PIERRE CARTIER

Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs II : prolongement analytique

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 418, p. 1-33

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__1_0>

Séminaire BOURBAKI 418-01
25e année, 1972/73, n° 418 Novembre 1972

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE QUANTIQUE DES CHAMPS II : PROLONGEMENT ANALYTIQUE

par Pierre CARTIER

Dans le premier exposé de cette série [1], après avoir décrit la structure générale de la Mécanique Quantique, on a caractérisé le champ libre selon Segal, et esquissé les méthodes de Glimm-Jaffe et Segal pour construire le champ de type $(\varphi^4)_2$ (interaction en φ^4, à 2 dimensions d'espace-temps). Depuis, Nelson [5,6,7,8] a introduit une méthode nouvelle très puissante qui permet d'associer un champ quantique à certaines distributions aléatoires satisfaisant à une propriété markovienne. Le champ quantique est situé dans l'espace-temps $\mathbb{M}^4$ avec la métrique de Minkowski $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$, alors que la distribution aléatoire de Nelson se trouve dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^4$ avec la métrique $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 + t^2$. On passe de l'un à l'autre en changeant t en it avec $i = \sqrt{-1}$; heuristiquement ce passage transforme les intégrales de Feynman (qui n'existent pas stricto sensu) en des intégrales par rapport à de vraies mesures positives sur des espaces fonctionnels. La méthode de Nelson est en plein développement ; Rosen, Guerra et Simon [3,14] entre autres ont appliqué les méthodes de la mécanique statistique à la distribution aléatoire de Nelson et obtenu des résultats prometteurs. Nous espérons revenir là-dessus dans l'avenir.

Voici le plan de l'exposé. Dans la première partie, nous indiquons les arguments heuristiques de Schwinger [10,11] et Symanzik [16,17,18] qui conduisent par prolongement analytique à associer à un champ quantique une mesure dans un espace fonctionnel sur $\mathbb{E}^4$. La deuxième partie est un résumé de la théorie de Wightman [15] qui justifie les prolongements analytiques nécessaires. Enfin, la troisième partie est consacrée à décrire la méthode de Nelson.

§ 1. Considérations heuristiques

1.1. Equation du champ

Soit $\varphi(x) = \varphi(\vec{x},t)$ le champ associé aux mésons de masse m en interaction quartique. Pour chaque $x = (\vec{x},t)$ dans l'espace-temps $\mathbb{M}^4$ (on note $\vec{x}$ un vecteur de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ et t le temps), $\varphi(x)$ est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\underline{K}$ et l'on a l'équation d'évolution

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{x},t) - \Delta\varphi(\vec{x},t) + m^2\varphi(\vec{x},t) + 4g\,\varphi(\vec{x},t)^3 = 0$$

et les relations de commutation canoniques à temps fixé

$$(2) \qquad [\varphi(\vec{x},t)\,,\varphi(\vec{y},t)] = [\dot{\varphi}(\vec{x},t)\,,\dot{\varphi}(\vec{y},t)] = 0$$

$$(3) \qquad [\varphi(\vec{x},t)\,,\dot{\varphi}(\vec{y},t)] = i\,\delta(\vec{x}-\vec{y})\ .$$

On note comme d'habitude par un point la dérivée par rapport au temps et Δ est le laplacien dans $\mathbb{E}^3$; de plus, g est une constante positive et le système d'unités choisi est tel que $\hbar = c = 1$.

Les équations précédentes sont ambiguës. En effet, la présence de la "fonction" de Dirac δ dans (3) indique que $\varphi(\vec{x},t)$ est en réalité une distribution en $\vec{x}$, et le cube $\varphi(\vec{x},t)^3$ doit donc être défini par régularisation. Formellement, l'équation (1) se résout comme suit : on se donne une solution des relations de commutation

$$(4) \qquad [\varphi_o(\vec{x})\,,\varphi_o(\vec{y})] = [\pi_o(\vec{x})\,,\pi_o(\vec{y})] = 0 \quad , \quad [\varphi_o(\vec{x})\,,\pi_o(\vec{y})] = i\delta(\vec{x}-\vec{y})\ ,$$

puis on construit un opérateur auto-adjoint H , l'hamiltonien, tel que

$$(5) \qquad \frac{1}{i}\,[\varphi_o(\vec{x})\,,H] = \pi_o(\vec{x})$$

$$(6) \qquad \frac{1}{i}\,[\pi_o(\vec{x})\,,H] = \Delta\varphi_o(\vec{x}) - m^2\varphi_o(\vec{x}) - 4g\,\varphi_o(\vec{x})^3 \quad ;$$

enfin, le champ à l'instant t est donné par

(7) $$\varphi(\vec{x},t) = e^{itH}\,\varphi_o(\vec{x})\,e^{-itH}\;.$$

On a donc les conditions initiales

(8) $$\varphi(\vec{x},0) = \varphi_o(\vec{x}) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{x},0) = \pi_o(\vec{x})\;.$$

De plus, on souhaite que H soit positif, et qu'il existe un vecteur Ψ_o de norme 1, défini à la multiplication près par une constante de module 1, qui satisfasse à $H\Psi_o = 0$. L'état correspondant à Ψ_o est le vide physique.

1.2. Définition des fonctions de Schwinger

Supposons qu'on ait rempli le programme précédent (ce que personne ne sait faire complètement). La valeur moyenne dans le vide d'une variable quantique A est $\langle A\rangle = \langle\Psi_o|A|\Psi_o\rangle$. En principe, les quantités physiques mesurables dans une expérience de diffusion nucléaire peuvent se calculer à l'aide des fonctions de Green $G_\pm\,(x_1\,;\ldots;\,x_n)$ dont nous rappelons la définition.

Soient $x_1 = (\vec{x}_1,t_1)\,,\ldots,\,x_n = (\vec{x}_n,t_n)$ des points de $\mathbb{M}^4$; supposons d'abord que les temps $t_1,\ldots,t_n$ soient deux à deux distincts ; il existe une unique permutation $(j_1,\ldots,j_n)$ de $(1\ 2\ \ldots\ n)$ telle que $t_{j_1} > \ldots > t_{j_n}$. On pose alors

(9) $$G_+\,(x_1\,;\ldots;\,x_n) = \langle\varphi(\vec{x}_{j_1}\,,\,t_{j_1})\ \ldots\ \varphi(\vec{x}_{j_n}\,,\,t_{j_n})\rangle\;.$$

La définition de G_- est analogue et utilise cette fois l'inégalité $t_{j_1} < \ldots < t_{j_n}$. On peut alors prolonger la définition de $G_\pm\,(x_1\,;\ldots;\,x_n)$ au cas où les arguments $x_1,\ldots,x_n$ sont deux à deux distincts de manière à avoir les propriétés :

a) chacune des fonctions $G_\pm\,(x_1\,;\ldots;\,x_n)$ dépend symétriquement de $x_1,\ldots,x_n$;

b) pour tout élément Λ du groupe de Poincaré $P_+^\uparrow$ (cf. 2.1), on a

$$(10) \qquad G_{\pm}(\Lambda x_1 ;\ldots; \Lambda x_n) = G_{\pm}(x_1 ;\ldots; x_n)$$

("invariance relativiste") ;

c) on a $G_-(x_1 ;\ldots; x_n) = \overline{G_+(x_1 ;\ldots; x_n)}$ (car $\varphi(x)$ est hermitien).

D'après (7) et l'invariance du vide $e^{-itH}\Psi_0 = \Psi_0$, on a

$$(11) \qquad G_+(x_1 ;\ldots; x_n) = \langle \varphi_0(\vec{x}_1) e^{-i(t_1-t_2)H} \varphi_0(\vec{x}_2) \ldots \varphi_0(\vec{x}_{n-1}) e^{-i(t_{n-1}-t_n)H} \varphi_0(\vec{x}_n) \rangle .$$

Supposons d'abord qu'on ait chaque fois que, $t_1 > \ldots > t_n$. Comme l'opérateur H est positif, on peut définir les opérateurs $e^{-i(t_j-t_{j+1})\zeta H}$ pour $j = 1,\ldots,n-1$ et ζ complexe avec $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$. Utilisant (11) et la propriété de symétrie de $G_{\pm}$, on en déduit l'existence d'une fonction $H(x_1 ;\ldots; x_n | \zeta)$ holomorphe pour $\operatorname{Im} \zeta < 0$ avec les valeurs au bord $G_+(\vec{x}_1 , \zeta t_1 ;\ldots; \vec{x}_n , \zeta t_n)$ pour $\zeta > 0$ et $G_-(\vec{x}_1 , \zeta t_1 ;\ldots; \vec{x}_n , \zeta t_n)$ pour $\zeta < 0$. Les fonctions de Schwinger sont définies par

$$(12) \qquad S_n(x_1 ;\ldots; x_n) = H(x_1 ;\ldots; x_n \mid -i) .$$

De manière heuristique, on a remplacé $t_1,\ldots,t_n$ par $-it_1,\ldots,-it_n$ dans $G_+(x_1 ;\ldots; x_n)$ ou $G_-(x_1 ;\ldots; x_n)$; on doit considérer S_n comme définie dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^4$.

1.3. Propriétés des fonctions de Schwinger

Par prolongement analytique des propriétés de $G_{\pm}$, on "démontre" les propriétés suivantes des fonctions de Schwinger :

a) $S_n(x_1 ;\ldots; x_n)$ est fonction symétrique des arguments distincts $x_1,\ldots,x_n$;

b) les fonctions S_n sont invariantes par le groupe des déplacements de l'espace euclidien $\mathbb{E}^4$;

c) on a $S_0 = 1$, $S_1 = 0$ et le système infini d'équations (pour $n \geq 2$)

(13) $$(-\Delta_1 + m^2)S_n(x_1\ ;\ldots;\ x_n) =$$
$$\sum_{j=2}^{n} \delta(x_1 - x_j)S_{n-2}(x_2\ ;\ldots;\widehat{x_j}\ ;\ldots;x_n) - 4g\ S_{n+2}(x_1;\ x_1\ ;\ x_1\ ;\ x_2\ ;\ldots;\ x_n)\ .$$

Dans cette équation, Δ est le laplacien dans $\mathbb{E}^4$, l'indice 1 de Δ indique que cet opérateur agit sur le premier argument de S_n et le chapeau sur x_j signifie qu'il faut omettre cette variable.

