T. A. SPRINGER

Caractères de groupes de Chevalley finis

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 429, p. 210-233

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__210_0>

Séminaire BOURBAKI
25e année, 1972/73, n° 429

CARACTÈRES DE GROUPES DE CHEVALLEY FINIS

par T. A. SPRINGER

1. Introduction

Dans ce qui suit, k désigne un corps fini à q éléments, de caractéristique p. Soit $\underline{\underline{G}}$ un groupe algébrique linéaire défini sur k. On désigne par G le groupe $\underline{\underline{G}}(k)$ des points k-rationnels de $\underline{\underline{G}}$, c'est un groupe fini. Si $\underline{\underline{G}}$ est en outre réductif et connexe, on dira que G est un groupe de Chevalley. Cette définition n'est pas l'habituelle (de [28], par exemple), qu'on retrouve en prenant $\underline{\underline{G}}$ semi-simple.

Le problème qu'on va discuter est celui de déterminer les caractères des représentations irréductibles complexes de G. Une solution complète de ce problème devrait consister en une paramétrisation des caractères irréductibles de G par des objets dépendant de la structure interne de $\underline{\underline{G}}$, plus un procédé pour trouver la valeur d'un caractère donné dans un élément de G (une "formule de caractères", comme celle de Weyl pour les groupes de Lie compacts). A présent, on est encore loin d'une telle solution complète. On va esquisser ci-dessous un nombre de résultats partiels, plus ou moins récents. On se bornera à des résultats de nature générale. Pour des discussions de cas particuliers voir par exemple [4,D], [8], [12], [15], [16], [27].

2. Construction de caractères

Pour construire des caractères d'un groupe fini on dispose, depuis Frobenius, du procédé d'induction. On va d'abord rappeler quelques résultats connus (voir [13]).

2.1. Induction.

Si E est un ensemble fini, on dénote par $|E|$ le nombre de ses éléments. $C(E)$ est l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur E. On munit

$C(E) \times C(E)$ du produit hermitien

$$\langle f,g\rangle_E = |E|^{-1} \sum_{x \in E} f(x)\,\overline{g(x)} .$$

Si G est un groupe fini, $C(G)$, muni du produit de convolution $f * g$ est une algèbre associative, isomorphe à l'algèbre du groupe G. $I(G) \subset C(G)$ est l'algèbre des fonctions invariantes sur G, c'est-à-dire des $f \in C(G)$ satisfaisant

$$f(xyx^{-1}) = f(x) \qquad (x\,,\,y \in G)\,,$$

c'est le centre de l'algèbre $C(G)$.

Soit H un sous-groupe de G. Si $f \in I(H)$, on dénote par $i_{H \to G} f \in I(G)$ la fonction induite, définie par la formule de Frobenius

$$i_{H \to G} f(x) = |H|^{-1} \sum_{\substack{y \in G \\ yxy^{-1} \in H}} f(yxy^{-1}) .$$

Si f est le caractère d'une représentation de H, alors $i_{H \to G} f$ est le caractère de la représentation induite.

Soit $r_{G \to H}$ l'application de restriction de $C(G)$ à $C(H)$, ou de $I(G)$ à $I(H)$. Alors, on a la formule suivante (dualité de Frobenius)

(1) $$\langle i_{H \to G} f\,, g\rangle_G = \langle f\,, r_{G \to H}\, g\rangle_H \,,$$

si $f \in I(H)$, $g \in I(G)$.

Soient H et K deux sous-groupes de G. On pose ${}^xK = xKx^{-1}$ etc. Si $f \in I(H)$, $g \in I(K)$, alors

$$\langle r_{H \to H \cap {}^xK}(f)\,, r_{{}^xK \to H \cap {}^xK}({}^xg)\rangle_{H \cap {}^xK}$$

ne dépend que de la double classe HxK, et on a la formule de Mackey

(2) $$\langle i_{H \to G}(f)\,, i_{K \to G}(g)\rangle_G = \sum_{H\backslash G/K} \langle r_{H \to H \cap {}^xK}(f)\,, r_{{}^xK \to H \cap {}^xK}({}^xg)\rangle_{H \cap {}^xK} .$$

On appliquera ci-dessous le procédé d'induction dans le cas d'un groupe de Chevalley G, en prenant pour H un sous-groupe "naturel" de G (par exemple un sous-groupe parabolique).

2.2. La méthode de Green.

La proposition suivante, due à J. A. Green [16], donne une méthode de construction de caractères généralisés d'un groupe fini (c'est-à-dire des combinaisons linéaires à coefficients entiers de caractères irréductibles). On dénote par $\bar{k}$ une clôture algébrique du corps k . f sera un homomorphisme injectif du groupe multiplicatif $\bar{k}^*$ dans $\mathbf{C}^*$.

2.3. PROPOSITION.- *Soit* G *un groupe fini, soit* $r : G \to GL_n(k)$ *une représentation (modulaire) de* G . *Soient* $u_1(x),\ldots,u_n(x)$ *les valeurs propres de* $r(x)$ *dans* $\bar{k}^*$. *Alors la fonction*

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} f(u_i(x))$$

est un caractère généralisé de G .

C'est une conséquence facile du théorème de Brauer.

Si G est un groupe de Chevalley, on sait d'après Steinberg (voir [28,§13]) qu'on peut lier la théorie des représentations p-modulaires de G avec la théorie des représentations rationnelles du groupe algébrique $\underline{\underline{G}}$. La proposition précédente donne donc, en principe, un procédé de construction de caractères généralisés de G à partir de la théorie des représentations de $\underline{\underline{G}}$. Jusqu'à présent, ce procédé a seulement été utilisé par Green dans [16] pour la construction de caractères de $GL_n(k)$, mais il devrait être applicable dans d'autres cas.

3. Induction à partir de sous-groupes paraboliques

Dès maintenant G sera un groupe de Chevalley. Soit $\underline{\underline{P}}$ un k-sous-groupe parabolique de $\underline{\underline{G}}$. Soit $\underline{\underline{U}} = R_u\underline{\underline{P}}$ son radical unipotent, soit $\underline{\underline{L}}$ un k-sous-groupe de Levi de $\underline{\underline{P}}$. Alors $\underline{\underline{P}}$ est le produit semi-direct de $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{U}}$. Le sous-groupe P de G détermine $\underline{\underline{P}}$ complètement et on a une décomposition en produit semi-direct $P = LU$. On appellera P sous-groupe parabolique de G , U son radical unipotent etc. (On renvoie à [3] pour les groupes paraboliques et leurs propriétés.)

3.1. Fonctions paraboliques.

On dit que $f \in C(G)$ est une fonction parabolique ("cusp form") si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de G et pour tout $x \in G$, on a

$$\sum_{y \in U} f(xy) = 0 .$$

Une représentation irréductible r de G est dite parabolique, si ses coefficients matriciels sont des fonctions paraboliques. Il est facile de voir que pour cela il faut et il suffit que le caractère de r soit une fonction parabolique. r est parabolique si et seulement si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = LU$, la restriction de r à U ne contient pas la représentation triviale de U.

