Laurent Siebenmann

L'invariance topologique du type simple d'homotopie

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 428, p. 186-209
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__186_0>

L'INVARIANCE TOPOLOGIQUE DU TYPE SIMPLE D'HOMOTOPIE

[d'après T. CHAPMAN et R. D. EDWARDS]

par Laurent SIEBENMANN

§ 1.

Les efforts de l'école américaine de topologie en dimension infinie fondée par R. D. ANDERSON ont abouti en 1972 à cette conclusion définitive : la classification des complexes (localement finis) au <u>type simple d'homotopie</u> près coïncide avec la classification à <u>homéomorphisme</u> près des variétés (topologiques, métrisables) modelées sur le cube de Hilbert $Q = [-1,1]^{\infty}$. Plus précisément, on a

1.1. THÉORÈME DE TRIANGULATION DE CHAPMAN [Ch_2] [Ch_5].- <u>Toute variété</u> M <u>modelée sur le cube de Hilbert est homéomorphe à un produit</u> $X \times Q$ <u>où</u> X <u>est un complexe simplicial localement fini</u>.

D'ailleurs, on sait déjà selon WEST [W] (voir § 3.4) que, pour tout CW complexe localement fini X , le produit $X \times Q$ est une Q-variété. (Est-ce vrai pour X un ANR localement compact ?)

1.2. THÉORÈME D'INVARIANCE DE CHAPMAN [Ch_4] [Ch_6].- <u>Soit</u> $h : X \times Q \to Y \times Q$ <u>un homéomorphisme, où</u> X <u>et</u> Y <u>sont des</u> CW <u>complexes localement finis. Alors l'équivalence d'homotopie propre</u> $h_o : X \to Y$ <u>qui s'en déduit</u> (Q étant compact et contractile) <u>est une équivalence simple</u>.

D'ailleurs, on sait selon WEST que, si $f : X \to Y$ est une équivalence simple (propre) de complexes localement finis, alors $f \times (id|Q)$ est proprement homotope à un homéomorphisme $X \times Q \to Y \times Q$.

Ce théorème d'invariance marque la première apparition importante en dimension infinie d'un invariant plus subtil que le type d'homotopie propre (ordinaire), et la première contribution éclatante de l'étude des variétés de dimension infinie aux problèmes posés en dimension finie. Jusqu'à ce jour, il n'y a aucune autre méthode pour démontrer la conjecture de J. H. C. WHITEHEAD, créateur de la théorie des types simples : Tout homéomorphisme $h : X \to Y$ de CW complexes finis est une équivalence simple. On s'étonne que ni la K-théorie algébrique (reflet algébrique de l'idée de type simple), ni les grosses machines de la géométrie algébrique et de la topologie algébrique n'aient su offrir une preuve. Signalons, néanmoins, que F. WALDHAUSEN a esquissé depuis 1971 une preuve (*) pour X et Y des complexes simpliciaux, basée sur une généralisation poussée des formules de [S_1]. D'autre part, très récemment, R. D. EDWARDS [E] en a trouvé une autre (voir § 9) qui part du cas bien connu depuis KIRBY-SIEBENMANN [KS_1], [KS_2] où X et Y sont des variétés topologiques.

Cet exposé apporte force simplifications de technique aux exposés originaux mais en conserve intégralement les idées fondamentales. Je tiens à remercier vivement L. GUILLOU dont l'aide efficace et experte m'a donné la force d'obtenir ces simplifications.

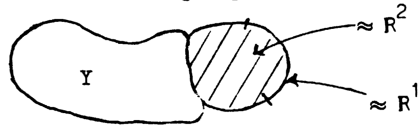
§ 2. Les types simples

Sauf indication du contraire, un espace sera pour nous localement compact, métrisable et σ-compact ; une application sera continue et propre (i.e. l'image inverse de tout compact est un compact) ; une équivalence sera une équivalence homotopique. Symboles : $\approx$ indique homéomorphisme, $\simeq$ équivalence homotopique, $\underline{\underline{X}}$ abrège $X \times Q$. Pour des sous-espaces A , B de X , $A \subset\subset B$ veut dire $\bar{A} \subset \overset{\circ}{B}$, i.e. $\mathrm{Adh}_X A \subset \mathrm{Int}_X B$. Un complexe X est toujours sous-entendu localement fini, et aussi simplicial si l'on omet CW. Ici X localement fini veut dire que X est une réunion localement finie de sous-complexes finis. Un polyèdre est un espace avec un atlas PL compatible de triangulations. (PL signifiant pseudo-linéaire ou linéaire par morceaux).

Une inclusion $Y \hookrightarrow X$ de CW complexes est une expansion élémentaire si on a $f : B^n \to Y$ (B^n = n-disque) et $X = (Y \coprod B^n \times [0,1])/\{(x,1) = f(x) , x \in B^n\} = M(f)$;

(*) Waldhausen me signale qu'il n'a jamais vérifié les détails [Wa].

$X - Y$ consiste en deux cellules : $\mathring{B}^n \times]0,1[\approx R^{n+1}$ et ce qui reste $(\approx R^n)$.



Cette opération en engendre d'autres de façon bien connue [Co] [S_1] : *expansion finie* (par composition finie), *expansion* (par somme disjointe et "pushout") et finalement *équivalence* (d'homotopie) *simple*, par compositions d'expansions ou de leurs inverses à homotopies près. Un homéomorphisme PL est simple. Une expansion de polyèdres est par définition une expansion simpliciale pour une triangulation PL convenable.

2.1 THÉORÈME (BASS-HELLER-SWAN et STALLINGS).- *Une équivalence* $f : X \to Y$ *de CW complexes est simple dès que* X *est connexe,* $\pi_1(X)$ *est libre ou abélien libre et* X *est compact ou* $X = P \times R$ *avec* P *compact*, cf. [S_1, p. 484].