Lorsque $g > 0$, l'équation (13) pose de grosses difficultés, car il faut d'abord prolonger la définition de S_n au cas d'arguments égaux, et il y a certainement des singularités sur ce lieu. Une solution perturbative de (13) est une série formelle en g satisfaisant formellement à cette équation. On peut donner des prescriptions précises de renormalisation pour décrire une telle solution ; on consultera Symanzik [18] sur ce sujet.

Au lieu de la suite des fonctions $S_n(x_1\ ;\ldots;\ x_n)$, Schwinger introduit aussi la fonctionnelle génératrice

(14) $$J(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \ldots \int S_n(x_1;\ldots;x_n)u(x_1)\ldots u(x_n)\ dx_1\ldots dx_n\ .$$

De manière générale, la dérivée fonctionnelle $F_x(u) = \frac{\delta}{\delta u(x)} F(u)$ est définie par la formule

(15) $$\int F_x(u)v(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon}$$

et l'on pose $F_{xy}(u) = \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta}{\delta u(y)} F(u)$, etc... Avec ces notations, on déduit de (13) l'équation

(16) $$(-\Delta + m^2)J_x(u) = -u(x)J(u) + 4g\ J_{xxx}(u)\ ,$$

et l'on retrouve S_n par la formule

(17) $$S_n(x_1\ ;\ldots;\ x_n) = i^{-n}J_{x_1\ldots x_n}(0)\ .$$

Dans le cas général, il est douteux qu'une solution (S_n) de (13) rende la série (14) convergente pour suffisamment de "fonctions tests" u ; il est plus raisonnable de partir d'une solution $J(u)$ de l'équation (16) et de <u>définir</u> S_n par (17); on peut espérer obtenir ainsi une solution de (13).

Un cas où tout ceci fonctionne parfaitement est celui du champ libre $g = 0$. Notons G la solution élémentaire de l'opérateur $-\Delta + m^2$ et posons

(18) $$G(u,v) = \iint G(x-y)u(x)v(y)dx\,dy \, .$$

Les fonctions de Schwinger sont alors données par $S_{2m+1} = 0$ et

(19) $$S_{2m}(x_1\,;\ldots;\,x_{2m}) = \sum \prod_{k=1}^{m} G(x_{i(k)} - x_{j(k)})$$

avec une sommation étendue aux permutations $(i(1) \ldots i(m)\; j(1) \ldots j(m))$ de $(1\ldots 2m)$ telles que $i(1) < \ldots < i(m)$, $i(1) < j(1)$, ..., $i(m) < j(m)$. Cette relation compliquée équivaut à

(20) $$J(u) = \exp -\tfrac{1}{2}\, G(u,u) \, .$$

1.4. <u>La méthode du champ euclidien</u>

Schwinger et Symanzik ont considéré les solutions de l'équation (13) de la forme

(21) $$S_n(x_1\,;\ldots;\,x_n) = \langle \Psi^E | \varphi^E(x_1)\ldots\varphi^E(x_n) | \Psi^E \rangle \, .$$

Dans cette équation, φ^E et π^E sont deux champs hermitiens $(\varphi^E(x)^* = \varphi^E(x))$ définis sur l'espace euclidien $\mathbf{E}^4$ et Ψ^E un vecteur de norme 1 dans l'espace de Hilbert $\underline{H}$ où agissent $\varphi^E(x)$ et $\pi^E(x)$; on impose les relations

(22) $$[\varphi^E(x),\varphi^E(y)] = [\pi^E(x),\pi^E(y)] = 0 \quad , \quad [\varphi^E(x),\pi^E(y)] = i\delta(x-y)$$

(23) $$\{2i\,\pi^E(x) - \Delta\varphi^E(x) + m^2\varphi^E(x) + 4g:\varphi^E(x)^3:\}\Psi^E = 0 \, .$$

Il est facile de donner une version plus rigoureuse de ces relations en remplaçant les S_n par la fonctionnelle $J(u)$ et les champs $\varphi^E(x)$ et $\pi^E(x)$ par les opérateurs unitaires A_u et B_u définis formellement par

$$A_u = \exp i \int u(x)\varphi^E(x)\,dx \quad , \quad B_u = \exp i \int u(x)\pi^E(x)\,dx \, .$$

On prend pour fonctions tests les éléments de l'espace $\underline{S} = \underline{S}(\mathbb{E}^4)$ de Schwartz. Les équations (21) à (23) prennent alors les formes respectives

(24) $$J(u) = \langle \Psi^E | A_u | \Psi^E \rangle$$

(25) $$A_{u+v} = A_u A_v \quad , \quad B_{u+v} = B_u B_v \quad , \quad A_u B_v = \{\exp - i \int uv \, dx\} . B_v A_u$$

(26) $$B_u \, \Psi^E = \{\exp - \tfrac{1}{2} M(u , \varphi^E)\} . \Psi^E$$

avec

(27) $$M(u,\varphi^E) = \int \left[\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{4} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 + \tfrac{1}{2} m^2 u^2 + (-\Delta u + m^2 u)\varphi^E + g \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} u^k :(\varphi^E)^{4-k}: \right] dx \; .$$

La définition de $M(u,\varphi^E)$ demanderait quelques élucidations. Enfin, il est raisonnable de postuler que les opérateurs A_u et B_u sont fonctions fortement continues de $u \in \underline{S}$.

Pour qu'on puisse représenter J sous la forme (24), il est nécessaire et suffisant que ce soit une fonction continue de type positif sur $\underline{S}$. D'après le théorème de Minlos, il revient au même de dire que J est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité μ sur le dual $\underline{S}'$ de $\underline{S}$. En formulant explicitement les propriétés des puissances régularisées $:\varphi^E(x)^n:$, on aboutit à l'énoncé suivant du problème :

<u>Construire une mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> $\underline{S}'$ <u>et des applications</u> μ-<u>mesurables</u> $T \longmapsto :T^n:$ <u>de</u> $\underline{S}'$ <u>dans lui-même, satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

a) μ <u>est invariante par le groupe des déplacements de</u> $\mathbb{E}^4$.

b) <u>Le support de</u> $:T^n:$ <u>est contenu dans celui de</u> T <u>pour tout</u> $n \geq 0$ <u>et</u> μ-<u>presque tout</u> T .

c) <u>Pour</u> $n \geq 1$, $u \in \underline{S}$ <u>et</u> μ-<u>presque tout</u> $T \in \underline{S}'$, <u>on a</u> $:T^0: = 1$, $:T^1: = T$ <u>et</u>

(28) $$:(T + u)^n: \; = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k :T^{n-k}:$$

(29) $$\int_{\underline{S}'} \langle u, :T^n: \rangle \, d\mu(T) = 0 .$$

d) <u>Pour</u> $u \in \underline{S}$ et $T \in \underline{S}'$, <u>posons</u>

(30) $$L(u,T) = \exp\langle \Delta u - m^2 u, -T + \tfrac{1}{2} u \rangle - g \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} \langle (-u)^k, :T^{4-k}: \rangle ;$$

<u>on a alors</u>

(31) $$\int_{\underline{S}'} F(T+u)\,d\mu(T) = \int_{\underline{S}'} F(T)L(u,T)\,d\mu(T)$$

<u>pour tout</u> $u \in \underline{S}$ <u>et toute fonctionnelle mesurable et positive</u> F <u>sur</u> $\underline{S}'$. (1)

Si μ et les puissances $:T^n:$ sont ainsi définies, on construit le champ euclidien par une méthode due à Gelfand [2]. On pose $\underline{H} = L^2(\underline{S}',\mu)$ et Ψ^E est la fonction constante 1 sur $\underline{S}'$; de plus, on a

$$A_u F(T) = e^{i\langle u,T\rangle} F(T) \quad , \quad B_u F(T) = L(-u,T)^{\frac{1}{2}} F(T+u)$$

pour $u \in \underline{S}$, $T \in \underline{S}'$ et $F \in \underline{H}$.

1.5. <u>Epilogue</u>

Le problème initial était la résolution de l'équation d'évolution

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\vec{x},t) - \Delta\varphi(\vec{x},t) + m^2\varphi(\vec{x},t) + 4g :\varphi(\vec{x},t)^3: = 0$$

où φ et la dérivée temporelle $\dot{\varphi}$ satisfont aux relations de commutation canoniques (2) et (3). De plus, φ satisfait implicitement à un certain nombre de conditions, dont la meilleure expression est donnée par les axiomes de Wightman (cf. 2.2), et il s'agit de formuler précisément les exigences requises par les puissances $:\varphi^n:$.

A la fin du n° 1.4, nous avons formulé de manière entièrement rigoureuse des conditions portant sur une mesure de probabilité μ sur $\underline{S}'$; une telle μ définit une fonctionnelle J et des distributions tempérées S_n par

(32) $$J(u) = \int_{\underline{S}'} e^{i\langle u,T\rangle} d\mu(T) \quad , \quad S_n = \int_{\underline{S}'} (\overbrace{T \otimes \ldots \otimes T}^{n})\,d\mu(T)$$

(1) voir Notes, page 27.

et (S_n) est une "solution" des équations de Schwinger (13) (qui sont mal définies). Connaissant les fonctions de Schwinger S_n, on pourrait essayer de reconstruire par prolongement analytique les fonctions de Green $G_\pm(x_1;\dots;x_n)$ et les valeurs moyennes de vide $\langle\varphi(x_1)\dots\varphi(x_n)\rangle$, d'où le champ $\varphi(x)$ par la méthode de Wightman (cf. 2.3).