Les fonctions paraboliques forment un idéal bilatère ${}^{\circ}C(G)$ dans l'algèbre $C(G)$. On pose ${}^{\circ}I(G) = I(G) \cap {}^{\circ}C(G)$.

Il est commode de définir aussi ${}^{\circ}C(H)$ dans le cas d'un groupe algébrique linéaire $\underline{\underline{H}}$ qui est seulement connexe (et non nécessairement réductif). Soit alors $\underline{\underline{R}}$ le radical unipotent de $\underline{\underline{H}}$. Nous dirons que $f \in C(H)$ est parabolique si

(i) f est invariante à droite par R,

(ii) la fonction sur le groupe de Chevalley H/R définie par f d'après (i) est parabolique.

${}^{\circ}C(H)$ et ${}^{\circ}I(H)$ sont définis comme auparavant. On utilisera ceci dans le cas où H est un sous-groupe parabolique d'un groupe de Chevalley.

3.2. Sous-groupes paraboliques associés.

Soient $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{L}}.\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{M}}.\underline{\underline{V}}$ deux k-sous-groupes paraboliques de $\underline{\underline{G}}$. On dit qu'ils sont associés si $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{M}}$ sont conjugués par un élément de G. On constate que la relation "être associé" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des k-sous-groupes paraboliques. Nous dirons que les sous-groupes paraboliques P et Q sont associés si $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{Q}}$ le sont.

Le lemme suivant est une conséquence de ce qui se trouve dans [3] (voir aussi [26, n° 2]).

3.3. *Lemme*.- (i) $\mathbf{Q}_{\mathbf{P}} = (\mathbf{P} \cap \mathbf{Q})\mathbf{U}$ *est un k-sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}$, *son radical unipotent est* $(\mathbf{P} \cap \mathbf{V})\mathbf{U}$;

(ii) *Tout k-sous-groupe parabolique de* $\mathbf{P}$ *est un* $\mathbf{Q}_{\mathbf{P}}$;

(iii) *On a* $\mathbf{Q}_{\mathbf{P}} = \mathbf{P}$ *et* $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}$ *si et seulement si* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *sont associés* ;

(iv) *On a* $P = (P \cap Q)U$ *et* $Q = (P \cap Q)V$ *si et seulement si* P *et* Q *sont associés.*

De 3.3(iv) on déduit le résultat suivant (voir [26, n° 5]).

3.4. *Lemme*.- *Soient* $f \in {}^{o}I(P)$, $g \in {}^{o}I(Q)$. *Supposons que* P *et* Q *ne soient pas associés. Alors*

$$\langle r_{P \to P \cap Q}(f), r_{Q \to P \cap Q}(g)\rangle_{P \cap Q} = 0 .$$

Soit maintenant $\mathbf{N}$ le normalisateur de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{G}$. Soit $\mathbf{W} = \mathbf{N}/\mathbf{L}$, c'est un groupe algébrique fini. W opère sur $C(L)$ et sur ${}^{o}I(P)$. En utilisant 3.4 et la formule de Mackey (2), on obtient la proposition suivante (voir [26, n°5]).

3.5. PROPOSITION.- *Soient* $f \in {}^{o}I(P)$, $g \in {}^{o}I(Q)$.

(i) *Si* P *et* Q *ne sont pas associés, on a* $\langle i_{P \to G}\, f, i_{Q \to G}\, g\rangle_G = 0$;

(ii) *Si* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{Q}$ *ont un sous-groupe de Levi* $\mathbf{L}$ *commun, on a*

$$\langle i_{P \to G}\, f , i_{Q \to G}\, g\rangle_G = \sum_{w \in W} \langle r_{P \to L}\, f , r_{Q \to L}(w.g)\rangle_L \ ;$$

(iii) *Si de plus* $r_{P \to L}\, f = r_{Q \to L}\, g$, *alors* $i_{P \to G}\, f = i_{Q \to G}\, g$.

3.6. COROLLAIRE.- *Soit* f *un caractère irréductible parabolique de* P . *Alors* $\langle i_{P \to G}\, f , i_{P \to G}\, f\rangle_G$ *égale l'ordre du groupe d'isotropie* W_f *de* f *dans* W . *En particulier,* $i_{P \to G}\, f$ *est un caractère irréductible de* G *si* W_f *est réduit à l'élément neutre.*

On notera que, dans la situation du corollaire, $\langle i_{P \to G}\, f , i_{P \to G}\, f\rangle_G$ est la dimension de l'algèbre commutante $A(r)$ de la représentation r de G induite par f . On ne sait pas grand'chose sur la structure de cette algèbre. On conjecture qu'elle est liée à l'algèbre du groupe W , voir [4, p. 108-109].

Un cas particulier sera discuté au n° 4.

3.7. PROPOSITION.- Soit c un caractère irréductible de G. Il existe un sous-groupe parabolique P de G et un caractère irréductible parabolique f de P tel que $\langle c, i_{P \to G} f\rangle_G \neq 0$.

La démonstration (aisée) est donnée dans [26, 4.5].

On déduit de 3.6 et 3.7 (utilisant la formule (1)) que toute représentation irréductible r de G est une composante d'une représentation de G, induite par une représentation irréductible parabolique d'un sous-groupe parabolique P de G. En outre, la classe d'équivalence de P (pour la relation d'être associés) est uniquement déterminée par r.

Ces résultats sont dus à Harish-Chandra [18]. Ils sont analogues aux résultats (beaucoup plus difficiles à établir) qu'il a obtenus dans le cas des groupes de Lie réels et p-adiques.

Dans notre cas, les résultats ci-dessus donnent un principe de classification des représentations irréductibles de G. Malheureusement, si on veut pousser plus loin cette classification, on tombe sur un problème sérieux, à savoir celui de construire les représentations paraboliques de G. Dans le cas réel, le problème analogue est celui de la construction de la série discrète d'un groupe de Lie semi-simple, qui a été résolu par Harish-Chandra dans des travaux profonds.

Dans le cas des groupes finis (et aussi dans celui des groupes p-adiques semi-simples) il paraît qu'on est encore loin de la solution du problème. On discutera quelques résultats partiels au n° 7.

4. Induction à partir d'un groupe de Borel

4.1. On sait que $\underline{\underline{G}}$ possède des sous-groupes de Borel $\underline{\underline{B}}$ qui sont définis sur k (c'est une conséquence d'un théorème de Lang, voir [4, p. 175]). On dira alors que B est un sous-groupe de Borel de G. Deux k-sous-groupes de Borel de $\underline{\underline{G}}$ sont conjugués par un élément de G.

Nous appliquons maintenant le procédé d'induction du n° 3 dans le cas où le groupe parabolique P est un groupe de Borel B. Alors un groupe de Levi de $\underline{\underline{B}}$ est un tore maximal de $\underline{\underline{G}}$ et il est évident d'après les définitions que toute fonction sur B qui est constante sur les classes xU (U le radical unipotent de B) est parabolique. En outre, W est maintenant le groupe de Weyl de $\underline{\underline{G}}$, relatif à k . Soit $\underline{\underline{T}}$ un k-tore maximal de $\underline{\underline{G}}$, contenu dans $\underline{\underline{B}}$. On dénote par $\hat{T}$ le groupe des caractères du groupe abélien fini T ; W opère sur $\hat{T}$. Si $f \in \hat{T}$, soit W_f le groupe d'isotropie de f dans W . Comme $T \simeq B/U$, f définit un caractère (irréductible de degré 1) de B , qu'on dénote aussi par f . C'est un caractère irréductible parabolique de B .