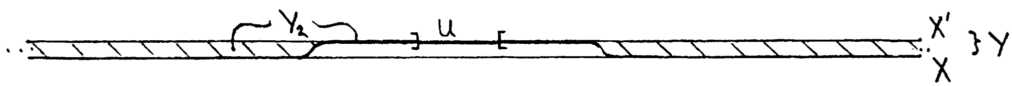
2.2. THÉORÈME DE SOMME [S_1, p. 482].- *Soit* $f : (X ; X_1 , X_2) \to (Y ; Y_1 , Y_2)$ *une équivalence de triades de CW complexes avec* $X = X_1 \cup X_2$, $Y = Y_1 \cup Y_2$. *Si* $X_1 \xrightarrow{f} Y_1$, $X_2 \xrightarrow{f} Y_2$ *et* $X_1 \cap X_2 \xrightarrow{f} Y_1 \cap Y_2$ *sont simples, alors* $f : X \to Y$ *est simple*.

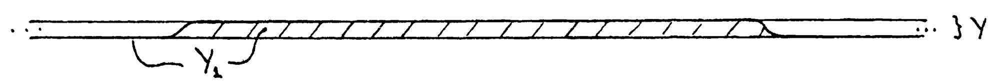
Un *espace simple* est un espace X muni d'un type simple lequel est représenté par une équivalence $f : X \to X'$ vers un complexe. On admet que, pour une équivalence simple $g : X' \to X''$ vers un complexe, $gf : X \to X''$ représente le même type simple sur X . Par exemple, $\underline{\underline{X}}$ est un espace simple pour tout polyèdre X . Parallèlement, on définit une triade simple et on remarque que le théorème de somme *entraîne sa version pour les triades simples*.

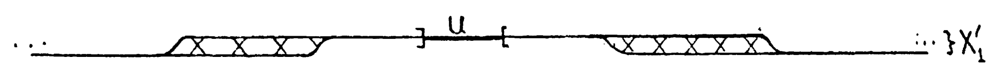
2.3. LEMME (*de localisation des déformations formelles combinatoires*).- *Soient* $X \hookrightarrow Y \hookleftarrow X'$ *des expansions et* $U \subset X'$ *un ouvert relativement compact. Il existe des sous-complexes* Y_1 *et* X'_1 *de* Y *avec* U *ouvert dans* X'_1 *et des inclusions* $X \hookrightarrow Y_1 \hookleftarrow X'_1$ *qui sont des expansions finies*.

<u>Preuve</u>. On vérifie, d'abord, que toute expansion $A \hookrightarrow C$ se décompose en deux $A \overset{i_1}{\hookrightarrow} B \overset{i_2}{\hookrightarrow} C$ où i_1, i_2 sont en "bosses", i.e. pushout d'une somme disjointe d'expansions finies (voir (a)). Il s'ensuit qu'on peut décomposer $X' \hookrightarrow Y$ en expansions $X' \overset{j_1}{\hookrightarrow} Y_2 \overset{j_2}{\hookrightarrow} Y$ de sorte que j_2 soit une expansion <u>finie</u> et que U soit ouvert dans Y_2 (voir (b)). Ensuite, on peut décomposer $X \hookrightarrow Y$ en expansions $X \overset{k_1}{\hookrightarrow} Y_1 \overset{k_2}{\hookrightarrow} Y$ de sorte que k_1 soit une expansion <u>finie</u> et que Y_1 contienne le compact $\bar{U} \cup \mathrm{Adh}_Y(Y - Y_2)$; voir (c). On pose $X_1' = Y_1 \cap Y_2$; voir (d). Alors $X_1' \hookrightarrow Y_1$ est une expansion <u>finie</u> parce que $Y_1 - X_1' = Y - Y_2$, et que $Y_2 \hookrightarrow Y$ en est une. Aussi, U est ouvert dans X_1' car U est ouvert dans Y_2 et $\bar{U} \subset Y_1$.

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

§ 3. Q-<u>variétés</u> (lire l'excellent exposé de CHAPMAN [Ch_1])

Soit M une Q-variété, i.e. un espace dont tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $Q = [-1,1]^\infty$. Alors, on a les propriétés suivantes :

3.1. STABILITÉ.– $M \times Q \approx M$, par un homéomorphisme homotope à la projection (ANDERSON-SCHORI).

3.2. THÉORÈME DE POINCARÉ.- M compact et contractile entraîne $M \approx \mathbf{Q}$ (CHAPMAN).

3.3. DÉNOUEMENT.- Soient f_o, $f_1 : X \to M$ deux plongements dont l'image est un $\underline{Z}$-sous-ensemble de M. [Une Q-variété A fermée dans M est un $\underline{Z}$-sous-ensemble si et seulement si A admet un collier dans M.] Alors, si $f_o \simeq f_1$, il existe une isotopie ambiante F_t de $F_o = \mathrm{id}|M$ (homotopie à travers des homéomorphismes) telle que $f_1 = F_1 f_o$.

3.4. THÉORÈME DE WEST [W].- Soit donnée $f : Q \to M$ et soit $M(f) \supset M$ son cylindre d'application. Il y a alors un homéomorphisme $h : \underline{\underline{M}} \to \underline{\underline{M(f)}}$ homotope à l'inclusion.

D'ailleurs si $f(Q) \subset U$ ouvert $\subset M$, l'homotopie peut fixer $\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{U}}$.

La démonstration est délicate. Le résultat est fondamental ; il entraîne les résultats de West cités dans l'introduction par une chasse simple aux définitions ; il est essentiel aux théorèmes de CHAPMAN. Tout CW complexe est simplement équivalent à un complexe simplicial (par approximation simpliciale et reconstruction) ; donc ce théorème de WEST ramène le théorème d'invariance des types simples au cas des complexes simpliciaux.

On utilisera les notations : $I = [-1,1]$, $Q = I^\infty = I_1 \times I_2 \times \ldots = I^n \times Q_n$, $Q_n = I_{n+1} \times I_{n+2} \times \ldots$, $\underline{\underline{X}} = X \times Q$. On admet aussi $B^n \equiv I^n \subset R^n$, $\overset{o}{B}{}^n =]-1,1[^n$ et $\lambda B^n = [-\lambda,\lambda]^n$, etc...

§ 4. Scindement homotopique

On considère $\underline{\underline{Y}} = Y \times Q$ où Y est un polyèdre. La locution " stabilisation de Y " indique : remplacement de Y par $Y \times I^n$, pour un entier n convenable, suivi par l'identification naturelle de $(Y \times I^n) \times Q$ avec $Y \times Q = Y \times I^n \times Q_n$ par l'homéomorphisme standard.