La situation est actuellement la suivante. Nelson a donné une méthode directe (sans passer par les fonctions S_n) pour associer un champ quantique φ au sens de 2.2 à toute mesure de probabilité μ sur $\underline{S}'$ satisfaisant à un certain nombre de conditions énumérées en 3.2 et 3.3. Pour l'instant, on ne sait pas construire de solution μ au problème posé en 1.4, encore moins vérifier les conditions de Nelson, ni montrer en quel sens le champ φ de la construction de Nelson résout le problème initial. ([2])

§ 2. La théorie des champs selon Wightman

2.1. Géométrie de l'espace-temps complexe

Comme d'habitude, $\mathbb{C}^4$ se compose des vecteurs à 4 composantes complexes $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, et l'on y définit un produit scalaire par

(33) $$x\cdot y = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 .$$

L'espace de Minkowski $\mathbb{M}^4$ est identifié à l'ensemble des vecteurs à composantes réelles, et l'espace euclidien $\mathbb{E}^4$ à l'ensemble des vecteurs $[x_0,x_1,x_2,x_3] = (ix_0,x_1,x_2,x_3)$ avec x_0, x_1, x_2, x_3 réels. Le cône futur V_+ (resp. passé V_-) dans $\mathbb{M}^4$ se compose des vecteurs x avec $x_0 > 0$ (resp. $x_0 < 0$) et $x.x < 0$. On note $\bar{V}_+$ l'adhérence de V_+ et $\bar{V}_-$ celle de V_-. Le groupe de Lorentz complexe $L(\mathbb{C})$ se compose des transformations linéaires dans $\mathbb{C}^4$ conservant le produit scalaire (33) ; la composante connexe de l'identité $L_+(\mathbb{C})$ dans $L(\mathbb{C})$ se compose des matrices de déterminant 1. Les matrices

([2]) voir Notes, page 27.

réelles appartenant à $L(\mathbb{C})$ forment le groupe de Lorentz L ; la composante connexe $L_+^\uparrow$ de L se compose des $\Lambda \in L$ tels que $\det \Lambda = 1$, $\Lambda(V_+) = V_+$. Le groupe de Poincaré complexe $\underline{P}(\mathbb{C})$ (resp. réel $\underline{P}$) se compose des transformations $x \longmapsto \Lambda x + a$ avec $\Lambda \in L(\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}^4$ (resp. $\Lambda \in L$ et $a \in \mathbb{M}^4$). Notations $\underline{P}_+(\mathbb{C})$ et $\underline{P}_+^\uparrow$ pour les composantes connexes de ces derniers groupes.

Par ailleurs, soit $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices complexes de type 2×2 . On note $G(\mathbb{C})$ l'ensemble des transformations $X \longmapsto AXB + C$ dans $M_2(\mathbb{C})$ avec A , B , C dans $M_2(\mathbb{C})$ et $\det A = \det B = 1$; le sous-groupe G de $G(\mathbb{C})$ s'obtient en imposant les relations $B = A^*$, $C = C^*$. On définit un isomorphisme $\gamma : \mathbb{C}^4 \to M_2(\mathbb{C})$ par

$$\gamma(x_o,x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_o + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_o - x_3 \end{pmatrix} . \tag{34}$$

On a $\det \gamma(x) = -x.x$; de plus $x \in \mathbb{M}^4$ (resp. $x \in \bar{V}_+$) si et seulement si $\gamma(x)$ est hermitienne (resp. et positive). Enfin, il existe un homomorphisme $\Lambda_\mathbb{C} : G(\mathbb{C}) \to \underline{P}(\mathbb{C})$ caractérisé par $g.\gamma(x) = \gamma(\Lambda_\mathbb{C}(g).x)$ pour $g \in G(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^4$; le noyau de $\Lambda_\mathbb{C}$ se compose des transformations $X \longmapsto \pm X$ et son image est $\underline{P}_+(\mathbb{C})$. Donc $G(\mathbb{C})$ est un <u>revêtement universel</u> (à deux feuillets) de $\underline{P}_+(\mathbb{C})$. La restriction Λ de $\Lambda_\mathbb{C}$ à G définit G comme revêtement universel (à deux feuillets) de $\underline{P}_+^\uparrow$.

On définit ensuite des ouverts $\underline{T}_n$, $\underline{T}'_n$, $\underline{S}_n$, $\underline{S}'_n$ et $\underline{S}_n^P$ de $(\mathbb{C}^4)^n$. Tout d'abord $\underline{T}_n$ se compose des $x = (x_1,\ldots,x_n)$ tels que $\operatorname{Im} x_j \in V_-$ pour $1 \leq j \leq n$, et $\underline{T}'_n = \bigcup_{\Lambda \in L_+(\mathbb{C})} \Lambda.\underline{T}_n$. Par ailleurs, $\underline{S}_n$ (resp. $\underline{S}'_n$) se compose des $(x_1,\ldots,x_n)$ tels que $(x_1 - x_2 , x_2 - x_3 ,\ldots, x_{n-1} - x_n)$ appartienne à $\underline{T}_{n-1}$ (resp. $\underline{T}'_{n-1}$). Enfin, $\underline{S}_n^P$ se compose des $(x_1,\ldots,x_n)$ pour lesquels il existe une permutation σ de $(1\ 2\ \dots\ n)$ avec $(x_{\sigma.1}, \dots, x_{\sigma.n}) \in \underline{S}'_n$; il revient au même de dire qu'il existe Λ dans $L_+(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Im}(\Lambda x_j - \Lambda x_k) \in V_+ \cup V_-$ quels que soient $j \neq k$.

Un point $(x_1, \dots, x_n)$ de $(\mathbb{M}^4)^n$ est un point de Jost s'il appartient à $\underline{T}'_n$. D'après Jost, ceci signifie que pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs non tous nuls le vecteur $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ n'appartient pas à $\bar{V}_+ \cup \bar{V}_-$ (i.e., est du genre d'espace).

Le théorème de connexité suivant est de démonstration élémentaire mais astucieuse ([15], page 66 et [4], appendice).

PROPOSITION 1.- a) Pour tout point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\underline{T}_n$, l'ensemble des $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})$ tels que $(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n) \in \underline{T}_n$ est connexe dans $L_+(\mathbb{C})$.

b) L'ensemble des points de Jost est une partie ouverte connexe non vide de $(\mathbb{M}^4)^n$.

c) Soit σ une permutation de $(1\ 2\ \dots\ n)$ et soit S l'ensemble des éléments $(x_1, \dots, x_n)$ de $\underline{S}'_n$ tels que $(x_{\sigma.1}, \dots, x_{\sigma.n})$ appartienne à $\underline{S}'_n$. Alors S est connexe et contient un ensemble ouvert non vide de points réels.

2.2. Définition d'un champ quantique

Conformément aux principes généraux de la mécanique quantique [1], on suppose donné un espace de Hilbert complexe $\underline{K}$; un état est un ensemble de vecteurs de $\underline{K}$ de la forme λa avec $\|a\| = 1$ fixé et λ complexe de module 1 . L'ensemble Σ des états est muni de la topologie quotient évidente. On suppose que la théorie est "relativiste", c'est-à-dire que le groupe de Poincaré $\underline{P}_+^\uparrow$ agit continuement et "linéairement" sur Σ et qu'on s'est donné un état σ_0 invariant par $\underline{P}_+^\uparrow$ ("le vide"). Il est facile de montrer que l'action de $\underline{P}_+^\uparrow$ dans Σ se relève en une représentation unitaire U de G dans $\underline{K}$, et qu'il existe un vecteur Ψ_0

<u>invariant par</u> G définissant l'état σ_o .

D'après le théorème de Stone, il existe des opérateurs auto-adjoints P_o , P_1 , P_2 , P_3 , dont les décompositions spectrales commutent, et tels que

(35) $$U(x) = \exp i(x_oP_o - x_1P_1 - x_2P_2 - x_3P_3)$$

pour toute translation $x = (x_o,x_1,x_2,x_3)$ dans $\mathbb{M}^4$.

AXIOME 0 ("Condition spectrale").- <u>Pour tout vecteur</u> $a = (a_o,a_1,a_2,a_3)$ <u>dans</u> V_+ , <u>l'opérateur auto-adjoint</u> $-a\cdot P = a_oP_o - \sum_{j=1}^{3} a_jP_j$ <u>est positif</u>.

Cela signifie que la mesure spectrale associée à P_o , P_1 , P_2 , P_3 a son support dans $\bar{V}_+$. Vu l'action du groupe de Lorentz, il suffit d'ailleurs de postuler que l'<u>hamiltonien</u> $H = P_o$ est positif.

Un <u>champ quantique</u> φ est défini par la donnée d'un sous-espace vectoriel $\underline{D}$ de $\underline{K}$, et pour toute fonction $u \in \underline{S}(\mathbb{M}^4)$ d'une application linéaire $\varphi(u) : \underline{D} \to \underline{D}$ qui satisfait aux axiomes suivants :

AXIOME 1.- a) <u>On a</u> $\Psi_o \in \underline{D}$, <u>et les vecteurs</u> $\varphi(u_1)\ldots\varphi(u_r)\Psi_o$ <u>pour</u> $r \geq 1$ <u>et</u> $u_1,\ldots,u_r$ <u>dans</u> $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$ <u>forment un ensemble total dans</u> $\underline{K}$ ("irréductibilité").

b) <u>Pour</u> Φ , Φ' <u>dans</u> $\underline{D}$, <u>la forme linéaire</u> $u \mapsto \langle\Phi|\varphi(u)|\Phi'\rangle$ <u>sur</u> $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$ <u>est une distribution tempérée</u> ("continuité").

