}$; d'où b).

6.5. Un lemme sur les algèbres de Lie

LEMME 6.5.1.- *Soit* $w : \mathcal{L} \to gl(V)$ *une représentation simple et fidèle d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Soit* $U \in \mathcal{L}$.

a) *Si* $w(U)^2 = 0$ *et si* $\dim \operatorname{Im} w(U) = 1$, *trois cas seulement sont possibles*

1) $\mathcal{L} \simeq \underline{sl}$ *et* w *est la représentation usuelle.*

2) $\mathcal{L} \simeq \underline{sl}$ *et* w *est la représentation contragrédiante de la représentation usuelle.*

3) $\mathcal{L} \simeq \underline{sp}$ *et* w *est la représentation usuelle.*

b) *S'il existe une forme quadratique non dégénérée invariante par* w , *si* $w(U)^2 = 0$ *et si* $\dim \operatorname{Im} w(U) = 2$, *deux cas seulement sont possibles*

1) $\mathcal{L} \simeq \underline{so}$ *et* w *est la représentation usuelle.*

2) $\mathcal{L} \simeq \underline{g_2}$ *et* w *est la représentation sur les nombres de Cayley purs*

La démonstration de ce lemme se fait en inspectant les tables [cf. 14].

6.6. *Fin de la démonstration du théorème* B *dans le cas* n *impair*. Soit δ_j un cycle évanescent relatif au lacet σ_j (6.3). Posons $U = \rho_t(\sigma_j) - \mathrm{Id}$. Alors $U^2 = 0$ et $\dim \operatorname{Im} U = 1$. D'après 6.4.1 et 6.5.1, on est dans un des cas a_1) a_2) a_3). Les cas a_1 et a_2 sont exclus, car il y a sur E^n une forme alternée invariante.

6.7. Démonstration dans le cas n pair : un énoncé intermédiaire.

Admettons provisoirement le lemme suivant (on suppose n pair) :

LEMME 6.7.1.- Pour tout multiple assez grand du plongement $X \hookrightarrow P^N$, il existe $\sigma \in \Pi_1(P^1 - S, s_o)$ tel que $(\rho_t(\sigma) - \mathrm{Id})^2 = 0$ et $\dim \mathrm{Im}\,(\rho_t(\sigma) - \mathrm{Id}) = 2$.

Montrons que le lemme entraîne le théorème B. On pose $U = \rho_t(\sigma) - \mathrm{Id}$. Tout d'abord $U \in \mathcal{M}(E^n)$ car $U^2 = 0$ et on a $E \otimes \mathbf{C} \simeq V^k$ avec V simple et $k = 1$ ou 2 (6.4.1) sinon on ne pourrait pas avoir $\dim \mathrm{Im}(\rho_t(\sigma) - \mathrm{Id}) = 2$ et on ne peut avoir $\mathcal{M}(E^n)$ abélienne car $U \in \mathcal{M}(E^n)$ est un nilpotent non trivial. Supposons $k = 2$. La forme quadratique de E^n induit sur V une forme quadratique qui est soit nulle, soit non dégénérée car V est simple. Comme $\dim \mathrm{Im}(U)(V) = 1$, on a d'après le lemme 6.5.1 $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} \simeq sp(V)$ ou $sl(V)$ et il ne peut y avoir sur V une forme quadratique invariante. Donc V est totalement isotrope. Il existe $s \in M(E^n)/M^o(E^n)$ tel que $sV \cap V = 0$ car E^n est simple sous $M(E^n)$. La forme quadratique sur E^n fournit une forme symétrique non dégénérée sur V, $b(x,y) = x \cup sy$.