P est un bon sous-polyèdre d'un polyèdre Y si P est compact et si

(i) P est de codimension 0 (i.e. sa frontière topologique δP est identique à la frontière de son intérieur),

(ii) $\delta P = 0 \times \delta P$ admet un bicollier $\mathbb{R} \times \delta P$ dans Y .
Si $f : Y \to [0,\infty[$ est PL, $f^{-1}([0,\lambda])$ est bon pour presque tout $\lambda \in [0,\infty[$ (viz. sauf pour les sommets quand f est simpliciale).

Par abus du langage de WHITEHEAD, nous appellerons *déformation formelle de* $\underline{\underline{Y}}$ *à support compact dans un ouvert* $U \subset \underline{\underline{Y}}$, un homéomorphisme $h : \underline{\underline{Y}} \to \underline{\underline{Y}}'$, où Y' est un polyèdre, tel que, après stabilisation de Y et de Y' , il y ait des bons sous-polyèdres compacts $Y_1 \subset Y$ et $Y'_1 \subset Y'$ de compléments fermés notés Y_2 et Y'_2 tels que $\underline{\underline{Y}}_1 \subset U$ et

(i) $h(\underline{\underline{Y}}_2) = \underline{\underline{Y}}'_2$ et $\underline{\underline{Y}}_2 \xrightarrow{h} \underline{\underline{Y}}'_2$ soit de la forme (isomorphisme PL) $\times \mathrm{id}|Q$,

(ii) $\underline{\underline{Y}}_1 \xrightarrow{h} \underline{\underline{Y}}'_1$ soit une équivalence simple.

On dira aussi que h est *strict* si aucune stabilisation de Y ou Y' n'est nécessaire et si $\underline{\underline{Y}}_2 \xrightarrow{h} \underline{\underline{Y}}'_2$ est l'identité (donc $Y_2 = Y'_2$).

Soient Y et P des polyèdres, P compact, et soit $h : \mathbb{R} \times \underline{\underline{P}} \to \underline{\underline{Y}}$ un plongement ouvert.

4.1. LEMME DE SCINDEMENT HOMOTOPIQUE.- *On suppose* P *connexe avec* $\pi_1 P$ *libre ou abélien libre. Alors, il existe une déformation formelle* $h' : \underline{\underline{Y}} \to \underline{\underline{Y}}'$ *de* $\underline{\underline{Y}}$ *à support compact dans* $h(\mathbb{R} \times \underline{\underline{P}})$ *et un sous-polyèdre compact* $P' \subset Y'$ *ayant un voisinage bicollier tel que* $\underline{\underline{P}}' \hookrightarrow h'h(\mathbb{R} \times \underline{\underline{P}})$ *soit une équivalence d'homotopie (non-propre).*

Ce lemme sert à établir le théorème de la couronne stable (cf. § 5).

La démonstration nécessite trois lemmes dont le premier est une conséquence de 3.4 :

4.2. LEMME DE WEST.- *Soient* Y *un polyèdre et* U *un ouvert de* Y . *Soit* $Y \hookrightarrow Z$ *une équivalence telle qu'il existe un sous-polyèdre compact* Z_1 *de* Z *tel que* $Z = Y \cup Z_1$, *et* $U \supset Y_1 \equiv Y \cap Z_1$, *et* $Y_1 \hookrightarrow Z_1$ *est une équivalence simple. Alors, il existe un homéomorphisme* $h : \underline{\underline{Y}} \to \underline{\underline{Z}}$ *qui est l'identité hors de* $\underline{\underline{U}}$. (On dira que $Y \hookrightarrow Z$ est un *homéomorphisme simple à support compact dans* U .)

4.3. Lemme d'insertion.- Soient Y un polyèdre, W un ouvert de $Y \times Q$ et K un compact de W. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et un bon sous-polyèdre Y_o de $Y \times I^n$ tel que $K \subset\subset Y_o \times Q_n \subset W$.

Preuve. C'est vrai pour $K = K_1 \cup K_2$ dès que cela est vrai pour K_1 et K_2. Mais c'est trivial pour K un point et on conclut par un raisonnement standard de compacité.

L'âme PL $\widetilde{W}$ d'un ouvert $W \subset Y \times Q$: Grâce au lemme, on peut écrire $W = \bigcup_n A_n$, $A_n \subset\subset A_{n+1}$, $A_n = B_n \times Q_{k(n)}$, avec B_n bon $\subset Y \times I^{k(n)}$ et $k(1) < k(2) < \ldots$. On forme $g : W \to [0,\infty[$ telle que

(a) $\forall n$, $\exists g_n : B_n \to [0,\infty[$, PL telle que, sur A_n, g soit $A_n \xrightarrow{\text{proj}} B_n \xrightarrow{g_n} [0,\infty[$,

(b) $g(W - A_n) \subset [k(n+2),\infty[$.

Soit $\varphi_i : W \to [0,\infty[$ (non-propre) égale à 0 sur $g^{-1}([0,i-1])$, égale à 1 sur $g^{-1}([i,\infty[)$ et telle que $\varphi_i(x) = g(x) - (i-1)$ pour $x \in g^{-1}([i-1,i])$. On pose $\widetilde{W} = \widetilde{W}_g = \{(y,q) \in W \subset Y \times Q \,|\, \forall i,\ |q_i| \leq \varphi_i(y,q)\}$. Alors $\widetilde{W}$ est un polyèdre réunion des sous-polyèdres $\widetilde{W}_k = \widetilde{W} \cap Y \times I^k$. Ce $\widetilde{W}_k$ est un ouvert de $Y_k = \widetilde{W}_k \cup (Y \times I^k - W)$ qui est un polyèdre inclus dans $Y \times I^k$ à complément relativement compact dans W.

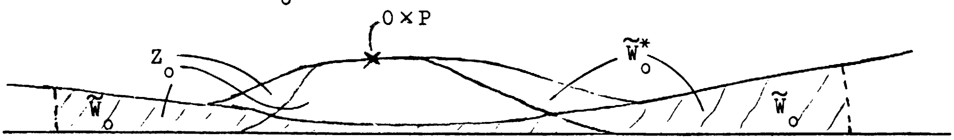
4.4. Lemme.- $\widetilde{W} \hookrightarrow W$ est une équivalence et $Y_k \hookrightarrow Y \times I^k$ est une équivalence simple à support compact dans $Y_k \cap W$.