AXIOME 2 ("Invariance relativiste").- <u>Pour tout</u> $g \in G$, <u>on a</u> $U(g)\underline{D} = \underline{D}$ <u>et</u>

$$U(g)\varphi(u)U(g)^{-1} = \varphi(g\cdot u)$$ <u>avec</u>

$g\cdot u(x) = u(\Lambda(g)^{-1}.x)$ <u>pour</u> $u \in \underline{S}(\mathbb{M}^4)$ <u>et</u> $x \in \mathbb{M}^4$.

AXIOME 3 ("Causalité").- <u>Soient</u> u <u>et</u> v <u>dans</u> $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$ <u>tels que</u> $x - y$ <u>soit du genre d'espace</u> (i.e. <u>n'appartient pas à</u> $\bar{V}_+ \cup \bar{V}_-$) <u>pour</u> x <u>dans le support de</u> u <u>et</u> y <u>dans celui de</u> v . <u>Alors</u> $\varphi(u)$ <u>et</u> $\varphi(v)$ <u>commutent</u>.

Les axiomes 1 et 2 parlent d'eux-mêmes. D'après le principe d'Einstein, le domaine de causalité d'un point x de $\mathbb{M}^4$ est l'ensemble des points y de $\mathbb{M}^4$ tels que $y - x$ appartienne à $\bar{V}_+$. L'hypothèse faite dans l'axiome 3 signifie qu'aucun point du support de v n'est dans le domaine de causalité des points du support de u et vice-versa. Autrement dit, $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ sont sans influence mutuelle.

On supposera désormais pour simplifier que $\underline{D}$ se compose des sommes finies $\Sigma\, \varphi(u_1)\ldots\varphi(u_r)\Psi_o$ et que φ est hermitien, c'est-à-dire

(36) $$\langle \Phi | \varphi(u)\Phi' \rangle = \langle \varphi(u)\Phi | \Phi' \rangle$$

pour u réelle et Φ, Φ' dans $\underline{D}$. On renvoie à Wightman [15] pour le cas plus général d'un spin non nul. Il y a seulement des complications d'écriture.

2.3. Valeurs moyennes dans le vide

En appliquant le théorème des noyaux de Schwartz, on voit que pour tout $n \geq 1$, il existe une distribution tempérée $\underline{W}_n$ sur $(\mathbb{M}^4)^n$ telle que

(37) $$\langle \Psi_o | \varphi(u_1)\ldots\varphi(u_n) | \Psi_o \rangle = \langle u_1 \otimes \ldots \otimes u_n , \underline{W}_n \rangle$$

pour $u_1,\ldots,u_n$ dans $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$. On nous permettra d'employer la notation symbolique des distributions avec des variables et d'écrire par exemple

(38) $$\varphi(u) = \int_{\mathbb{M}^4} \varphi(x)u(x)dx$$

(39) $$\langle \Psi_o | \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n) | \Psi_o \rangle = \underline{W}_n(x_1,\ldots,x_n) .$$

Traduisons sur les distributions de Wightman $\underline{W}_n$ les axiomes 0 à 3. L'invariance relativiste s'écrit symboliquement

(40) $$U(g)\varphi(x)U(g)^{-1} = \varphi(\Lambda(g).x)$$

pour le champ et entraîne que les distributions $\underline{W}_n$ sont invariantes par le groupe de Poincaré $\underline{P}_+^\uparrow$, soit symboliquement

(41) $$\underline{W}_n(\Lambda x_1 + a_1 ,\ldots, \Lambda x_n + a_n) = \underline{W}_n(x_1,\ldots,x_n)$$

pour $\Lambda \in L_+^\uparrow$ et $a \in \mathbb{M}^4$. En particulier, on a

(42) $$\underline{W}_n(x_1 + a , \dots , x_n + a) = \underline{W}_n(x_1,\dots,x_n)$$

d'où l'existence d'une distribution tempérée W_{n-1} sur $(\mathbb{M}^4)^{n-1}$ telle que

(43) $$\underline{W}_n(x_1,\dots,x_n) = W_{n-1}(x_1 - x_2 , x_2 - x_3 , \dots , x_{n-1} - x_n) .$$

La condition spectrale entraîne alors que la transformée de Fourier de W_{n-1} a son support dans $\bar{V}_+ \times \dots \times \bar{V}_+$ ($n-1$ facteurs). L'axiome de causalité entraîne que $\underline{W}_n(x_1,\dots,x_j , x_{j+1},\dots,x_n)$ et $\underline{W}_n(x_1,\dots,x_{j+1} , x_j,\dots,x_n)$ coïncident dans l'ensemble ouvert défini par la relation " $x_j - x_{j+1}$ est du genre d'espace ". Enfin, la définition (37) et les propriétés du produit scalaire dans $\underline{K}$ entraînent les relations

(44) $$\underline{W}_n(x_1,\dots,x_n) = \overline{\underline{W}_n(x_n,\dots,x_1)}$$

(45) $$\sum_{j,k=0}^{N} \int\dots\int \overline{u_j(x_1,\dots,x_j)}\, u_k(y_1,\dots,y_k)\, \underline{W}_{j+k}(x_1,\dots,y_k) dx_1 \dots dy_k \geq 0$$

pour $N \geq 0$, $u_o \in \mathbf{C}$, $u_1 \in \underline{S}(\mathbb{M}^4)$, ..., $u_N \in \underline{S}((\mathbb{M}^4)^N)$ (on fait la convention $\underline{W}_o = 1$).

Par les arguments d'analyse fonctionnelle rendus familiers par Gelfand, on démontre le <u>théorème de reconstruction</u> de Wightman.

THÉORÈME 1.- <u>Supposons donnée pour tout entier</u> $n \geq 1$ <u>une distribution tempérée</u> $\underline{W}_n$ <u>sur</u> $(\mathbb{M}^4)^n$ <u>satisfaisant aux relations</u> (41), (44) <u>et</u> (45). <u>On suppose que</u> $\underline{W}_n(x_1,\dots,x_j , x_{j+1} ,\dots,x_n)$ <u>coïncide avec</u> $\underline{W}_n(x_1,\dots,x_{j+1} , x_j,\dots,x_n)$ <u>lorsque</u> $x_j - x_{j+1}$ <u>est du genre d'espace, et que la transformée de Fourier de la distribution</u> W_{n-1} <u>définie par</u> (43) <u>a son support dans</u> $\bar{V}_+ \times \dots \times \bar{V}_+$ ($n-1$ facteurs). <u>Il existe alors une théorie du champ</u> $(\underline{K} , U , \Psi_o , \varphi)$ <u>et une seule ayant les</u> W_n <u>pour distributions de Wightman</u>.

2.4. Prolongement analytique

Le théorème suivant est dû aux efforts conjugués de Wightman, Jost, Hall, Bargmann,...

THÉORÈME 2.- Pour tout entier $n \geq 1$, il existe une fonction holomorphe $\mathbb{W}_n$ définie dans $\underline{S}_n^P$ avec les propriétés suivantes :

a) On a $\underline{W}_n(x_1,\ldots,x_n) = \lim_{y_1,\ldots,y_n \to 0} \mathbb{W}_n(x_1 - iy_1,\ldots,x_n - iy_n)$ au sens des distributions tempérées dans $(\mathbb{M}^4)^n$ (avec $y_1 - y_2,\ldots,y_{n-1} - y_n$ dans V_+).

b) On a $\mathbb{W}_n(gx_1,\ldots,gx_n) = \mathbb{W}_n(x_1,\ldots,x_n)$ pour g dans $\underline{P}_+(\mathbb{C})$.

c) On a $\mathbb{W}_n(x_{\sigma.1},\ldots,x_{\sigma.n}) = \mathbb{W}_n(x_1,\ldots,x_n)$ pour toute permutation σ de $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Noter que l'ouvert $\underline{S}_n^P$ de $(\mathbb{C}^4)^n$ est stable par le groupe de Poincaré complexe $\underline{P}_+(\mathbb{C})$ et le groupe des permutations de $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Démonstration.

(A) On introduit d'abord la distribution W_{n-1} par (43). Sa transformée de Fourier

(46) $$\widetilde{W}_{n-1}(p_1,\ldots,p_{n-1}) = \int W_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}) \exp i(x_1\cdot p_1 + \ldots + x_{n-1}\cdot p_{n-1}) dx_1\ldots dx_{n-1}$$

a son support dans le cône convexe $\bar{V}_+ \times \ldots \times \bar{V}_+$ ($n-1$ facteurs). On peut donc définir la transformée de Laplace inverse de $\widetilde{W}_{n-1}$; c'est une fonction H définie et holomorphe dans $\underline{T}_{n-1}$, avec W_{n-1} comme valeur au bord. Il est clair qu'on a

(47) $$H(\Lambda x_1,\ldots,\Lambda x_{n-1}) = H(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

pour tout Λ dans $L_+^\uparrow$.

(B) Soit $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ dans $\underline{T}_{n-1}$; l'ensemble S des $\Lambda \in L_+(\mathbb{C})$ tels que $(\Lambda x_1,\ldots,\Lambda x_{n-1}) \in \underline{T}_{n-1}$ est connexe par la prop. 1, a) et contient $L_+^\uparrow$. Comme H est holomorphe, on voit que l'égalité (47) reste vraie pour $\Lambda \in S \subset L_+(\mathbb{C})$. Comme l'holomorphie est locale, il existe une unique fonction holomorphe H' sur $\underline{T}'_{n-1} = \bigcup_{\Lambda \in L_+(\mathbf{C})} \Lambda . \underline{T}_{n-1}$, invariante par $L_+(\mathbf{C})$ et coïncidant avec H sur $\underline{T}_{n-1}$.