La forme $b(x,y)$ fournit un isomorphisme de sV avec le dual V^* de V. Comme $E^n \otimes \mathbf{C} \simeq V^2$, on a un isomorphisme de V avec son dual ce qui exclu le cas $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = sl(V)$ avec $\dim V > 2$. On a donc, d'après 6.5.1 a), $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} \simeq sp(V)$. Comme $Sp(V)$ n'a pas d'automorphisme extérieur, $M(E^n)(\mathbf{C})$ est un quotient de $Z \times Sp(V)$ où Z est un groupe fini isomorphe au centralisateur de $Sp(V)$ dans $M(E^n)(\mathbf{C})$. La représentation simple $M(E^n) \to \mathrm{Aut}(E^n)$ fournit une représentation de $Z \times Sp(V)$ du type $L \otimes V$ où L est une représentation simple de degré 2 de Z. Les formes bilinéaires invariantes sur $L \otimes V$ sont uniques à un scalaire près. Il existe sur L une forme bilinéaire invariante par l'action de Z et sur V une forme bilinéaire alternée invariante par l'action de $Sp(V)$. Le produit tensoriel de ces deux formes est symétrique et invariant par l'action de $Z \times Sp(V)$. Donc la forme bilinéaire sur L est alternée. Mais alors, les opérations de $Z \times Sp(V)$ sur $E^n \otimes \mathbf{C}$ sont unimodulaires, ce qui contredit le fait que ce groupe contient des symétries.

On a donc $k = 1$. Supposons $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = \underline{g}_2$, la représentation étant sur les nombres purs de Cayley. Le groupe G_2 opère transitivement sur les vecteurs de longueur 1 . Donc $M(E^n)(\mathbf{C})$ contient toutes les symétries et par suite est égal au groupe orthogonal, contradiction. On a donc $\mathcal{M}(E^n) \otimes \mathbf{C} = \underline{so}(E^n \otimes \mathbf{C})$. Donc $\mathbf{M}(E^n) = \mathrm{Aut}(E^n)$.

6.8. Changement de pinceaux. Le système local de la cohomologie évanescente sur $P^1 - S$ est la restriction à $P^1 - S$ du système local de la cohomologie évanescente sur $\check{P}^N - \check{X}$ (cf. 2). D'après un théorème de Lefschetz [10], l'application naturelle $\Pi_1(P^1 - S) \to \Pi_1(\check{P}^N - \check{X})$ est surjective. Il suffit donc de construire un lacet dans $\check{P}^N - \check{X}$ qui fournisse l'opération demandée sur E^n dans le lemme 6.7.1 pour démontrer celui-ci. Mais on peut prendre alors l'image d'un lacet provenant d'un pinceau qui n'est pas nécessairement un pinceau de Lefschetz.

6.9. Monodromie locale. Soit $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ un germe de fonction holomorphe à l'origine tel que $f(0) = 0$ et que 0 soit un point singulier isolé pour f . Soit B_ε une boule centrée en 0 de rayon ε petit. Pour η très petit $\neq 0$, $\eta \longmapsto \widetilde{H}^n(f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon , \mathbf{Q})$ est un système local sur le disque pointé et est donc décrit par un automorphisme m_f d'un espace vectoriel E_f appelé automorphisme de monodromie locale.

PROPOSITION 6.9.1.- La monodromie locale ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la singularité 0 de $f^{-1}(0)$

En effet la classe d'isomorphisme du germe de morphisme $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme analytique de la singularité de 0 dans $f^{-1}(0)$.

THÉORÈME 6.9.2 (N. A'Campo) [1].- Lorsque $n = 1$ et $f = (y^2 - x^3)(x^2 - y^3)$, on a

a) le polynôme caractéristique $\det(tm_f - 1 ; E_f)$ est $(t-1)(t+1)^2\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]^2$.

b) Le polynôme minimal de m_f est $(t-1)(t+1)^2\left[\frac{(t^5+1)}{t+1}\right]$.

En particulier, m_f^{10} est unipotent et $\dim \operatorname{Im}(m_f^{10} - 1) = 1$.

THÉORÈME 6.9.3 (Thom-Sebastiani) [15].- Soient $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C}^p \to \mathbf{C}$ deux germes de fonctions holomorphes en 0 tels que $f(0) = g(0) = 0$ et tels que 0 soit un point singulier isolé pour f et g . Alors $E_{f+g} = E_f \otimes E_g$ et $m_{f+g} = m_f \otimes m_g$.

De ces deux théorèmes, on déduit

PROPOSITION 6.9.4.- Pour $f : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$, $n \geq 2$, défini par l'équation

$$f = x_0^3 + (x_1^3 - x_2^2)(x_2^3 - x_1^2) + \sum_3^n x_i^2 ,$$

on a

1) $\dim E_f = 22$.