3.6 montre maintenant que $i_{B \to G} f$ est un caractère irréductible de G si $W_f = \{1\}$. Les représentations irréductibles de G obtenues de cette façon sont analogues aux représentations irréductibles de la série principale d'un groupe de Lie semi-simple (et la méthode pour les obtenir est analogue à celle de Bruhat [6] pour les groupes de Lie). Si $W_f \neq \{1\}$, 3.6 montre que $i_{B \to G} f$ n'est pas irréductible, et le problème se pose de décomposer la représentation correspondante en composantes irréductibles. Le cas particulier où f est le caractère trivial a été étudié de manière assez détaillée. On va discuter quelques résultats obtenus dans ce cas.

4.2. L'algèbre de Hecke.

Soit maintenant r la représentation de G induite par la représentation triviale de B . On sait que l'algèbre commutante A(r) de r est isomorphe à l'algèbre de Hecke $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ des fonctions f sur G à valeurs complexes, satisfaisant

$$f(bxb') = f(x) \qquad (b , b' \in B) ,$$

le produit étant le produit de convolution. Soit $H_{\mathbf{Q}}(G,B)$ l'algèbre correspondante, définie à partir du corps des rationnels $\mathbf{Q}$. La structure de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ peut être décrite en termes de générateurs et relations (voir par exemple [5, exercices, p. 55]). On rappellera d'ailleurs les formules plus loin.

Le théorème qui suit (dû à Tits) donne la structure abstraite de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$.

4.3. THÉORÈME.- $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{C}[W]$ du groupe de Weyl W .

La démonstration se trouve aussi dans les exercices de Bourbaki [loc. cit. p. 56]. Malheureusement, elle ne donne pas un isomorphisme explicite des deux algèbres. Pour les applications, il serait très désirable d'avoir un tel isomorphisme explicite.

On peut améliorer 4.3. Avant d'énoncer le résultat, rappelons qu'une représentation $A \rightarrow GL_n(\mathbf{C})$ d'un groupe fini A est dite <u>rationnelle</u> si elle est équivalente à une représentation $A \rightarrow GL_n(\mathbf{Q})$. Il est clair que la représentation r de G est rationnelle. Un caractère d'un groupe fini est rationnel si ses valeurs sont des entiers rationnels.

4.4. THÉORÈME.- (i) <u>Les composantes irréductibles de</u> r <u>sont rationnelles</u> ;
(ii) <u>Leurs degrés sont donnés par des polynômes en</u> q, <u>à coefficients rationnels et</u>, <u>si le degré est</u> > 1, <u>sans terme constant</u>.
(iii) $H_{\mathbf{Q}}(G,B)$ <u>est isomorphe à l'algèbre</u> $\mathbf{Q}[W]$ <u>du groupe</u> W. [1]

[Rappelons que q est le nombre d'éléments du corps k.]

On constate facilement qu'il suffit de démontrer 4.4(i) dans le cas où $\underline{\underline{G}}$ est simple. Alors (i) est démontré par Benson et Curtis [2], avec une exception possible dans le cas où $\underline{\underline{G}}$ est de type E_7. Le cas exceptionnel a été éliminé par L. Solomon (communication privée). La démonstration de (i), donnée dans [2] est basée sur une discussion des cas individuels. Elle utilise, entre autres, la connaissance explicite de la table des caractères d'un groupe de Weyl de type exceptionnel ... La première assertion de (ii) est aussi démontrée dans [2]. Le dernier point de (ii) résulte alors de [17]. (iii) est une conséquence de (i) et du fait que les représentations irréductibles de W sont rationnelles (dont on va dire quelques mots). Evidemment, (iii) est une amélioration de 4.3.

4.5. <u>Remarques</u>.- (1) Dans [2], on démontre aussi le théorème sur les représentations de W qu'on vient de mentionner. Le fait que les représentations d'un groupe de Weyl de type "classique" (A,B,D) sont rationnelles était connu depuis longtemps (A. Young). Pour les types exceptionnels la première démonstration fut donnée récemment par M. Benard [1]. Ces démonstrations de la rationnalité des représentations sont de nature "expérimentale" (de même pour le résultat plus faible qui dit que les caractères d'un groupe de Weyl sont rationnels). Il serait intéressant d'avoir des démonstrations plus intelligibles pour ces faits. Récemment, I. G. Macdonald a donné un procédé simple pour construire des représenta-

---
(1) voir commentaire, page 232

tions irréductibles et rationnelles d'un groupe de Weyl [21], mais ce procédé ne les donne pas toutes.

(2) L'étude des valeurs des caractères irréductibles contenus dans r vient d'être abordée. Curtis et Kilmoyer (indépendamment) ont démontré que si $x \in G$ est un élément régulier d'un k-tore déployé maximal de $\underline{\underline{G}}$, la valeur en x d'un tel caractère c est le degré du caractère du groupe de Weyl W, associé à c d'après 4.3.

(3) Les résultats de 4.4(ii) se sont révélés utiles dans l'étude récente, faite par Curtis, Kantor et Seitz des représentations d'un groupe de Chevalley par un groupe de permutations doublement transitif.

4.6. Représentations de l'algèbre de Hecke.

Pour certaines composantes irréductibles de r les résultats peuvent être poussés un peu plus loin. Pour expliquer les résultats, il faudra d'abord expliciter la structure de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$. Soit S l'ensemble générateur de W défini par B (voir [5, p. 22]). Il existe des puissances q_s de q $(s \in S)$ telles que $q_s = q_t$ si s et t sont conjugués dans W et que $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ admet une présentation par des générateurs $(e_s)_{s \in S}$, avec les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} e_s^2 = q_s.1 + (q_s - 1)e_s \ , & \\ (e_s e_t)^r = (e_t e_s)^r & \text{si } st \text{ a ordre pair } 2r \ , \\ (e_s e_t)^r e_s = (e_t e_s)^r e_t & \text{si } st \text{ a ordre impair } 2r+1 \end{cases}$$

(voir [10, p. 84] et [5, p. 55]).

$H_{\mathbf{C}}(G,B)$ étant isomorphe à l'algèbre commutante de r, toute représentation irréductible de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ détermine une composante irréductible de r. En particulier, il correspond à toute représentation a de degré 1 de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ une représentation irréductible de G, contenue dans r avec multiplicité 1. En utilisant (3), il est facile de déterminer les caractères a. La première relation (3) montre qu'on aura $a(e_s) = q_s$ ou $a(e_s) = -1$ et les autres imposent seulement la condition $a(e_s) = a(e_t)$ si st a ordre impair, ce qui implique que si $\underline{\underline{G}}$ est simple il y a deux possibilités pour a si le diagramme de Dynkin de W n'a pas d'arêtes d'ordre > 3 et quatre dans l'autre cas (voir [10, p. 112]).