Preuve. On voit en effet une rétraction par déformation naturelle $r : W \to \widetilde{W}$ telle que, pour $x \in \widetilde{W}$, $r^{-1}(x)$ soit un point ou un cube. Ce r induit une rétraction similaire $Y \times I^k \to Y_k$ laquelle est PL. La simplicité résulte d'une récurrence sur les squelettes de $Y \times I^k$.

Démonstration du lemme de scindement homotopique.

Soit $W = h(R \times \underline{P}) \subset \underline{\underline{Y}}$, et soit $\widetilde{W}$ une âme de W. Par composition, on a une équivalence $R \times P \to \widetilde{W}$ qui est simple selon § 2.1. Donc on a des expansions $\widetilde{W} \hookrightarrow E \hookleftarrow R \times P$, et d'après le lemme de localisation § 2.3, il existe des expansions finies $\widetilde{W} \hookrightarrow Z \hookleftarrow \widetilde{W}^*$ où $\widetilde{W}^*$ contient $]-1,1[\, \times P$ comme ouvert tel que $0 \times P \hookrightarrow \widetilde{W}^*$ soit une équivalence (non-propre).

On choisit un ouvert $Z_o \subset Z$ relativement compact tel que Z_o contienne l'adhérence compacte de $(Z - \widetilde{W}) \cup (Z - \widetilde{W}^*) \cup (0 \times P)$. Alors, en posant $\widetilde{W}_o = \widetilde{W} \cap Z_o$ et $\widetilde{W}^*_o = \widetilde{W}^* \cap Z_o$, on a des expansions finies $\widetilde{W}_o \hookrightarrow Z_o \hookleftarrow \widetilde{W}^*_o$; en effet, on retrouve $\widetilde{W} \hookrightarrow Z \hookleftarrow \widetilde{W}^*$ en rajoutant exactement $\widetilde{W} - \widetilde{W}_o$ à chaque terme. D'autre part, $\widetilde{W}_o$ est relativement compact dans $\widetilde{W}$ et dans W.



Une double application du lemme 4.2 de WEST donne une déformation formelle stricte $\theta : \underline{\underline{\widetilde{W}}}_o \to \underline{\underline{\widetilde{W}}}^*_o$. Pour k grand, $\widetilde{W}_o$ étant un ouvert de Y_k, on prolonge θ par l'identité à une déformation formelle stricte $\theta : \underline{\underline{Y}}_k \to \underline{\underline{Y}}^*_k$, à support compact dans $\underline{\underline{\widetilde{W}}}_o$. De même $\theta : \underline{\underline{\widetilde{W}}} \to \underline{\underline{\widetilde{W}}}^*$. De nouveau, selon 4.4 et 4.2, il y a une déformation formelle stricte $\varphi : (Y \times I^k) \times Q \to Y_k \times Q$ telle que, en identifiant Q à Q_k, φ soit à support dans W, et $W \supset \varphi W \supset \underline{\underline{\widetilde{W}}}_o$. En composant, on obtient une déformation formelle $h' : \underline{\underline{Y}} = Y \times I^k \times Q_k \xrightarrow{\varphi} \underline{\underline{Y}}_k \xrightarrow{\theta} \underline{\underline{Y}}^*_k$. On pose $Y' = Y^*_k$ et $P' = 0 \times P \subset \widetilde{W}^*_o \subset Y^*_k$. Il reste seulement à vérifier que $P' \subset h'W$ et que l'inclusion est une équivalence. Ceci résulte du diagramme commutatif à homotopie près (homotopies non-propres à gauche !) :

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\underline{\widetilde{W}^*}} \arrow[r, "\theta^{-1}", "\approx"'] & \underline{\underline{\widetilde{W}}} \arrow[rr, bend left, "\text{nat.}", "\simeq"'] & & W \\
\underline{\underline{P'}} \arrow[r, hook] \arrow[ur, "\simeq"] & \underline{\underline{\widetilde{W}^*_o}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\theta^{-1}", "\approx"'] & \underline{\underline{\widetilde{W}}}_o \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \varphi W \arrow[ur, hook, bend left] & \arrow[l, bend left, "\varphi"]
\end{tikzcd}$$

§ 5. *Le théorème de la couronne stable*

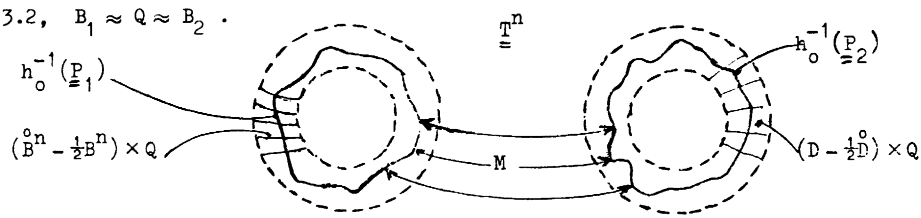
5.1. THÉORÈME.- *Soit* $h : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{Y}}$ *un plongement ouvert, où* Y *est un polyèdre. Il existe une déformation formelle* $h' : \underline{\underline{Y}} \to \underline{\underline{Y}}'$ *de* $\underline{\underline{Y}}$ *à support compact dans* $h(\underline{\underline{R}}^n)$ *et un bon polyèdre compact* $B' \subset Y'$, *tel que* $h'h(\underline{\underline{B}}^n) = \underline{\underline{B}}'$. (*En bref, après une déformation formelle de* $\underline{\underline{Y}}$ *à support dans* $h(\underline{\underline{R}}^n)$, *on a un bon* $B' \subset Y$ *tel que* $h\underline{\underline{B}}^n = \underline{\underline{B}}'$.)

Soit T^n un tore, disons $R^n/8Z^n$, et soit $T^n_o \subset T^n$ le complément de $\frac{1}{2}D$, où λD est le disque $\lambda B^n + (4, 4, \dots, 4)$.

5.2. LEMME.- *On considère un plongement ouvert* $h_o : \underline{\underline{T}}^n_o \to \underline{\underline{Z}}$, Z *étant un polyèdre. Alors, après une déformation formelle de* $\underline{\underline{Z}}$ *à support dans* $h_o(\overset{o}{\underline{\underline{B}}}{}^n)$, *il existe un homéomorphisme* $\theta : \underline{\underline{T}}^n \to \underline{\underline{T}}^n$ *homotope à l'identité, et un bon* $B' \subset Z$ *tel que* $h_o\theta^{-1}\underline{\underline{B}}^n = \underline{\underline{B}}' \subset \underline{\underline{Z}}$.