(C) Posons $H''(x_1,\dots,x_n) = H'(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-1} - x_n)$ pour $(x_1,\dots,x_n)$ dans $\underline{S}'_n$. Il est clair que H'' est une fonction holomorphe dans $\underline{S}'_n$, invariante par le groupe de Poincaré complexe $\underline{P}_+(\mathbf{C})$, admettant $\underline{W}_n$ comme valeur au bord dans $(M^4)^n$ au sens du th. 2, a).

(D) Soient $(x_1,\dots,x_n)$ un point de S (cf. prop. 1, c) et σ une permutation de $(1\ 2\ \dots\ n)$. Posons $y_j = x_{\sigma.j}$, $\hat{x}_j = x_j - x_{j+1}$, $\hat{y}_j = y_j - y_{j+1}$. Supposons d'abord que $x_1,\dots,x_n$ soient réels ; alors $(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{n-1})$ et $(\hat{y}_1,\dots,\hat{y}_{n-1})$ sont des points de Jost. On a $x_j - x_k = \hat{x}_j + \dots + \hat{x}_{k-1}$ pour $j < k$; d'après la caractérisation des points de Jost, le vecteur $x_k - x_j$ est donc du genre d'espace. La fonction H'' est holomorphe au voisinage des points $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ et l'on a

$$H''(x_1,\dots,x_n) = H''(y_1,\dots,y_n) = H''(x_{\sigma.1},\dots,x_{\sigma.n}) \tag{48}$$

d'après l'axiome de causalité. La prop. 1, b) et c), permet de prolonger analytiquement cette relation et la formule (48) reste vraie lorsque $(x_1,\dots,x_n)$ et $(x_{\sigma.1},\dots,x_{\sigma.n})$ appartiennent à $\underline{S}'_n$. On en déduit immédiatement l'existence d'un prolongement analytique de H'' à $\underline{S}^P_n = \bigcup_\sigma \sigma.\underline{S}'_n$, invariant par les permutations de $(1\ 2\ \dots\ n)$. C'est la fonction $\mathbf{W}_n$ cherchée.

C.Q.F.D.

On peut maintenant justifier l'introduction des fonctions de Schwinger (cf. Ruelle [9]). En effet, on montre élémentairement que si $x_1,\dots,x_n$ sont des points distincts de $\mathbf{E}^4$, on a $(x_1,\dots,x_n) \in \underline{S}^P_n$; on peut donc poser

$$S_n(\vec{x}_1,t_1\ ;\dots;\ \vec{x}_n,t_n) = \mathbf{W}_n(\vec{x}_1,it_1\ ;\dots;\ \vec{x}_n,it_n) \tag{49}$$

dans ces conditions. Il est clair que S_n est analytique réelle dans son domaine de définition, invariante par le groupe des déplacements de $\mathbb{E}^4$, et fonction symétrique de ses n arguments.

L'axiome de causalité permet de justifier la construction des "fonctions" de Green indiquée au n°1.2 ; ce sont des distributions sur l'ouvert de $(\mathbb{M}^4)^n$ formé des systèmes de n points distincts. Les propriétés a), b) et c) du n° 1.2 sont immédiates et l'on démontre facilement le théorème limite

(50) $$G_{\pm}(\vec{x}_1,t_1\ ;\ldots;\ \vec{x}_n,t_n) = \lim_{\substack{\zeta\to\pm1\\ \operatorname{Im}\zeta<0}} W_n(\vec{x}_1,\zeta t_1\ ;\ldots;\ \vec{x}_n,\zeta t_n)\ .$$

2.5. Les théorèmes généraux

A) L'unicité du vide (i.e. d'un état invariant par le groupe de Poincaré) est équivalente à la propriété suivante d'Araki, Ruelle, Jost, Hepp, etc...

Si le vecteur a est du type d'espace, on a

$$\lim_{\lambda\to\infty} \underline{W}_n(x_1,\ldots,x_j\ ,\ x_{j+1}+\lambda a,\ x_{j+2}+\lambda a\ ,\ldots,\ x_n+\lambda a)$$
$$= \underline{W}_j(x_1,\ldots,x_j)W_{n-j}(x_{j+1},\ldots,x_n)\ ,$$

au sens des distributions tempérées.

B) L'axiome de causalité peut être remplacé par la forme plus faible suivante : Fixons une fois pour toutes deux ouverts non vides Ω et Ω' de $\mathbb{M}^4$ tels que $x-y$ soit du genre d'espace pour $x\in\Omega$ et $y\in\Omega'$. Alors $\varphi(u)$ commute à $\varphi(v)$ lorsque u a son support dans Ω et v dans Ω' .

C) Propriétés d'irréductibilité : tout d'abord, soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{M}^4$. On prouve que l'ensemble des vecteurs $\varphi(u_1)\ldots\varphi(u_n)\Psi_o$ où $u_1,\ldots,u_n$ ont leur support dans Ω est total dans $\underline{K}$. Soit C une forme sesquilinéaire continue sur $\underline{K}$. Si l'on a

(51) $$C(\varphi(u)\Phi,\Phi') = C(\Phi,\varphi(u)\Phi') \qquad (\Phi\ ,\ \Phi' \text{ dans } \underline{D})$$

lorsque u a son support dans Ω et $C(\Phi,\Psi_o) = C(\Psi_o,\Phi) = 0$ lorsque Φ est orthogonal à Ψ_o , alors il existe un nombre complexe c tel que $C(\Phi,\Phi') = c\langle\Phi|\Phi'\rangle$. La deuxième hypothèse est même inutile si $\Omega = \mathbb{M}^4$.

D) Théorème PCT : On a $\underline{W}_n(x_1,\dots,x_n) = \overline{\underline{W}_n(-x_1,\dots,-x_n)}$ pour toutes les distributions de Wightman $\underline{W}_n$. Une forme équivalente est l'existence d'un opérateur anti-unitaire Θ dans $\underline{K}$ tel que $\Theta\Psi_0 = \Psi_0$ et $\Theta\varphi(u) = \varphi(u^-)\Theta$ pour u réelle dans $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$ (avec $u^-(x) = u(-x)$ pour $x \in \mathbb{M}^4$) .

§ 3. Distributions aléatoires et théorie des champs, d'après Nelson

3.1. Distributions aléatoires

On note $(\Omega,\underline{F},P)$ un espace de probabilité et L^0 l'ensemble des variables aléatoires, c'est-à-dire le quotient de l'espace des fonctions complexes mesurables sur $(\Omega,\underline{F})$ par le sous-espace des fonctions P-négligeables. On munit L^0 de la convergence en probabilité ; une base de voisinages de 0 dans L^0 est formée des ensembles $V_n = \{X \in L^0 \mid P[|X| > 1/n] < 1/n\}$.

Une distribution (tempérée) aléatoire sur l'espace euclidien $\mathbb{E}^4$ (*) est une application linéaire continue $T : \underline{S}(\mathbb{E}^4) \to L^0$. Une version de T est une application mesurable $\widetilde{T}$ de $(\Omega,\underline{F})$ dans $\underline{S}'(\mathbb{E}^4)$ (muni de sa tribu borélienne) telle que $T(u)$ soit la classe de la fonction $\omega \mapsto \langle u,\widetilde{T}(\omega)\rangle$ pour tout $u \in \underline{S}(\mathbb{M}^4)$. D'après le théorème de Minlos [2], une telle version existe toujours, et deux versions sont égales P-presque partout. L'image de P par $\widetilde{T}$ est une mesure de probabilité μ_T sur $\underline{S}'$, la loi de T .

Soit T une distribution aléatoire sur $\mathbb{E}^4$. Pour toute partie ouverte U de $\mathbb{E}^4$, on note $\underline{\mathcal{O}}(U)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $T(u)$ où u garde son support dans U .(**) On dit que T est markovienne si l'on a

$$E[X|\underline{\mathcal{O}}(U^c)] = E[X|\underline{\mathcal{O}}(\partial U)]$$

chaque fois que $U \subset \mathbb{E}^4$ est ouvert, de complémentaire U^c et de frontière ∂U , et que X est une variable aléatoire intégrable $\underline{\mathcal{O}}(U)$-mesurable.

(*) On peut généraliser !

(**) Lorsque F est fermé, on pose $\underline{\mathcal{O}}(F) = \bigcap_{U \supset F} \underline{\mathcal{O}}(U)$ où U est un ouvert contenant F .

3.2. Construction de l'hamiltonien

On suppose donnée une distribution markovienne réelle T sur $\mathbb{E}^4$, dont la loi de probabilité est invariante par le groupe des déplacements de $\mathbb{E}^4$. On suppose que l'application $T : \underline{S}(\mathbb{E}^4) \to L^o$ se prolonge par continuité à l'espace de Sobolev $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$ des distributions de la forme $f + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$ avec f, g_j dans $L^2(\mathbb{E}^4)$. (3)

L'idée de ce n° est de considérer T comme une distribution aléatoire sur $\mathbb{E}^3$, dépendant de manière markovienne du temps t.