En particulier, $a(e_s) = q_s$ et $a(e_s) = -1$ $(s \in S)$ définissent des caractères a de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$. Au premier correspond la représentation triviale de G (qui est évidemment contenue dans r). Le second donne la "représentation de Steinberg", qui sera discutée au n° 5.

Une autre représentation de l'algèbre de Hecke a été trouvée par Kilmoyer (voir [20], ou [10]). Nous esquissons la construction.

Si s , $t \in S$, on dénote par n_{st} l'ordre de st dans W. Soient c_{st} $(s\,,\,t \in S)$ des nombres complexes avec les propriétés suivantes

$$\begin{cases} c_{ss} = q_s + 1\,, & \\ c_{st} = c_{ts} = 0 & \text{si } s \neq t\,,\ n_{st} = 2\,, \\ c_{st}c_{ts} = q_s + q_t + 2\sqrt{q_s q_t}\cos\dfrac{2\pi}{n_{st}} & \text{si } n_{st} > 2\,. \end{cases}$$

Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ de dimension $\ell = |S|$, avec une base $(x_s)_{s \in S}$. On démontre qu'il existe une forme bilinéaire symétrique B sur $V \times V$ avec les propriétés suivantes : $B(x_s,x_s) \neq 0$ et $(q_s + 1)\,B(x_s,x_t) = c_{st}\,B(x_s,x_t)$ [10, p. 106].

4.7. PROPOSITION.- <u>Il existe une représentation irréductible</u> h <u>de</u> $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ <u>dans</u> V <u>telle que</u>

(4) $$h(e_s)v = q_s v - (q_s + 1)B(x_s,x_s)^{-1}B(x_s,v)x_s\ .$$

Pour démontrer que (4) définit une représentation, il faut vérifier que les $h(e_s)$ satisfont aux relations imposées par (3). Il suffit alors de les vérifier si $|S| = 2$, ce qui est fait dans [10, n° 8]. L'irréductibilité est démontrée dans [<u>loc</u>. <u>cit</u>., p. 109].

Dans les formules (3), on peut regarder les q_s comme des indéterminés sur $\mathbf{C}$ (soumis à la condition $q_s = q_t$ si s et t sont conjugués dans W). On obtient alors l' "anneau générique ". Les résultats sur les représentations de l'algèbre de Hecke, mentionnés ci-dessus, sont démontrés dans [10] pour l'anneau générique.

Si on interprète les q_s dans (3) comme des indéterminés, on peut les spécialiser. La spécialisation $q_s \mapsto 1$ de (3) donne l'algèbre $\mathbf{C}[W]$ du groupe W, et la représentation h de 4.7 de l'anneau générique se spécialise en la représentation de $\mathbf{C}[W]$ définie par la représentation naturelle de W.

Kilmoyer a aussi défini des "puissances extérieures" de h (voir [10, p. 108]). Le polynôme d donnant le degré de la représentation de G correspondante à h (voir 4.4(ii)) a aussi été déterminé par lui. Les résultats se trouvent dans [10, p. 111]. Si le diagramme de Dynkin de $\underline{\underline{G}}$ est irréductible et n'a pas d'arêtes d'ordre > 3, il se trouve (par une vérification cas par cas) que

$$d(T) = T^{m_1} + T^{m_2} + \ldots + T^{m_\ell} ,$$

où les m_i sont les exposants de W.

5. La représentation de Steinberg

Avec les notations de 4.6, le caractère a de $H_{\mathbf{C}}(G,B)$ avec $a(e_s) = -1$ pour tout $s \in S$, détermine une représentation irréductible st de G, contenue dans r, avec multiplicité 1. C'est la représentation de Steinberg, discutée en détail dans [29]. On donnera ici une autre description de st, due à Solomon-Tits [23], qui utilise l'immeuble de Tits I de G. Dans ce qui suit on a besoin des propriétés géométriques de I, dues à Tits. Malheureusement, elles ne se trouvent pas exposées en détail dans la littérature. La discussion du cas analogue de l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe algébrique p-adique se trouve dans [7].

5.1. L'immeuble de Tits de G.

On suppose que $\underline{\underline{G}}$ n'est pas un tore. L'immeuble de Tits I de G est un complexe simplicial (plus correctement, I est un complexe polysimplicial comme dans [7, p. 13], à cela près que la structure affine de [7] doit être remplacée par une structure affine "sphérique"). Les simplexes de I sont indexés par les sous-groupes paraboliques de G, soit s_P le simplexe correspondant à P.

s_P est une face de s_Q si et seulement si $Q \subset P$. ℓ étant le k-rang semi-simple de $\underline{\underline{G}}$ (= la dimension d'un k-tore déployé maximal du groupe dérivé de $\underline{\underline{G}}$), les simplexes de dimension maximale sont les s_B , où B est un sous-groupe de Borel, ils ont dimension $\ell - 1$. Il est clair que G opère sur I . Soit $\underline{\underline{T}}$ un k-tore déployé maximal de $\underline{\underline{G}}$, soit

$$A = \bigcup_{\underline{\underline{B}} \supset \underline{\underline{T}}} s_B ,$$

c'est un "appartement" de I . Soit X le groupe des caractères de $\underline{\underline{T}}$, soit $V = X \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Le groupe de Weyl $W = N_G(\underline{\underline{T}})/T$ ($N_G(\underline{\underline{T}})$ étant le normalisateur de $\underline{\underline{T}}$ dans G) opère sur V . On fixe une métrique euclidienne $(\mid)$ sur $V \times V$, qui est W-invariante. Alors on peut identifier l'appartement A à la sphère $S = \{x \in V \mid (x|x) = 1\}$. La distance sphérique de la sphère se transporte à A .

5.2. <u>Lemme</u>.- <u>Il existe une distance</u> $d(,)$ <u>sur</u> $I \times I$ <u>qui est</u> G-<u>invariante et qui induit sur</u> $A \times A$ <u>la distance sphérique</u>.

(Voir [7, 2.5] pour un résultat analogue.)

Une géodésique dans A est un sous-ensemble qui correspond à une ligne géodésique de la sphère S . On démontre que deux points de I sont contenus dans un même appartement A et que les géodésiques qui les joignent dans A ne dépendent pas du choix de A . On a donc une notion de géodésique dans I . Deux points de I sont <u>antipodaux</u> s'il y a plusieurs géodésiques qui les joignent.

5.3. <u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> $x \in I$ <u>à l'intérieur d'un simplexe</u> s_B <u>de dimension</u> $\ell - 1$. <u>Si</u> $y \in I$ <u>est antipodal à</u> x , <u>il existe un sous-groupe de Borel</u> B' <u>opposé à</u> B , <u>tel que</u> y <u>est à l'intérieur de</u> $s_{B'}$. <u>Pour tout</u> B' <u>opposé à</u> B , <u>il existe un</u> $y \in s_{B'}$ <u>unique antipodal à</u> x .

(Rappelons que $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}'$ sont opposés si $\underline{\underline{B}} \cap \underline{\underline{B}}'$ est un tore maximal ; nous dirons que B et B' sont opposés si $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}'$ le sont.)