Preuve du lemme. Selon le lemme de scindement, après deux déformations formelles de $\underline{\underline{Z}}$ à supports *disjoints* resp. dans $h_o(\overset{o}{\underline{\underline{B}}}{}^n - \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}^n)$ et $h_o(\overset{o}{\underline{\underline{D}}} - \frac{1}{2}\underline{\underline{D}})$, on a des sous-polyèdres P_1 , P_2 à bicollier dans Z , et des inclusions $h_o^{-1}\underline{\underline{P}}_1 \hookrightarrow \overset{o}{\underline{\underline{B}}}{}^n - \frac{1}{2}\underline{\underline{B}}^n$ et $h_o^{-1}\underline{\underline{P}}_2 \hookrightarrow \overset{o}{\underline{\underline{D}}} - \frac{1}{2}\underline{\underline{D}}$, qui sont des équivalences non-propres. Soit B_1 (resp. B_2) la composante connexe fermée dans $\underline{\underline{T}}^n$ du complément de $h_o^{-1}\underline{\underline{P}}_1$ (resp. de $h_o^{-1}\underline{\underline{P}}_2$) qui contient $\frac{1}{2}\underline{\underline{B}}^n$ (resp. $\frac{1}{2}\underline{\underline{D}}$).

Selon 3.2, $B_1 \approx Q \approx B_2$.



D'ailleurs, $M = \underline{\underline{T}}^n - (\overset{o}{B}_1 \cup \overset{o}{B}_2)$ est triangulé, en effet $M = h_o^{-1}\underline{\underline{K}}$, pour un bon $K \subset Z$. Par rétraction, on a une équivalence

$$(M ; \delta B_1 \cup \delta B_2) \to (\underline{\underline{T}}^n - (\overset{o}{\underline{\underline{B}}}{}^n \cup \overset{o}{\underline{\underline{D}}}) , \delta\underline{\underline{B}}^n \cup \delta\underline{\underline{D}}) ,$$

simple selon 2.1, que WEST sait déformer à un homéomorphisme θ (à l'aide du dénouement 3.3). On prolonge θ en envoyant B_1 sur $\underline{\underline{B}}^n$ et B_2 sur $\underline{\underline{D}}$ (dénouant encore), pour obtenir l'homéomorphisme voulu $\theta : \underline{\underline{T}}^n \to \underline{\underline{T}}^n$. La déformation formelle voulue est celle à support dans $h_o(\underline{\underline{\overset{o}{B}}}^n - \underline{\underline{\tfrac{1}{2}B}}^n)$, C.Q.F.D.

Le lemme entraîne le théorème par la célèbre méthode d'immersion et de déroulement du tore introduite par KIRBY [K] [KS_1]. [Voici un fil d'Ariane : Démontrer directement le théorème de la couronne en dimension finie par cette méthode, en supposant connu un analogue du lemme. L'homéomorphisme $Q \approx$ cône(Q) sera utile pour remonter en dimension ∞.]

§ 6. Triangulation et invariance ; cas compact

6.1. Triangulation : Une Q-variété est un ANR. Donc toute Q-variété compacte M est dominée par un complexe fini et il est possible d'attacher successivement un nombre fini de cellules $e_1, \ldots, e_m$ à M pour former un ANR $M' = M \cup e_1 \cup \ldots \cup e_m$ contractile et compact. Selon WEST, $M' \times Q$ est une Q-variété, d'où $M' \times Q \approx Q$ selon CHAPMAN (3.2) donc $M' \times Q$ est trivialement triangulable. Par récurrence, on vérifie que $M \approx M \times Q$ est aussi triangulable. En effet, supposons que $\underline{\underline{M}}_k \equiv (M \cup e_1 \cup \ldots \cup e_k) \times Q \xrightarrow[\approx]{h} \underline{\underline{Y}}$ où Y est un polyèdre. On identifie e_k à R^n (n convenable) pour obtenir un plongement ouvert $h : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{Y}}$. Selon le § 5, après une déformation formelle de $\underline{\underline{Y}}$, on a $h(\underline{\underline{B}}^n) = \underline{\underline{B}}'$ pour B' bon $\subset Y$ de complément fermé noté Y_1. Alors $(\underline{\underline{M}}_k - \underline{\underline{\overset{o}{B}}}^n) \xrightarrow{h} \underline{\underline{Y}}_1$, et selon WEST, $\underline{\underline{M}}_{k-1} \approx (\underline{\underline{M}}_k - \underline{\underline{\overset{o}{B}}}^n)$ ce qui achève la récurrence. En bref, on a poinçonné m fois Q pour trouver une triangulation de M .

Pour le cas non compact on utilisera le

6.2. THÉORÈME DE TRIANGULATION RELATIVE.- Soient M une Q-variété compacte, L un polyèdre compact et $f : \underline{\underline{L}} \to M$ un plongement sur un Z-sous-ensemble de M . Alors, il existe un polyèdre $K \supset L$, et un homéomorphisme $F : \underline{\underline{K}} \to M$ prolongeant f .

Preuve. On a $M = \underline{\underline{L}}_1$ pour un polyèdre L_1 ; soit K le cylindre de l'application naturelle $L \to L_1$ (rendue simpliciale). On déduit F de WEST et d'un dénouement (3.3 et 3.4).