2) m_f n'a pas la valeur propre 1 .

3) $\dim \operatorname{Im}(m_f^{30} - \mathrm{Id})) = 2$, $(m_f^{30} - \mathrm{Id})^2 = 0$.

6.10. Fin de la démonstration. Soient Z une variété analytique (lisse), C une courbe, 0 un point de C , $z_0 \in Z$, $f : Z \to C$ une application holomorphe telle que

a) f soit propre, lisse en dehors de z_o , $f(z_o) = 0$;

b) la singularité de $f^{-1}(0)$ en z_o soit analytiquement isomorphe à celle décrite en 6.9.4.

Pour $\eta \in C$, posons $Z_\eta = f^{-1}(\eta)$. On a une suite exacte compatible avec l'action de monodromie autour de 0 [11] :

$$0 \to H^n(Z_o) \to H^n(Z_\eta) \to E_f \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(Z_o) \to H^{n+1}(Z_\eta) \to 0 .$$

Par définition la monodromie agit trivialement sur $H^n(Z_o)$ et $H^{n+1}(Z_o)$. On en déduit (6.9.4, 2) et 6.9.1) un isomorphisme $H^n(Z_\eta) \simeq H^n(Z_o) \oplus E_f$ compatible avec l'action de la monodromie. Si m_f désigne l'automorphisme de monodromie sur $H^n(Z_\eta)$, on a :

$$(m_f^{30} - \mathrm{Id})^2 = 0 \quad \text{et} \quad \dim \mathrm{Im}(m_f^{30} - \mathrm{Id}) = 2 .$$

Pour terminer la preuve du lemme 6.7.1, il suffit, vu (6.8), de construire un pinceau d'hypersurfaces de degré d présentant pour une valeur s_o du paramètre, une singularité analytiquement isomorphe à celle décrite en 6.9.4. D'après [3], il suffit pour cela que l'équation locale de l'intersection, coïncide avec l'équation de 6.9.4 à un ordre M assez grand (il suffit de prendre $M \geq 13$). Ceci peut toujours se faire en prenant d assez grand (il suffit de prendre $d \geq 13$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. A'CAMPO - Thèse, 1972/73, Orsay.

[2] A. ANDREOTTI and T. FRANKEL - In global analysis, Princeton Univ. Press, 1969.

[3] J.-C. TOUGERON - Idéaux de fonctions différentiables, Ergebnisse n° 71, Springer 1972

[4] P. DELIGNE - SGA 7, exp. XIII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[5] P. DELIGNE - Théorie de Hodge II, Publ. Math. IHES, 40, 1971, p. 5-58.

[6] I. FÁRY - Cohomologie des variétés algébriques, Annals of Maths. 65 (1957), p. 21-73.

[7] A. GROTHENDIECK - Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L , Sém. Bourbaki, n° 279, 1964/65, Benjamin, New York.

[8] N. KATZ - SGA 7, exp. XVII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[9] N. KATZ - SGA 7, exp. XVIII, Lecture Notes in Maths, Springer-Verlag, à paraître.

[10] S. LEFSCHETZ - L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique, Gauthier-Villars, Paris.

[11] J. MILNOR - Singular Points of Complex hypersurfaces, Annals of Maths. Studies n° 61, Princeton Univ. Press.

[12] J.-P. SERRE - Abelian ℓ-adic Representations and Elliptic curves, Benjamin, New York, 1968.

[13] SGA 4, Tome 3, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture Notes in Maths n° 305, Springer-Verlag.

[14] B. KOSTANT - A characterization of the classical groups, Duke J., 25(1958), p. 107-123.

[15] R. THOM - M. SEBASTIANI - Un résumé sur la monodromie, Invent. M., 13 (1971), p. 90-96.

[16] M. RAYNAUD - SGA 2, Exp. XIV, Profondeur et théorèmes de Lefschetz en cohomologie étale, North-Holland.

[17] M. RAYNAUD - Théorèmes de Lefschetz en cohomologie cohérente et cohomologie étale, Thèse, 1972.

[18] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kähleriennes, Hermann, 1958.

[19] A. WEIL - Number of solutions of equations, Bulletin A.M.S. 55 (1949), p. 497-508.