On dénote par $\widetilde{H}^i(I,M)$ les groupes de cohomologie réduits de l'espace (compact) I , à coefficients dans le groupe abélien M . Rappelons que

$\tilde{H}^i = H^i$ si $i \neq 0$ et que $\tilde{H}^o = H^o$ modulo constantes. Soit U le radical unipotent d'un Borel de G, alors $|U|$ est l'ordre d'un p-groupe de Sylow de G.

5.4. THÉORÈME.- On a $\tilde{H}^i(I,M) = 0$ si $i \neq \ell - 1$ et $\tilde{H}^{\ell-1}(I,M) \simeq M^{|U|}$.

Soit x comme dans 5.3. Pour chaque B' opposé à B, soit $y(B')$ le point antipodal à x dans B', soit Y la réunion des $y(B')$. D'après le lemme de Bruhat, on a $|Y| = |U|$. Il résulte de 5.3 que $I - Y$ est contractile. Le lemme topologique suivant implique alors le théorème.

5.5. Lemme.- Soit X un complexe simplicial compact connexe, de dimension n. Soit Y un sous-ensemble fini de X tel que $X - Y$ soit contractile. (*). Alors $\tilde{H}^i(X,M) = 0$ si $i \neq n$ et $\tilde{H}^n(X,M) \simeq M^{|Y|}$.

5.4 est dû à Solomon-Tits [23]. La démonstration esquissée ici est de Tits. Elle est différente de celle de [23].

Comme G opère sur I, on a une représentation st de G dans $\tilde{H}^{\ell-1}(I,\mathbf{C})$. Fixons un sous-groupe de Borel B de G. Si P est un sous-groupe parabolique de G, on désignera par $s(P)$ le rang semi-simple de $\underline{\underline{P}}$.

5.6. THÉORÈME.- (i) st est la représentation de Steinberg (c'est-à-dire est comme au début du n° 5) ;

(ii) Le caractère c de st est donné par

$$c = \sum_{P \supset B} (-1)^{s(P)} \, i_{P \to B}(1) , \tag{5}$$

où la somme est étendue sur les paraboliques P contenant B ;

(iii) Le degré de st est $|U|$.

(iii) résulte de 5.4. (5) en résulte aussi, par un raisonnement facile de caractéristiques d'Euler-Poincaré. On déduit de (5) l'irréductibilité de st : Soit $\underline{\underline{T}} \subset \underline{\underline{B}}$ un k-tore déployé maximal. Soit W le groupe de Weyl correspondant, soit S l'ensemble de générateurs de W défini par B. Si $X \subset S$, on dénote par W_X le sous-groupe de W engendré par X. En utilisant la formule

(*) Supposons que chaque point de Y soit à l'intérieur d'un seul simplexe de dimension maximale n.

de Mackey (2) et des résultats standards sur les systèmes de Tits (voir [5]), on constate que

$$\langle c,c\rangle_G = \sum_{X\,,\,Y\subset S} (-1)^{|X|+|Y|}\, |W_X \backslash W / W_Y| .$$

Or, X et Y étant fixés, on sait que chaque double classe $W_X w W_Y$ contient un élément w_1 unique avec $\ell(xw_1) > \ell(w_1)$, $\ell(w_1 y) > \ell(w_1)$ si $x \in X$, $y \in Y$ (ℓ désignant la longueur dans W par rapport à S), voir [5, ex. 3, p. 37]. Si $w \in W$, posons $X_w = \{x \in S \mid \ell(xw) > \ell(w)\}$, $Y_w = \{y \in S \mid \ell(wy) > \ell(w)\}$. Il s'ensuit que la somme s'écrit

$$\sum_{w\in W} \sum_{\substack{X\subset X_w \\ Y\subset Y_w}} (-1)^{|X|+|Y|} .$$

La somme intérieure est 0 , sauf si w est l'élément de W de longueur maximale. Il s'ensuit que $\langle c,c\rangle_G = 1$, donc st est irréductible.

Un raisonnement analogue démontre que

$$\langle c\,,\, i_{B\to G}(1)\rangle_G = 1 ,$$

donc st est contenue dans la représentation r de 4.4, avec multiplicité 1 . D'après 4.3, il correspond à st une représentation de degré 1 de l'algèbre de Hecke. On les a discutées au n° 4.6. Or, étant donnée une telle représentation, on peut déterminer le degré de la représentation correspondante de G (voir [10, th. 4.4, p. 94]). (i) résulte alors de (iii) [loc. cit., p. 114-115].

La formule (5) est due à Curtis [9].

D'après 5.6(iii), le degré de st est égal à l'ordre d'un p-groupe de Sylow de G . Il s'ensuit d'un théorème de Brauer-Nesbitt [11, p. 611] que $c(x) = 0$ si $x \in G$ n'est pas semi-simple. Plus généralement, Steinberg a déterminé dans [29] les valeurs $c(x)$ pour tout $x \in G$, au signe près. Le résultat précis est le suivant. Si $s \in G$ est semi-simple, on dénote par $s(x)$ le k-rang semi-simple de son centralisateur dans $\underline{\underline{G}}$ et par $q^{N(x)}$ l'ordre d'un p-groupe de Sylow du centralisateur de x dans G .

5.7. THÉORÈME.- On suppose $\underline{\underline{G}}$ semi-simple et simplement connexe.

(i) $c(x) = 0$ si x n'est pas semi-simple ;

(ii) Si $x \in G$ est semi-simple, on a $c(x) = (-1)^{\ell + s(x)} q^{N(x)}$.

On vient de remarquer que (i) est vrai. Mais on indiquera une autre méthode de démonstration pour (i), qui servira aussi pour démontrer (ii) (et qui est différente de la méthode de [29]). Soit $x \in G$, soit I_x le complexe simplicial défini comme l'immeuble de Tits I , mais utilisant seulement les groupes paraboliques contenant x . On déduit de (5) que $c(x)$ est, au signe près, la caractéristique d'Euler-Poincaré réduite de I_x , c'est-à-dire

$$c(x) = \pm \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim \widetilde{H}^i(I_x , \mathbb{C}) .$$

Or, on démontre que I_x est contractile si x n'est pas semi-simple, ce qui implique (i). J'esquisserai la démonstration si x est unipotent. Alors x est contenu dans un groupe de Borel B , ce qui implique que I_x est un sous-complexe de I , de même dimension. On constate que I_x est un sous-complexe "totalement géodésique" : les géodésiques dans I joignant deux points de I_x dans I sont déjà contenues dans I_x . Alors 5.3 entraîne que I_x est contractile, parce qu'un élément unipotent $\neq 1$ ne peut être contenu dans deux sous-groupes de Borel opposés.

Si x est semi-simple, on démontre que I_x possède des propriétés analogues à celles de I . (ii) résulte alors de l'analogue de 5.4. Comme ci-dessus, on démontre pour x quelconque, que I_x est un sous-complexe de I_{x_s} (où x_s est la partie semi-simple de x), qui est contractile quand x n'est pas semi-simple. Ceci entraîne (i).

5.8. Remarques.- (1) Steinberg a démontré dans [29] que l'existence d'un caractère irréductible de G avec les propriétés de 5.7 entraîne que le nombre d'éléments unipotents de G est $q^{\dim G - r}$ (où r est le rang de $\underline{\underline{G}}$).