6.3. Invariance. On a $h : \underline{\underline{X}} \to \underline{\underline{Y}}$, un homéomorphisme de polyèdres épaissis (voir fin du § 3). Pour prouver que h est simple, on fait une récurrence sur le nombre k de simplexes de X en commençant trivialement avec $k = 1$. On identifie de manière PL standard un simplexe maximal de X avec R^n, pour n convenable, afin d'obtenir un plongement ouvert $h : \underline{\underline{R}}^n \to \underline{\underline{Y}}$. Selon le § 5, après une déformation formelle de $\underline{\underline{Y}}$, $h(\underline{\underline{B}}^n) = \underline{\underline{B}}'$ où B' est un bon sous-complexe de Y de complément fermé noté Y_2 et h induit une équivalence de triades $(\underline{\underline{X}} ; \underline{\underline{B}}^n , \underline{\underline{X}} - \mathring{\underline{\underline{B}}}^n) \to (\underline{\underline{Y}} ; \underline{\underline{B}}' , \underline{\underline{Y}}_2)$. L'inclusion $X_1 = X - R^n \hookrightarrow X - \mathring{B}^n$ est une expansion de polyèdres qui, selon WEST, est homotope à un homéomorphisme simple $\underline{\underline{X}}_1 \approx \underline{\underline{X}} - \mathring{\underline{\underline{B}}}^n$. Par récurrence, l'homéomorphisme $(\underline{\underline{X}} - \mathring{\underline{\underline{B}}}^n) \to \underline{\underline{Y}}_2$ est donc simple et par le théorème de somme $\underline{\underline{X}} \xrightarrow{h} \underline{\underline{Y}}$ aussi. C.Q.F.D.

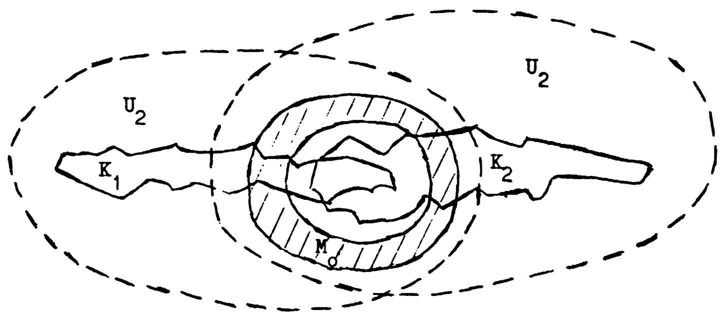
§ 7. Triangulation ; cas non-compact

La triangulation de M se fait en trois étapes : (*)

1) Si K_1 et K_2 sont des compacts de M admettant des voisinages ouverts triangulés, resp. $U_i \approx \underline{\underline{X}}_i$, $i = 1, 2$, alors $K_1 \cup K_2$ admet un voisinage triangulé.

Preuve. Notons $\varphi_1 : \underline{\underline{X}}_1 \to U_1$, $\varphi_2 : \underline{\underline{X}}_2 \to U_2$ les homéomorphismes de triangulation. Après stabilisation de X_1, on peut trouver, par insertion (4.3), un bon $Z_1 \subset X_1$, de frontière δZ_1, avec
$K_1 \cap K_2 \subset\subset \varphi_1(\underline{\underline{Z}}_1) \subset U_1 \cap U_2$. Ensuite, après stabilisation de X_2, on trouve un bon $Z_2 \subset X_2$ de frontière δZ_2, avec $\varphi_1(\underline{\underline{Z}}_1) \subset\subset \varphi_2(\underline{\underline{Z}}_2) \subset U_1 \cap U_2$. Alors $M_0 = \varphi_2(\underline{\underline{Z}}_2) - \varphi_1(\mathring{\underline{\underline{Z}}}_1)$ est une Q-variété compacte.

(*) Plus directement, on peut remarquer que la première étape est relative (à K_1), ce qui permet de conclure par une induction sur un recouvrement par des compacts contenus chacun dans une carte.



Le théorème de triangulation compacte relative (6.2) procure un polyèdre compact K contenant la somme $L = \delta Z_1 \coprod \delta Z_2$, et un homéomorphisme $\psi : \underline{\underline{K}} \to M_o$ tel que ψ égal φ_1 sur $\delta \underline{\underline{Z}}_1$ et égal φ_2 sur $\delta \underline{\underline{Z}}_2$.
Alors, en posant $X_2' = Z_1 \cup K \cup (X_2 - \mathring{Z}_2)$ (identifiant les deux exemplaires de δZ_1 et de δZ_2), on a une nouvelle triangulation

$$\varphi_2' = (\varphi_1 | \underline{\underline{Z}}_1) \cup \psi \cup (\varphi_2 | \underline{\underline{X}}_2 - \underline{\underline{\mathring{Z}}}_2) \ : \ \underline{\underline{X}}_2' \to U_2 \ .$$

Maintenant, après stabilisation (simultanée) de X_1 et X_2' , on peut trouver (par insertion 4.3) de bons sous-polyèdres Y_1 de X_1 et Y_2 de X_2' tels que $\varphi_1(\underline{\underline{Y}}_1)$ et $\varphi_2'(\underline{\underline{Y}}_2)$ soient des voisinages disjoints des compacts $K_1 - \varphi_1(\underline{\underline{\mathring{Z}}}_1)$ et $K_2 - \varphi_1(\underline{\underline{\mathring{Z}}}_1)$. Alors

$$(\varphi_1 \underline{\underline{\mathring{Y}}}_1) \ \cup \ (\varphi_1 \underline{\underline{\mathring{Z}}}_1) \ \cup \ (\varphi_2' \underline{\underline{\mathring{Y}}}_2)$$

est un voisinage ouvert triangulé de $K_1 \cup K_2$, car $\varphi_1 | \underline{\underline{\mathring{Z}}}_1 = \varphi_2' | \underline{\underline{\mathring{Z}}}_1$; C.Q.F.D.

2) Tout compact de M possède un voisinage triangulé : étant vrai pour un point, c'est une conséquence de 1).

3) Conclusion : d'après 2) et le lemme d'insertion 4.3, on peut écrire M comme une réunion de variétés compactes emboîtées $M_1 \subset\subset M_2 \subset\subset \ldots$ telles que la frontière δM_i de M_i admette un bicollier dans M_{i+1} . On conclut alors par le théorème de triangulation relative 6.2.

§ 8. Invariance ; cas non-compact

On choisit des filtrations $X_1 \subset\subset X_2 \subset\subset \ldots$ de X et $Y_1 \subset\subset Y_2 \subset\subset \ldots$ de Y par de bons sous-polyèdres tels que $h\underline{\underline{X}}_1 \subset\subset \underline{\underline{Y}}_1 \subset\subset h\underline{\underline{X}}_2 \subset\subset \underline{\underline{Y}}_2 \subset\subset \ldots$. Soit M l'espace sous-jacent à $\underline{\underline{Y}}$. Grâce au théorème de triangulation relative (cf. triangulation, cas non-compact), on forme un polyèdre Z contenant la somme disjointe des δX_i et δY_i et un homéomorphisme $\theta : \underline{\underline{Z}} \to M$ tel que $\theta = h$ sur $\delta\underline{\underline{X}}_i$ et θ = identité sur $\delta\underline{\underline{Y}}_i$.