Posons $\underline{H} = L^2(\Omega, \underline{\mathcal{O}}(\mathbb{E}^4), P)$. Pour tout nombre réel t, on note A_t (resp. A_t^o) l'ensemble des points $[x_o, x_1, x_2, x_3]$ de $\mathbb{E}^4$ tels que $x_o \leq t$ (resp. $x_o = t$) ; on pose aussi $\underline{H}_t = L^2(\Omega, \underline{\mathcal{O}}(A_t), P)$ et $\underline{H}_t^o = L^2(\Omega, \underline{\mathcal{O}}(A_t^o), P)$. Pour $s \leq t$, on note $P_{s,t}$ l'opérateur de projection orthogonale de $\underline{H}_t$ sur $\underline{H}_s$; d'après la propriété markovienne appliquée au complémentaire du fermé A_s, l'opérateur $P_{s,t}$ applique $\underline{H}_t^o$ dans $\underline{H}_s^o$, donc définit un opérateur $P_{s,t}^o : \underline{H}_t^o \to \underline{H}_s^o$ de norme ≤ 1. On a évidemment

(52) $$P_{s,t} P_{t,u} = P_{s,u} \quad , \quad P_{s,t}^o P_{t,u}^o = P_{t,u}^o \qquad \text{pour } s \leq t \leq u .$$

Par ailleurs, la loi de probabilité μ_T sur $\underline{S}'(\mathbb{E}^4)$ étant invariante par les déplacements euclidiens, le groupe de ces déplacements agit dans l'espace de Hilbert $L^2(\underline{S}'(\mathbb{E}^4), \mu_T)$, donc dans l'espace canoniquement isomorphe $\underline{H}$. En particulier, la translation $[x_o, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_o + h, x_1, x_2, x_3]$ définit un opérateur unitaire T^h dans $\underline{H}$. On a évidemment $T^h \underline{H}_s = \underline{H}_{s+h}$, $T^h \underline{H}_s^o = \underline{H}_{s+h}^o$ et

(53) $$T^h P_{s,t}^o = P_{s+h,\, t+h}^o T^h .$$

Enfin, la symétrie $\rho : [x_o, x_1, x_2, x_3] \mapsto [-x_o, x_1, x_2, x_3]$ dans $\mathbb{E}^4$ induit un opérateur R dans $\underline{H}$. On a évidemment $R\underline{H}_t^o = \underline{H}_{-t}^o$ et l'on prouve facilement

(3) voir Notes, page 27.

les identités

(54) $\qquad RT^t = T^{-t}R \quad , \quad RP^o_{-t,t} = (P^o_{-t,t})^*R \qquad$ pour $t \geq 0$.

Les théorèmes connus sur les espaces de Sobolev montrent que toute distribution dans $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$ à support dans l'hyperplan A^o_o est invariante par la symétrie ρ par rapport à cet hyperplan, d'où l'on déduit

(55) $\qquad R\Phi = \Phi \qquad$ pour $\Phi \in \underline{H}^o_o$.

Posons alors $\underline{K}^{prov} = \underline{H}^o_o$. Pour tout $t \geq 0$, on note P_t l'opérateur $P^o_{o,t}T^t$ dans $\underline{K}^{prov}$ qui applique Φ sur la projection orthogonale de $T^t\Phi$ sur $\underline{K}^{prov}$. Des formules (52) à (55), on déduit $P_sP_t = P_{s+t}$ et $P^*_t = P_t$. Comme on a $\|P_t\| \leq 1$, il existe un opérateur auto-adjoint $H \geq 0$ sur $\underline{K}^{prov}$ tel que $P_t = e^{-tH}$ pour tout $t \geq 0$. C'est l'hamiltonien cherché.

3.3. Construction du champ

Nous disposons pour l'instant de l'espace de Hilbert $\underline{K}^{prov}$, de l'opérateur auto-adjoint positif H et du vecteur Ψ_o de $\underline{K}^{prov}$, la fonction constante 1 sur Ω . On a évidemment $P_t\Psi_o = \Psi_o$, d'où $H\Psi_o = 0$.

Soit $u_o \in \underline{S}(\mathbb{E}^3)$; la distribution $u_o \otimes \delta = u_o(\vec{x})\delta(t)$ appartient à $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$, et l'on peut donc définir la variable aléatoire $\varphi_o(u_o) = T(u_o \otimes \delta)$ sur $(\Omega , \underline{\mathfrak{O}}(A^o_o) , P)$; remarquer qu'on a $\underline{K}^{prov} = L^2(\Omega , \underline{\mathfrak{O}}(A^o_o) , P)$. Pour tout entier $m \geq 0$, notons $C^m(H)$ l'intersection des domaines des puissances $H^o , H^1 , \ldots , H^m$, et posons $C^\infty(H) = \bigcap_{m \geq 0} C^m(H)$. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire suivante :

(A) <u>Il existe un entier</u> $m \geq 0$ <u>tel que</u> $\int |\varphi_o(u_o)|\,|\Phi|^2\, dP < \infty$ <u>pour tout</u> $u_o \in \underline{S}(\mathbb{E}^3)$ <u>et</u> $\Phi \in C^m(H)$.

On peut maintenant définir le champ φ : on a déjà le champ φ_o à l'instant

0 , et il suffit de poser $\varphi(\vec{x},t) = e^{itH}\varphi_0(\vec{x})e^{-itH}$. De manière plus précise, soit $u \in \underline{S}(\mathbb{M}^4)$; pour tout nombre réel t , définissons $u_t \in \underline{S}(\mathbb{E}^3)$ par $u_t(\vec{x}) = u(\vec{x},t)$. Pour Φ , Φ' dans $\overline{C^\infty(H)}$, on pose

(56) $$\gamma_u(\Phi,\Phi') = \int dt \int_\Omega T(u_t \otimes \delta)(e^{-itH}\Phi)(e^{-itH}\Phi')\, dP \ .$$

PROPOSITION 2.- <u>Il existe un opérateur continu</u> $\varphi(u) : C^\infty(H) \to C^\infty(H)$ <u>tel que</u> $\gamma_u(\Phi,\Phi') = \langle \Phi | \varphi(u) | \Phi' \rangle$ <u>pour</u> Φ , Φ' <u>dans</u> $C^\infty(H)$.

La démonstration [6] repose sur l'identité

$$\gamma_v(\Phi,\Phi') = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \gamma_u(H^j\Phi , H^{r-j}\Phi')$$

avec $v(\vec{x},t) = \left(\frac{1}{i}\ \frac{d}{dt}\right)^r u(\vec{x},t)$, et des majorations faciles résultant de l'hypothèse (A).

3.4. Vérification des axiomes de Wightman

Comme on a $\Psi_0 \in C^\infty(H)$, on peut encore appliquer le théorème des noyaux de Schwartz et définir des distributions de Wightman $\underline{W}_n$ sur $(\mathbb{M}^4)^n$ par

$$\langle u_1 \otimes \ldots \otimes u_n , \underline{W}_n \rangle = \langle \Psi_0 | \varphi(u_1)\ldots\varphi(u_n) | \Psi_0 \rangle \ .$$

PROPOSITION 3.- <u>Les distributions</u> $\underline{W}_n$ <u>sont invariantes par le groupe de Poincaré</u> $\underline{P}_+^\uparrow$.

Par construction, $\underline{W}_n$ est invariante par les translations de $\mathbb{M}^4$ et par le groupe des rotations $SO(3)$ dans $\mathbb{E}^3$. Comme $\underline{P}_+^\uparrow$ est un groupe de Lie connexe, il suffit de vérifier que $\underline{W}_n$ est invariante par les transformations infinitésimales de Lorentz, c'est-à-dire satisfait à l'équation différentielle

(57) $$\sum_{j=1}^{n} \left(t_j \frac{\vec{\partial}}{\partial \vec{x}_j} + \vec{x}_j \frac{\partial}{\partial t_j}\right) \underline{W}_n(\vec{x}_1 , t \ ;\ldots;\ \vec{x}_n , t\ ) = 0 \ .$$

L'idée de la démonstration est de faire un prolongement analytique en remplaçant $t_1,\ldots,t_n$ par des variables complexes avec $\mathrm{Im}\ t_1 > \ldots > \mathrm{Im}\ t_n$. Ceci est possible car l'hamiltonien H est positif (cf. les calculs du n° 1.2, formule (11)).

Or on a, pour $t_1 > \dots > t_n$ réels

(58) $$\underline{W}_n(\vec{x}_1, it_1; \dots; \vec{x}_n, it_n) = \int_\Omega \prod_{j=1}^n T(\vec{x}_j, t_j)\, dP \quad ;$$

comme la loi de probabilité de T est invariante par déplacements dans $\mathbb{E}^4$, il en est de même des deux membres de (58), d'où l'équation différentielle

(59) $$\sum_{j=1}^n \left(t_j \frac{\partial}{\partial \vec{x}_j} - \vec{x}_j \frac{\partial}{\partial t_j}\right) \underline{W}_n(\vec{x}_1, it_1; \dots; \vec{x}_n, it_n) = 0 .$$

Par prolongement analytique, on déduit (57) de (59).

C.Q.F.D.

Remplaçons finalement l'espace de Hilbert provisoire $\underline{K}^{prov}$ par le sous-espace $\underline{K}$ sous-tendu par les éléments $\varphi(u_1)\dots\varphi(u_n)\Psi_0$ et prenons pour domaine $\underline{D}$ l'ensemble des sommes finies de vecteurs du type précédent. La prop. 3 permet de construire une représentation unitaire U du groupe de Poincaré $\underline{P}_+^\uparrow$ dans $\underline{K}$ caractérisée par

(60) $$U(g)\varphi(u_1)\dots\varphi(u_n)\Psi_0 = \varphi(g.u_1)\dots\varphi(g.u_n)\Psi_0$$

pour $u_1, \dots, u_n$ dans $\underline{S}(\mathbb{M}^4)$ et $g \in \underline{P}_+^\uparrow$. Il est clair que Ψ_0 est invariant par $\underline{P}_+^\uparrow$ et que si g est la translation temporelle d'amplitude t, on a $U(g) = e^{itH}$; avec les notations du n° 2.2, on a donc $H = P_0$. Les axiomes 0, 1 et 2 sont alors satisfaits car $H \geq 0$.