(2) Borel et Serre ont construit la "représentation de Steinberg" d'un groupe semi-simple p-adique, avec la méthode de Solomon-Tits, utilisant les immeubles.

6. Modèles de Whittaker

6.1. Soit $\underline{\underline{B}}$ un sous-groupe de Borel de $\underline{\underline{G}}$, avec radical unipotent $\underline{\underline{U}}$. Soit $\underline{\underline{T}}$ un tore k-déployé maximal de $\underline{\underline{B}}$. Soit R le système de racines (relatif à k) de $\underline{\underline{G}}$ par rapport à $\underline{\underline{T}}$. $\underline{\underline{B}}$ détermine un ordre sur R, soit D la base de R définie par l'ordre. Une racine $a \in R$ définit un sous-groupe $\underline{\underline{X}}_a$ de $\underline{\underline{G}}$. $\underline{\underline{U}}$ est engendré par les $\underline{\underline{X}}_a$ avec $a > 0$. De même, U est engendré par les X_a avec $a > 0$. Si $\underline{\underline{G}}$ est semi-simple et k-déployé, alors les $\underline{\underline{X}}_a$ sont des groupes à 1 paramètre, mais ceci n'est pas vrai en général (les possibilités pour les X_a sont discutées dans [28, p. 182]).

Nous dirons qu'un homomorphisme h de U dans C^* est <u>régulier</u> ou que h est un caractère régulier de U si la restriction $h|X_a$ est triviale si et seulement si $a \notin D$. On aura alors, en particulier, que $h|X_a$ est non-triviale si $a \in D$. Réciproquement, cette propriété implique que h est régulier si U vérifie la condition suivante :

(*) le groupe des commutateurs (U,U) est engendré par les X_a avec $a > 0$, $a \notin D$.

(*) est vérifiée "en général" : par exemple, il résulte de [3, p. 66] que si $\underline{\underline{G}}$ est simple et k-déployé, (*) ne peut être en défaut que si $p = 2$ et $\underline{\underline{G}}$ est de type B_n, C_n, F_4, G_2 ou si $p = 3$ et $\underline{\underline{G}}$ est de type G_2. Si (*) est vérifiée, deux caractères réguliers de U sont conjugués par un élément de T ($\underline{\underline{G}}$ étant adjoint).

6.2. THÉORÈME.- <u>Soit</u> h <u>un caractère régulier de</u> U. <u>La multiplicité dans</u> $i_{U \to G}\, h$ <u>d'un caractère irréductible quelconque de</u> G <u>est</u> ≤ 1.

Ce théorème est démontré dans [28, p. 258-262]. Il fut annoncé par Gelfand-Graev dans [14], où l'on trouvera aussi la démonstration pour $G = SL_n(k)$.

Si une représentation irréductible r de G est contenue dans la représentation induite de caractère $i_{U \to G}\, h$ (donc avec multiplicité 1, d'après 6.2) on dira que r admet un <u>modèle de Whittaker</u>. La terminologie est inspirée par celle de Jacquet-Langlands [19, p. 60], dans le cas du groupe $GL_2(K)$, où K

est un corps localement compact non-discret. Si r possède un modèle de Whittaker, il existe un sous-espace V de $C(G)$ (l'espace des fonctions complexes sur G) tel que $f(xu) = f(x)h(u)$ si $f \in V$, $u \in U$, que V est stable par translations à gauche et que r est équivalente à la représentation de G dans V par translations. 6.2 montre qu'un tel V est unique.

Il n'est pas vrai que toute représentation irréductible possède un modèle de Whittaker (par exemple, la représentation triviale n'en a pas un). Mais on constate dans des cas particuliers que la plupart des représentations de G possèdent un modèle de Whittaker. Le problème de décomposer $i_{U \to G} h$ (h régulier) est donc important, mais n'a été résolu que dans des cas très particuliers (voir [14] pour le cas de $SL_2(k)$, où Gelfand et Graev utilisent les fonctions de Bessel sur un corps fini ; voir [15] pour $G = GL_3(k)$). On donnera maintenant quelques résultats sur la question : Quelles représentations admettent un modèle de Whittaker ?

6.3. PROPOSITION.- <u>On suppose</u> (*) <u>vérifiée</u>. <u>Soit</u> f <u>une représentation irréductible parabolique de</u> G , <u>dont le degré est premier à la caractéristique</u> p <u>de</u> k . <u>Alors</u> f <u>admet un modèle de Whittaker</u>.

U est un p-groupe de Sylow de G . Les degrés des représentations irréductibles de U sont donc des puissances de p . Comme le degré de f est premier à p , la restriction $f|U$ doit contenir une représentation irréductible h de U de degré 1 . Si h n'était pas régulier, il y aurait $a \in D$ telle que $h|X_a = 1$ (ici on utilise (*)). Soit $\underline{\underline{P}}$ le sous-groupe parabolique de $\underline{\underline{G}}$ engendré par $\underline{\underline{B}}$ et les $\underline{\underline{X}}_{-b}$ avec $b \in D$, $b \neq a$, soit $\underline{\underline{V}}$ son radical unipotent. On constate que $h|V = 1$, ce qui implique que la restriction $f|V$ contient le caractère trivial de V , en contradiction avec l'hypothèse que f est parabolique. Donc h est régulier et 6.3 résulte par dualité de Frobenius (formule (1)).

<u>Remarque</u>.- Il n'est pas vrai que toute représentation irréductible parabolique possède un modèle de Whittaker. Il y a un contre-exemple dans $Sp_4(k)$ $(p \neq 2)$, où le degré est $\frac{1}{2} q(q - 1)^2$ (voir [4, p. 165]).

6.4. Soit h un caractère régulier de U . Soit $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{M}}.\underline{\underline{V}}$ un sous-groupe parabolique de $\underline{\underline{G}}$ contenant $\underline{\underline{B}}$. On dénote par n un élément du normalisateur de $\underline{\underline{T}}$ dans G qui définit l'élément w_o du groupe de Weyl W qui transforme racines positives en racines négatives. On pose $\underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{M}} \cap {}^n\underline{\underline{U}}$. C'est le radical unipotent d'un groupe de Borel de $\underline{\underline{M}}$ (ceci résulte de 3.3(i)). h définit un homomorphisme $h' : U' \to \mathbf{C}$ par $h'({}^n x) = h(x)$ $(x \in U)$. On constate que h' est un caractère régulier de U' .

La proposition suivante est due à F. Rodier. Le cas (plus difficile) des groupes p-adiques semi-simples déployés est traité dans [22].

6.5. PROPOSITION.- <u>Soit</u> h <u>un caractère régulier de</u> U , <u>soit</u> $f \in C(P)$. <u>Alors</u>

$$\langle i_{U \to G}\, h , i_{P \to G}\, f \rangle_G = \langle i_{U' \to M}\, h' , r_{P \to M}\, f \rangle_M .$$

La formule de Mackey (2) montre que

$$\langle i_{U \to G}\, h , i_{P \to G}\, f \rangle_G = \sum_{P\backslash G/U} \langle r_{{}^xU \to P \cap {}^xU}\, ({}^x h) , r_{P \to P\cap {}^xU}\, (f) \rangle_{P \cap {}^xU} .$$

Or, $f \in C(P)$ étant constante sur les classes modulo V , on voit que les termes de la somme sont 0 , sauf si la restriction de ${}^x h$ à $P \cap {}^x U$ est le caractère trivial.