Affirmation. $\theta : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Y}}$ et $h^{-1}\theta : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{X}}$ sont des équivalences simples d'espaces simples.

Preuve. Soient $A_i = X_i - \mathring{X}_{i-1}$, $B_i = Y_i - \mathring{Y}_{i-1}$ ($X_i = Y_i = \emptyset$ pour $i \leq 0$) . Remarquons ensuite que (par construction) $\theta^{-1} h\underline{\underline{A}}_i = \underline{\underline{A}}'_i$ et $\theta^{-1}\underline{\underline{B}}_i = \underline{\underline{B}}'_i$ pour des sous-polyèdres A'_i et B'_i de Z . Par le théorème d'invariance (cas compact), $\underline{\underline{A}}'_i \xrightarrow{h^{-1}\theta} \underline{\underline{A}}_i$ et $\underline{\underline{B}}'_i \xrightarrow{\theta} \underline{\underline{B}}_i$ sont des équivalences simples. La simplicité de θ et de $h^{-1}\theta$ (et donc de h) découle maintenant de l'astuce classique consistant à regrouper les blocs d'indices pairs et impairs (cf. § 9, cas de dimension infinie) adjointe au théorème de somme 2.2.

§ 9. La démonstration d'invariance de R. D. EDWARDS [E]

S'inspirant des idées d'épaississement et de scindement dans la preuve de CHAPMAN, EDWARDS a trouvé en novembre 1972 une jolie démonstration pour les homéomorphismes de polyèdres.

Cette démonstration a fait surgir pour la première fois la bonne notion topologique de voisinage tubulaire (analogue au " PL prebundle " de KATO = " pseudo-fibré " de MORLET = " block-bundle " de ROURKE et SANDERSON).

J'ai eu le plaisir d'avoir une correspondance avec Edwards dans laquelle nous avons aplani les difficultés techniques.

9.1. THÉORÈME.- Tout homéomorphisme $h : X \to Y$ entre des complexes simpliciaux localement finis (polyèdres) est une équivalence simple.

Edwards utilise

9.2. THÉORÈME (KIRBY et SIEBENMANN [KS_2 , § 4, § 5]).-

(1) Toute variété topologique X (de dimension finie, éventuellement à bord ∂X) est dotée d'un type simple bien défini par la règle suivante :

On plonge X dans une variété PL quelconque W (par exemple R^n) de façon que X ait un fibré normal en disques $D \subset W$ tel que D soit une sous-variété PL de W . L'inclusion $X \hookrightarrow D$ représente le type simple de X .

(2) Si, par ailleurs, X est aussi un complexe simplicial, alors $X \hookrightarrow D$ est une équivalence simple, c'est-à-dire les deux types simples coïncident.

COMPLÉMENTS.- Vu la forme de la règle en (1), on a :

(a) Un homéomorphisme $h : X \to Y$ entre variétés topologiques est une équivalence simple.

(b) Toute inclusion $X_o \hookrightarrow X$ d'une variété X_o comme section nulle d'un fibré en disques X sur X_o est une équivalence simple (car D sera aussi fibré en disques sur X_o par double projection $D \to X \to X_o$).

(c) Dans tout 9.2, on peut substituer au mot "variété" le mot s-variété.

(X s-variété veut dire que $X \times R^n$ est une variété pour un $n \geq 0$ assez grand. C'est possible puisque $X \times B^{n+1}$ est alors une vraie variété, ce qui nous ramène au cas des variétés.)

Edwards rencontre partout des applications CE.

DÉFINITION (cf. [L], [S_2]).- Une application propre entre deux ANR_s (= rétracts absolus de voisinage) est CE (resp. LC^k) si, pour tout ouvert N_o de N , la restriction $f^{-1}N_o \to N_o$ de f est une équivalence ordinaire (resp. induit un isomorphisme $\pi_i(f^{-1}N_o) \to \pi_i(N_o)$ pour $i = 0, 1, \dots, k$). Ailleurs LC^k est noté UV^k ;

et CE vaut "cell-like" ou LC^{∞} ou UV^{∞}. On sait que f est LC^k si $f^{-1}(y)$ est <u>k-connexe</u> pour tout $y \in N$, ceci du moins dans le sens de "shape" de Borsuk.

9.3. THÉORÈME D'APPROXIMATION (SIEBENMANN [S_2, Thm A et 3.10]).- <u>Soit</u> $f : M \to N$ <u>une application CE entre variétés topologiques de dimension</u> ≥ 6 <u>telle que</u> $f(\partial M) \subset \partial N$ <u>et que</u> $\partial M \xrightarrow{f} \partial N$ <u>soit</u> LC^1. <u>Alors</u> f <u>est homotope à un homéomorphisme</u> $f_1 : M \to N$ (<u>et d'ailleurs par une petite homotopie</u> $f_t : M \to N$, $0 \leq t \leq 1$, <u>telle que</u> $f_0 = f$ <u>et que</u> f_t <u>soit un homéomorphisme pour</u> $t > 0$).

Ces deux résultats se démontrent avec les techniques toriques entrevues au § 5, et reposent d'ailleurs, au pire, sur la théorie des anses (essentiellement sur le théorème du s-cobordisme, sous la forme DIFF ou PL au choix du lecteur).

DÉMONSTRATION DE L'INVARIANCE (9.1)

A) <u>Réduction au cas où</u> $\dim X < \infty$

Voici tout d'abord le lemme qui permettra d'apprivoiser l'inhomogénéité de Y.

9.4. LEMME (d'homogénéité le long d'un simplexe).- Soient K un complexe localement fini et $\mathring{\sigma} \in K$ un simplexe (formellement) ouvert. Soit $L = \mathrm{link}(\sigma, K)$. Alors, il y a un voisinage ouvert U de $\mathring{\sigma}$ dans K et un homéomorphisme naturel $h : \mathring{c}L \times \mathring{\sigma} \to U$ tel que $h(v \times \mathring{\sigma}) = \mathring{\sigma}$. Ici $\mathring{c}L = (L \times [0,1[)/L \times 0$ et v est l'image de $L \times 0$ dans le quotient.