Pour établir l'axiome de causalité, on peut raisonner comme suit.

D'après la démonstration du théorème 2 du n° 2.4, les axiomes 0, 1 et 2 entraînent l'existence d'une fonction holomorphe W_n dans $\underline{S}'_n$ invariante par le groupe de Lorentz complexe $\underline{P}_+(\mathbf{C})$ et ayant $\underline{W}_n$ comme valeur au bord. Par ailleurs, à l'aide de la mesure μ_T sur $\underline{S}'(\mathbb{E}^4)$ on définit une distribution tempérée S_n sur $(\mathbb{E}^4)^n$ par

(61) $$S_n = \int_{\underline{S}'(\mathbb{E}^4)} (\tau \otimes \dots \otimes \tau)\, d\mu_T(\tau) \qquad (n \text{ facteurs}).$$

Elle est évidemment invariante par les déplacements euclidiens et les permutations de $(1\ 2\ \ldots\ n)$. De plus la formule (58) exprime que sur l'ouvert $t_1 > \ldots > t_n$ de $(\mathbb{E}^4)^n$, la distribution S_n coïncide avec $W_n(\vec{x}_1, it_1; \ldots; \vec{x}_n, it_n)$ [c'est donc la fonction de Schwinger (cf. formule (32))]. Par un raisonnement de Jost [4, page 83], on déduit de là que W_n est fonction symétrique de ses n arguments, d'où l'axiome de causalité.

3.5. Grand final

Nelson montre d'abord comment retrouver le champ libre. Soit Δ le laplacien dans $\mathbb{E}^4$ et soit G la solution élémentaire de $-\Delta + m^2$. Avec les notations du n° 1.3, la fonctionnelle $J(u) = \exp - \frac{1}{2} G(u,u)$ est continue de type positif sur $\underline{S}(\mathbb{E}^4)$; d'après le théorème de Minlos [2], c'est la transformée de Fourier d'une mesure μ_0 sur $\underline{S}'(\mathbb{E}^4)$ et μ_0 est la loi de probabilité d'une distribution aléatoire gaussienne T sur $\mathbb{E}^4$. Or $G(u,v)$ est le produit scalaire dans l'espace de Sobolev $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$. D'après les propriétés des variables aléatoires gaussiennes, la propriété markovienne est conséquence de la propriété suivante de $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$:

PROPOSITION 4.- *Soit $U \subset \mathbb{E}^4$ ouvert, de complémentaire U^c et de frontière ∂U . Soit $\underline{L}$ le sous-espace fermé de $\underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$ constitué des éléments à support dans U^c . Si $u \in \underline{H}_{-1}(\mathbb{E}^4)$ a son support dans U , la projection orthogonale de u sur $\underline{L}$ a son support dans ∂U .*

La proposition résulte immédiatement du caractère *local* de l'opérateur $- \Delta + m^2$.

D'après ce qui précède, on peut donc construire l'hamiltonien H_0 du champ libre de masse m . Les puissances de Wick sont bien connues dans ce cas [13]. Plaçons-nous maintenant dans la situation analogue à 2 dimensions d'espace-temps. Pour tout nombre réel $\ell > 0$, on peut définir d'après Glimm et Jaffe l'hamiltonien d'interaction tronqué

(62) $$H_\ell = H_o + g\int_{-\ell/2}^{\ell/2} :\varphi_o(x)^4: dx \quad ,$$

où φ_o est le champ libre à l'instant 0 . Nelson a pu déterminer la distribution markovienne correspondante. Il démontre en particulier la formule

(63) $$\langle\Psi_o|e^{-tH_\ell}|\Psi_o\rangle = \int_{\underline{S}'}\left[\exp - g\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx \int_0^t :\tau(x,t_1)^4: dt_1\right] d\mu_o(\tau) \ .$$

Or l'échange des coordonnées x et t dans $\mathbb{E}^2$ est un déplacement, d'où la <u>loi de symétrie de Nelson</u>

(64) $$\langle\Psi_o|e^{-tH_\ell}|\Psi_o\rangle = \langle\Psi_o|e^{-\ell H_t}|\Psi_o\rangle \ .$$

Guerra, Rosen et Simon ont déduit dans [3] d'importantes conséquences de cette relation. Par exemple, notons $-E_\ell$ la borne inférieure du spectre de l'opérateur auto-adjoint H_ℓ . Alors $\frac{E_\ell}{\ell}$ <u>tend en croissant vers une limite finie</u>.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. CARTIER - Problèmes Mathématiques de la Théorie Quantique des Champs, Séminaire Bourbaki, février 1971, in Lecture Notes in Maths, vol. 244, p. 106-122, Springer, 1971.

[2] I. M. GELFAND and N. Ya. VILENKIN - Generalized functions, vol. 4, Academic Press, New York, 1964.

[3] F. GUERRA, L. ROSEN and B. SIMON - Nelson's symmetry and the infinite volume behavior of the vacuum in $P(\Phi)_2$, Comm. Math. Phys., 27 (1972), p. 10-22.

[4] R. JOST - General theory of quantized fields, American Math. Society Publications, 1963.

[5] E. NELSON - Partial differential equations (D.C. SPENCER éditeur), p. 413-420, Amer. Math. Soc. Symposia vol. XXIII, Providence, 1973.

[6] E. NELSON - Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms, Journ. Funct. Anal., 11 (1972), p. 211-219.

[7] E. NELSON - Construction of quantum fields from Markoff fields, Journ. Funct. Anal., 12 (1973), p. 97-112.

[8] E. NELSON - The free Markov field, Journ. Funct. Anal., idem, p. 211-227.

[9] D. RUELLE - Connection between Wightman functions and Green functions in p-space, Nuovo Cimento (10), 19 (1961), p. 356-376.

[10] J. SCHWINGER - On the Euclidean structure of relativistic field theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 44 (1958), p. 956-965.

[11] J. SCHWINGER - Euclidean quantum electodynamics, Phys. Rev. 115 (1959), p. 721-731.

[12] I. SEGAL - Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom, I, Mat. Phys. Medd. Kong. Danske Vides. Selskal, 31 (1959), n° 12.

[13] I. SEGAL - Non-linear functions of weak processes : I, Journ. Funct. Anal., 4 (1969), p. 404-457 ; II, Journ. Funct. Anal., 6 (1970), p. 29-75.

[14] B. SIMON - On the Glimm-Jaffe linear bound in $P(\Phi)_2$ field theories, Journ. Funct. Anal., 10 (1972), p. 251-258.

[15] R. STREATER and A. WIGHTMAN - PCT, spin, statistics and all that, Benjamin, New York, 1964.

[16] K. SYMANZIK - Application of functional integrals to euclidean quantum field theory, in Analysis in Function space, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1964, p. 197-206.

[17] K. SYMANZIK - A method for euclidean quantum field theory, in Mathematical Theory of elementary particules, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1966, p. 125-140.

[18] K. SYMANZIK - Euclidean quantum field theory, in Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica "E. FERMI", XLV Corso, p. 152-226.

NOTES

(1) Les puissances $:T^n:$ pour $0 \leq n \leq 3$ sont entièrement déterminées par les relations (30) et (31), et celles-ci entraînent (28) pour $0 \leq n \leq 3$. Il est peut-être raisonnable dans certains cas de ne postuler l'existence de $:T^n:$ que lorsque $0 \leq n \leq 3$.

(2) [Ajouté en novembre 1973] On sait maintenant construire des mesures de probabilité μ sur $\underline{S}'(\mathbb{E}^2)$ qui satisfont aux conditions de Nelson pour l'espace-temps à <u>deux</u> dimensions, et sont de bons candidats à la solution du problème formulé en (1.4) (Feldman, Guerra-Rosen-Simon).

(3) Pour des raisons techniques, il faut ici définir $\underline{\mathcal{O}}(F)$, pour F fermé, comme la tribu engendrée par les variables aléatoires $T(u)$ où $u \in H_{-1}(\mathbb{E}^4)$ a son support dans F . Il n'est pas clair qu'on a encore $\underline{\mathcal{O}}(F) = \bigcap_{U \supset F} \underline{\mathcal{O}}(U)$ (U ouvert).

APPENDICE [1]

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE SCHWINGER

(d'après Osterwalder et Schrader)

1. L'article d'Osterwalder et Schrader [OS] est une contribution importante à la théorie, parue postérieurement à l'exposé précédent de novembre 1972. Les auteurs donnent deux nouvelles propriétés des fonctions de Schwinger (cf. (A3) et (A4) plus loin). Mais surtout, ils montrent comment reconstruire un champ quantique à partir des fonctions de Schwinger (*). On peut déduire les résultats de Nelson (décrits au §3) des résultats d'Osterwalder-Schrader, et surtout la nouvelle formulation se transpose aux fermions : c'est le cas où l'on suppose dans l'axiome de causalité que l'on a $\phi(u)\phi(v) = -\phi(v)\phi(u)$ au lieu de $\phi(u)\phi(v) = \phi(v)\phi(u)$; d'après un résultat fameux de Pauli, les particules de spin demi-entier sont des fermions.

2. Soit $n \geq 1$ un entier. On définit trois ouverts Ω_n, $\Omega_n^>$ et Ω_n^+ de $(\mathbb{E}^4)^n$ comme suit : un point $x = (x_1,\ldots,x_n)$ de $(\mathbb{E}^4)^n$ avec $x_j = (\vec{x}_j, t_j)$ appartient à Ω_n si $x_1,\ldots,x_n$ sont deux à deux distincts, à $\Omega_n^>$ si $t_1 > t_2 > \ldots > t_n$ et à Ω_n^+ si $t_1 > t_2 > \ldots > t_n > 0$. On a $\Omega_n \supset \Omega_n^> \supset \Omega_n^+$. Par convention, $(\mathbb{E}^4)^0$, $\Omega_0^>$, Ω_0^+ sont réduits à un point.