Soit W' le normalisateur de $\underline{\underline{T}}$ dans M . D'après [5, p. 28], il existe une bijection de $W'\backslash W$ sur $P\backslash G/U$, qui associe à la classe $W'w$ la double classe $Pn_w U$, n_w étant un représentant de w . Or, la restriction de ${}^{n_w}h$ à $P \cap {}^{n_w}U$ est triviale si et seulement si la condition suivante est vérifiée : si $a \in R$ est telle que le groupe $\underline{\underline{X}}_a$ correspondant est contenu dans $\underline{\underline{P}}$ et que $w^{-1}a > 0$, alors $w^{-1}a \not\in D$. Posons $R' = \{a \in R \mid \underline{\underline{X}}_a \subset \underline{\underline{P}}\}$, c'est un sous-système parabolique de R (au sens de [5, p. 160]). $R' \cap (-R')$ est un système de racines dont le groupe de Weyl est W' . La proposition résulte maintenant du lemme suivant.

6.6. <u>Lemme</u>.- <u>Soit</u> $w \in W$ <u>tel que</u> $a \in R'$, $w^{-1}a > 0$ <u>implique</u> $w^{-1}a \not\in D$. <u>Alors</u> $W'w$ <u>contient</u> w_o . <u>Réciproquement</u>, <u>les éléments de</u> $W'w_o$ <u>ont cette propriété</u>.

La démonstration du lemme est laissée au lecteur (on trouve un résultat voisin dans [28, p. 257]).

En prenant dans 6.5 pour f le caractère d'une représentation irréductible parabolique g de P, dont la restriction à M admet un modèle de Whittaker, on voit qu'il y a une seule représentation irréductible r de G, telle que r soit une composante irréductible de la représentation induite de caractère $i_{P \to G}\, f$, avec multiplicité 1. Si $P = B$, $f = 1$, on voit facilement que r est la représentation de Steinberg. Dans le cas général, on aura des représentations de Steinberg généralisées.

7. Utilisation de tores maximaux

7.1. Soit $\underline{\underline{T}}$ un k-tore maximal de $\underline{\underline{G}}$. Soit $N_G(\underline{\underline{T}})$ son normalisateur dans G. Nous posons $W(\underline{\underline{T}}) = N_G(\underline{\underline{T}})/T$. Le groupe $W(\underline{\underline{T}})$ opère sur T et sur le groupe des caractères $\hat{T}$ de T. Un élément $t \in T$ ou un caractère $f \in \hat{T}$ est *régulier* si son groupe d'isotropie dans $W(\underline{\underline{T}})$ est trivial.

On sait que le nombre d'éléments $|T|$ de T est donné par $f(q)$, où f est un polynôme unitaire de degré $r = \operatorname{rang} \underline{\underline{G}}$, à coefficients entiers (ne dépendant pas du corps de base k), voir [4, p. 188]. On en déduit qu'il existe une constante $c > 0$ (indépendante de k) telle que, T_{reg} désignant l'ensemble des éléments réguliers de T,

$$\big|\,|T_{reg}| - q^r\big| \leq c\,q^{r-1} ,$$

ce que nous écrivons

$$|T_{reg}| = q^r + O(q^{r-1}) .$$

Un résultat analogue est valable pour les caractères réguliers [26, n° 6].

Nous dirons que $\underline{\underline{T}}$ est *minisotrope* si, $\underline{\underline{C}}$ désignant le centre de $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{T}}/\underline{\underline{C}}$ est un k-tore anisotrope.

7.2. THÉORÈME.- *On suppose que les éléments non-réguliers de* T *sont contenus dans un sous-groupe de* T *d'ordre* $O(q^{r-1})$.

(i) Il existe $q^r + O(q^{r-1})$ caractères réguliers f de T, auxquels on peut associer un caractère irréductible $c_{\underline{\underline{T}},f}$ de G, le nombre des caractères irréductibles de G ainsi obtenus est $|W(\underline{\underline{T}})|^{-1} q^r + O(q^{r-1})$;

(ii) Si, de plus, $\underline{\underline{T}}$ est minisotrope, alors les $c_{\underline{\underline{T}},f}$, sauf $O(q^{r-1})$ d'entre eux, sont paraboliques.

C'est démontré dans [26, n° 7]. Pour prouver (i), on considère deux caractères réguliers f_1, f_2 de T et on démontre que si on les prend dans un sous-ensemble convenable de $\hat{T}$, à $q^r + O(q^{r-1})$ éléments, la fonction induite $i_{T \to G}(f_1 - f_2)$ est la différence de deux caractères irréductibles de G (qui seront $c_{\underline{\underline{T}},f_1}$ et $c_{\underline{\underline{T}},f_2}$, au signe près). Le point essentiel pour la démonstration de (ii) est que le nombre de composantes irréductibles d'un caractère $i_{P \to G} f$, où P est parabolique et où f est un caractère irréductible parabolique de P, est borné par un nombre qui ne dépend pas de q (ce qui résulte de 3.6).

Remarques.- (1) Le raisonnement pour démontrer 7.2(i) est analogue à celui qu'on utilise pour construire des "caractères exceptionnels" d'un groupe fini.

(2) Si on fait l'hypothèse suivante sur T (plus forte que celle de 7.2) : l'élément neutre est le seul élément non-régulier de T, alors T est un " T.I.-set " au sens de [13] et on peut appliquer les résultats de [13] pour construire des caractères. Dans ce cas, le résultat est un peu meilleur que celui de 7.2(i) qui est seulement intéressant si q est assez grand.

7.3. Valeurs des $c_{\underline{\underline{T}},f}$.

On a des conjectures assez précises sur les valeurs des $c_{\underline{\underline{T}},f}$. Plus généralement, I. G. Macdonald a conjecturé qu'on peut, si $\underline{\underline{T}}$ est quelconque, associer à un caractère régulier f de T un caractère irréductible $c_{\underline{\underline{T}},f}$ de G avec les propriétés suivantes :

(a) son degré est $|T|^{-1}|U|^{-1}|G|$ (où, comme auparavant, U est un p-groupe de Sylow de G) ;

(b) si $t \in T$ est régulier, alors

$$c_{\underline{\underline{T}},f}(t) = (-1)^{r+s} \sum_{w \in W(\underline{\underline{T}})} f(w.t) ,$$

où r est le rang semi-simple de $\underline{\underline{G}}$, et s le k-rang de $\underline{\underline{T}}$.

(c) si $\underline{\underline{T}}'$ est un k-tore maximal de $\underline{\underline{G}}$ qui n'est pas un k-conjugué de $\underline{\underline{T}}$ et si $t' \in T'$ est régulier, alors $c_{\underline{\underline{T}},f}(t') = 0$.

Autant que je sache, des résultats de ce genre n'ont pas été démontrés.