(*) Le lemme 8.8 de [OS] est faux, et les résultats de cet article sont donc incomplètement démontrés ; il est nécessaire d'introduire une restriction du type de (68).

(1) Ajouté en novembre 1973.

A la fin du n° 2.4, on a associé à un champ quantique ϕ une suite de fonctions analytiques $S_n : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{C}$, les fonctions de Schwinger. On a en particulier $S_o = 1$ et les deux propriétés suivantes d'invariance :

(A1) <u>Invariance euclidienne</u> : la fonction S_n est invariante par les transformations $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (\Lambda x_1+a,\dots,\Lambda x_n+a)$ de Ω_n , où Λ parcourt le groupe $SO(4,\mathbb{R})$ et a parcourt $\mathbb{E}^4$.

(A2) <u>Symétrie</u> : la fonction S_n est invariante par les transformations $(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (x_{\sigma.1},\dots,x_{\sigma.n})$ de Ω_n où σ parcourt les permutations de (1 2 ... n).

Osterwalder et Schrader ont établi dans [OS] deux propriétés nouvelles des fonctions de Schwinger.

(A3) <u>Croissance tempérée</u> : la fonction S_n est la restriction à Ω_n d'une distribution tempérée sur $(\mathbb{E}^4)^n$.

Pour formuler la condition de positivité, introduisons quelques notations :

a) on note θ la symétrie temporelle dans $\mathbb{E}^4$ definie par $\theta(\vec{x},t) = (\vec{x},-t)$

b) si f est une fonction sur Ω_n , la fonction Tf sur Ω_n est définie par

$$Tf(x_1,\dots,x_n) = \overline{f(\theta x_n,\dots,\theta x_1)} \tag{64}$$

(c'est-à-dire $Tf = \Theta f^*$ avec les notations de [OS]).

c) Si f est une fonction sur Ω_n , on pose

(65) $$S_n(f) = \int f(x_1,\dots,x_n)\, S_n(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n$$

pourvu que l'intégrale converge absolument.

d) Si f est une fonction sur Ω_m et g une fonction sur Ω_n, la fonction $f \otimes g$ sur Ω_{m+n} est définie par

(66) $$(f \otimes g)(x_1,\dots,x_{m+n}) = f(x_1,\dots,x_m)g(x_{m+1},\dots,x_{m+n}) .$$

Avec ces notations, on a

(A4) <u>Positivité</u> : quels que soient l'entier $N \geq 0$ et les fonctions $f_o, f_1,\dots,f_N$ où f_n est de classe C^∞ à support compact sur Ω_n, on a

(67) $$\sum_{m,n=0}^{N} S_{m+n}(Tf_m \otimes f_n) \geq 0 .$$

3. La réciproque est peut-être plus importante. Supposons donnée pour tout entier $n \geq 0$ une distribution sur Ω_n, de telle sorte que les conditions (A1) à (A4) soient satisfaites (au remplacement près de "fonction" par "distribution"). Supposons de plus qu'il existe des constantes positives C, L et un entier $p \geq 0$ tels que

(68) $$|S_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)| \leq C(n!)^L \, \|f_1\|_m \dots \|f_n\|_m$$

pour tout système de fonctions $f_1,\dots,f_n$ de classe C^∞ sur $\mathbb{E}^4$, dont les supports sont compacts et deux à deux disjoints. Pour f de classe C^∞ sur $\mathbb{E}^4$, on a posé

(69) $$\|f\|_m = \sup_{x \in \mathbb{E}^4} \left|(1 + x.x)^m \, (1-\Delta)^m f(x)\right| \quad ;$$

les normes $\|f\|_m$ définissent la topologie de $\underline{S}(\mathbb{E}^4)$.

Sous ces hypothèses, il <u>existe un champ quantique</u>, <u>et à isomorphisme près un seul</u>, <u>dont les fonctions de Schwinger soient les distributions</u> S_n .

4. Donnons quelques indications sur la démonstration de (A3). On remarque d'abord que Ω_n est réunion d'un nombre fini de transformés de $\Omega_n^>$ par un élément du groupe $SO(4,\mathbb{R})$, et que S_n est invariante par ce même groupe. Moyennant l'utilisation d'une partition de l'unité convenable, on se ramène à prouver que S_n coïncide sur $\Omega_n^>$ avec une distribution tempérée. L'invariance par translation de S_n montre qu'elle est de la forme

(70) $$S_n(x_1,\dots,x_n) = H_{n-1}(x_1-x_2,\dots,x_{n-1}-x_n) .$$

Il s'agit alors de montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction H_n coïncide avec une distribution tempérée sur l'ouvert $(\mathbb{E}^4_+)^n$ de $(\mathbb{E}^4)^n$ (on note $\mathbb{E}^4_+$ l'ensemble des points $(\vec{x},t)$ de $\mathbb{E}^4$ avec $t > 0$). Or, la démonstration du théorème 2 du n° 2.4 montre qu'il existe une distribution $\widetilde{W}_n$ à support dans $(\overline{V_+})^n$ et telle que l'on ait

(71) $$H_n(x_1,\dots,x_n) = \int W_n(p_1,\dots,p_n)\exp\Big\{-\sum_{j=1}^{n}(p_j^0 t_j + i\vec{p}_j.\vec{x}_j)\Big\}dp_r\dots dp_n$$

avec $x_j = (\vec{x}_j,t_j)$ et $p_j = (\vec{p}_j,p_j^0)$ pour $1 \leq j \leq n$. Comme $\overline{V}_+$ est contenu dans l'adhérence de $\mathbb{E}^4_+ = \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}_+$, on se ramène à prouver que toute distribution F sur $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^*_+)^q$ de la forme

(72) $$F(y_1,\dots,y_p;z_1,\dots,z_q) = \int G(\eta_1,\dots,\eta_p;\zeta_1,\dots,\zeta_q) \exp\Big\{-\sum_{j=1}^{p} y_j\eta_j - i\sum_{k=1}^{q} z_k\zeta_k\Big\}d\eta_1\dots d\zeta_q$$

(avec $G \in \underline{S}'(\mathbb{R}^{p+q})$ à support dans $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_+)^q$) se prolonge en une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{p+q}$. Pour cela, il suffit de remarquer que G est de la forme $G = \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\beta}\, x^{\alpha} D^{\beta} G_{\alpha,\beta}$ où les fonctions $G_{\alpha,\beta}$ sont intégrables et à support dans $\mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}_+)^q$.

5. Indiquons le sens de la condition de positivité (A4). Pour simplifier, supposons que le champ quantique ϕ ait un sens à temps fixé. De manière précise, on suppose qu'il existe des opérateurs $\phi_t(v) : \underline{D} \longrightarrow \underline{D}$ définis pour t réel et v dans $\underline{S}(\mathbb{R}^3)$ tels que

$$(73) \qquad \langle \Phi | \phi(u) \Phi' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \langle \Phi | \phi_t(u_t) \Phi' \rangle$$

pour Φ, Φ' dans $\underline{D}$ et u dans $\underline{S}(M^4)$ (avec $u_t(\vec{x}) = u(\vec{x},t)$).
L'invariance relativiste entraîne en particulier

$$(74) \qquad \phi_t(u) = e^{itH} \phi_0(u) e^{-itH} \qquad (u \in \underline{S}(\mathbb{E}^3)) .$$

On montre alors facilement que S_n est donnée dans l'ouvert $\Omega_n^{>}$ par

$$(75) \quad S_n(\vec{x}_1, t_1; \ldots ; \vec{x}_n, t_n) = \langle \Psi_0 | \phi_0(\vec{x}_1) \prod_{j=1}^{n-1} e^{-(t_j - t_{j+1})H} \phi_0(\vec{x}_{j+1}) \Psi_0 \rangle$$

(au sens des distributions) ; on notera que l'opérateur hermitien H est positif et qu'on a $t_j - t_{j+1} \geq 0$ dans $\Omega_n^{>}$. On peut alors, pour toute fonction f_n de classe C^{∞} à support compact dans Ω_n^{+} , définir l'élément

$$(76) \quad a_n(f_n) = \int_{\Omega_n^{>}} f_n(x_1, \ldots x_n) \phi_0(\vec{x}_1) \left[\prod_{j=1}^{n-1} e^{-(t_j - t_{j+1})H} \phi_0(\vec{x}_{j+1}) \right] \Psi_0 \, dx_1 \ldots dx_n$$

de $\underline{K}$. Un calcul immédiat donne

$$(77) \qquad \sum_{m,n=0}^{N} S_{m+n}(Tf_m \otimes f_n) = \left\| \sum_{n=0}^{N} a_n(f_n) \right\|^2$$

d'où la propriété de positivité (A4).

6. Réciproquement, si l'on a une suite de distributions S_n satisfaisant aux conditions (A1) à (A4) et (68), la positivité permet de construire un espace de Hilbert $\underline{K}$ et des applications linéaires $a_n : C_c^\infty(\Omega_n^+) \longrightarrow \underline{K}$ satisfaisant à (77). On pose $\Psi_o = a_o(1)$ et l'on reconstitue le champ $\phi_o(\vec{x})$ et l'hamiltonien H de manière à satisfaire à (76). On pose ensuite $\phi_t(\vec{x}) = e^{itH} \phi_o(\vec{x}) e^{-itH}$. L'invariance relativiste du champ ϕ se déduit de l'invariance euclidienne des distributions S_n par la méthode infinitésimale de Nelson (cf.3.4).

RÉFÉRENCE

[OS] K. OSTERWALDER et R. SCHRADER, Axioms for Euclidean Green's functions, Comm. Math. Phys. 31 (1973), p. 83-112.