On remarquera que le degré conjectural de (a) est premier à p . Si $c_{\underline{\underline{T}},f}$ était parabolique, alors 6.3 entraînerait que $c_{\underline{\underline{T}},f}$ aurait un modèle de Whittaker.

Mais les conjectures ci-dessus ne suffisent pas pour déterminer les valeurs $c_{\underline{\underline{T}},f}(x)$ pour $x \in G$ quelconque. Pour cela, on aura probablement besoin de l'algèbre de Lie finie associée à $\underline{\underline{G}}$.

7.4. Utilisation de l'algèbre de Lie.

Faisons l'hypothèse suivante sur $\underline{\underline{G}}$: $\underline{\underline{G}}$ est quasi-simple (ce qui veut dire qu'il est semi-simple et que son système de racines R est irréductible) ou bien $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{GL}}_n$.

Aussi, nous devons restreindre la caractéristique p . On suppose :

(**) si $\underline{\underline{G}}$ est quasi-simple, aucun des coefficients de la plus grande racine de R (pour un ordre fixé) n'est divisible par p et si R est de type A_ℓ alors p ne divise pas $\ell + 1$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie finie sur k formée par les champs de vecteurs tangents sur $\underline{\underline{G}}$ qui sont k-rationnels et invariants à gauche. G opère sur $\mathfrak{g}$ par la représentation adjointe Ad .

Si (**) est vérifiée, il existe une bijection c de l'ensemble des éléments unipotents de G sur l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$, telle que $c(xux^{-1}) = \mathrm{Ad}(x)\, c(u)$ (voir [24]).

On sait, en outre, que sous l'hypothèse (**), il existe sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ une forme bilinéaire symétrique $B(\ ,\ )$ non-dégénérée, qui est $\mathrm{Ad}(G)$-invariante (voir [4, p. 184]). Nous fixons un caractère non-trivial a du groupe additif de k et nous posons

$$\langle X,Y\rangle = a(B(X,Y)) \qquad (X\ ,\ Y \in \mathfrak{g})\ .$$

Si maintenant $f \in C(\mathfrak{g})$, on définit sa transformation de Fourier $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(X) = q^{-\frac{d}{2}} \sum_{Y \in \mathfrak{g}} \langle X,Y\rangle\, f(Y)\ ,$$

où $d = \dim \underline{\underline{G}}$.

Soit $\underline{\underline{T}}$ un k-tore maximal de $\underline{\underline{G}}$, soit $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}$ qu'il définit. Fixons $A \in \mathfrak{t}$ et soit $O = \mathrm{Ad}(G)A$ son orbite dans $\mathfrak{g}$. Notons e_O la fonction caractéristique de O .

Soit f un caractère régulier de T, soit $c_{\underline{\underline{T}},f}$ un caractère irréductible de 7.2 (ou bien un caractère conjectural de 7.3). Alors on peut conjecturer :

(d) Soit $u \in G$ unipotent. Si q est assez grand, il existe $A \in \mathfrak{t}$ tel que

$$c_{\underline{\underline{T}},f}(u) = q^{-\frac{r}{2}}\, \widehat{e_O}(c(u))\ .$$

Si $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{GL}}_n$, on peut vérifier qu'il existe des caractères $c_{\underline{\underline{T}},f}$ comme au n° 7.2. Ils vérifient (d) (voir [25]).

COMMENTAIRE

Il paraît que les assertions (i) et (iii) du Théorème 4.4 (page 218) sont trop optimistes. (i) n'est pas vraie en toute généralité et admet quelques exceptions dans les types E_7 et E_8 .

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BENARD - On the Schur indices of characters of the exceptional Weyl groups, Ann. of Math., 94 (1971), 89-107.

[2] C. T. BENSON and C. W. CURTIS - On the degrees and rationality of certain characters of finite Chevalley groups, Trans. Am. Math. Soc., 165 (1972), 251-274.

[3] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, Publ. Math., I.H.E.S., n° 27 (1965), 55-151.

[4] A. BOREL et al. - Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., n° 131, Springer-Verlag (1970).

[5] N. BOURBAKI - Groupes et Algèbres de Lie, chap. 4, 5, 6, Hermann (1968).

[6] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math., 84 (1956), 97-205.

[7] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local, Publ. Math., I.H.E.S., n° 41 (1972), 5-252.

[8] B. CHANG and R. REE - The character table of $G_2(q)$, à paraître.

[9] C. W. CURTIS - The Steinberg character of a Finite Group with a (B,N)-pair, J. Alg., 4 (1966), 433-441.

[10] C. W. CURTIS, N. IWAHORI and R. KILMOYER - Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B,N)-pairs, Publ. Math., I.H.E.S., n° 40 (1971), 81-116.

[11] C. W. CURTIS and I. REINER - Representations theory of finite groups and associative algebras, Interscience (1966).

[12] H. ENAMOTO - The characters of Chevalley groups of type (G_2) over finite fields of characteristic 2 , à paraître.

[13] W. FEIT - Characters of finite groups, Benjamin (1967).

[14] I. M. GELFAND and M. I. GRAEV - Construction of irreducible representations of simple algebraic groups over a finite field, Sov. Math., 3 (1962), 1646-1649.

[15] S. I. GELFAND - Représentations du groupe linéaire général sur un corps fini (en russe), Mat. Sbornik, 83 (125), (1970), 15-41.

[16] J. A. GREEN - The characters of the finite linear groups, Trans. Am. Math. Soc., 80 (1955), 402-447.

[17] J. A. GREEN - On the Steinberg Characters of Finite Chevalley Groups, Math. Zs., 117 (1970), 272-288.

[18] HARISH-CHANDRA - Eisenstein series over finite fields, dans : Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag, (1970), 76-88.

[19] H. JACQUET and R. LANGLANDS - Automorphic Forms on GL(2) , Lecture Notes in Math, n° 114, Springer-Verlag, (1970).

[20] R. KILMOYER - Some irreducible complex representations of a finite group with BN pair, Thèse, M. I. T. (1969).

[21] I. G. MACDONALD - Some irreducible representations of Weyl groups, Bull. London Math. Soc., 4(1972), 148-150.

[22] F. RODIER - Modèles de Whittaker des représentations admissibles des groupes réductifs p-adiques déployés, à paraître.

[23] L. SOLOMON - The Steinberg character of a finite group with BN-pair, dans : Theory of Finite Groups, Benjamin (1969), 213-221.

[24] T. A. SPRINGER - The unipotent variety of a semisimple group, dans : Algebraic Geometry (Bombay Colloquium), Oxford Univ. Press (1969), 373-391.

[25] T. A. SPRINGER - Generalization of Green's polynomials, dans : Proc. Symp. Pure Math., n° 21, Am. Math. Soc. (1971), 149-153.

[26] T. A. SPRINGER - The characters of certain finite groups, à paraître dans : Proc. Summer School Group Repr., Budapest, 1971.

[27] B. SRINIVASAN - The characters of the finite symplectic group Sp(4,q) , Trans. Am. Math. Soc., 131 (1968), 488-525.

[28] R. STEINBERG - Lectures on Chevalley Groups, Yale Univ. (1967).

[29] R. STEINBERG - Endomorphisms of linear algebraic groups, Mem. Am. Math. Soc., n° 80 (1968).