<u>Preuve</u>. Si $*$ indique le joint, on a, pour $A_0 \subset A$ quelconque,

$$A * L - A_0 * L = (A - A_0) \times \mathring{c}L .$$

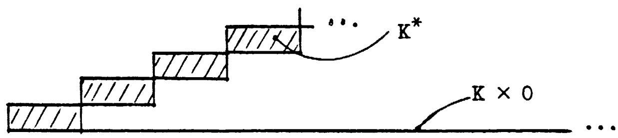
Prendre maintenant $U = \sigma * L - \partial\sigma * L = \mathring{\sigma} \times \mathring{c}L$, C.Q.F.D.

Pour un espace K, on pose $K^{]n} = \{x \in K \mid$ tout voisinage de x est de dimension $> n\}$. C'est un sous-complexe d'après le lemme si K est un complexe, donc un sous-polyèdre si K est un polyèdre. On pose aussi

$K^{n]} = \mathrm{Adh}(K - K^{]n})$; c'est l'adhérence dans K des points x ayant un voisinage de dimension $\leq n$.

On forme ensuite $K^* \subset K \times [0,\infty[$, $K^* = \bigcup_n (K^{n]} - \mathrm{int}\, K^{n-1]}) \times [n, n+1]$.
Si K est un polyèdre, K^* est un sous-polyèdre de $K \times [0,\infty[$, car $K^n - \mathrm{int}\, K^{n-1]} = K^{n]} \cap K^{]n-1}$. La projection $K^* \to K$ est une équivalence simple puisque, à homotopie près, elle se factorise en deux expansions

$$K^* \hookrightarrow \bigcup_n (K - \mathrm{int}\, K^{n-1]}) \times [n, n+1] \hookleftarrow K \times 0$$



Vu le caractère topologique de ces définitions, $h \times \mathrm{id}_{[0,\infty[}$ induit un homéomorphisme $h^* : X^* \to Y^*$ qu'il suffit maintenant de prouver simple.
Chacun des polyèdres

$$K_P^* = \bigcup_{n\ \mathrm{pair}} (K^{n]} - \mathrm{int}\, K^{n-1]}) \times [n, n+1]$$

et

$$K_I^* = \bigcup_{n\ \mathrm{impair}} (K^{n]} - \mathrm{int}\, K^{n-1]}) \times [n, n+1]$$

est une <u>somme disjointe de polyèdres</u> de dimension finie et h^* donne un homéomorphisme

$$h^* : (X^* ; X_P^*, X_I^*) \to (Y^* ; Y_P^*, Y_I^*) .$$

Donc, si l'on suppose l'invariance vérifiée en dimension finie, la simplicité de h^* découle du théorème de somme (§ 2), C.Q.F.D.

B) <u>Cas où</u> $\dim X = n < \infty$

On va raisonner par récurrence sur n , en commençant trivialement par $n = 0$. Soit $X_- = \{x \in X \mid x$ n'a pas de voisinage homéomorphe à $R^n\}$. Par le lemme d'homogénéité, X_- et Y_- sont des sous-polyèdres de dimension $< n$, et $hX_- = Y_-$. Par définition $X - X_-$ et $Y - Y_-$ sont des variétés topolcgiques de dimension n sans bord. (Personne ne sait si elles sont nécessairement des variétés PL.)

On plonge de façon PL le polyèdre Y dans R^q_+ , q grand, de telle manière que $Y \cap R^{q-1} = Y_-$, où $R^{q-1} = \partial R^q_+$. On fixe ensuite une triangulation (E,E_-) de (R^q_+, R^{q-1}) telle que Y , Y_- et E_- deviennent des sous-complexes pleins. On imposera plus tard quelques autres conditions sur cette triangulation.

Pour ε dans $]0,1[$, on considère l' ε-voisinage de Y dans E

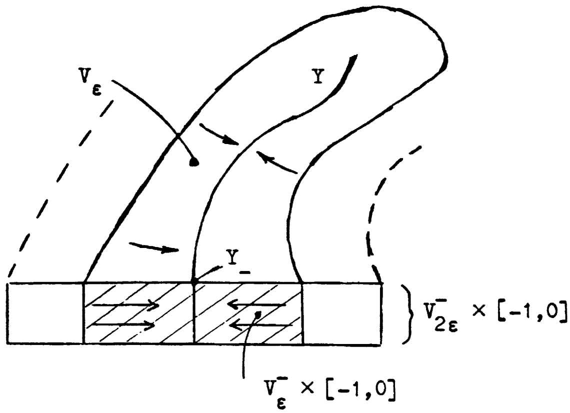
$$V_\varepsilon = \{x \in E \mid \chi_Y(x) \geq 1 - \varepsilon\}$$

où $\chi_Y(x)$ est le poids total de Y en $x \in E$ donné par des coordonnées barycentriques : $\chi_Y(x) = \Sigma\{v(x) \mid v$ un sommet de $Y\}$. Rappelons que $\Sigma\{v(x) \mid v$ un sommet de $E\} = 1$. V_ε est ce qu'on appelle un voisinage régulier de Y . (Y plein équivaut à $\chi_Y^{-1}(1) = Y$,)

Posant $Y^c = \{\sigma \in E \mid \sigma \cap Y = \emptyset\}$ = (complément simplicial de Y dans E), on remarque que tout x s'écrit $x = \chi_Y(x).y + \chi_{Y^c}(x).z$ avec $y \in Y$, $z \in Y^c$, et que si $\chi_Y(x) \neq 0$ (i.e.. $\chi_{Y^c}(x) \neq 1$), alors $y = y(x)$ est uniquement déterminé par x et en dépend continûment. Donc $r : x \mapsto y(x)$ est une rétraction $V_\varepsilon \to Y$. On la prolonge en l'unique surjection $r : V_{2\varepsilon} \twoheadrightarrow V_{2\varepsilon}$ $(2\varepsilon < 1)$, qui respecte chaque rayon $[y(x), z(x)] \cap V_{2\varepsilon}$ et qui applique $[y(x), z(x)] \cap (V_{2\varepsilon} - \overset{\circ}{V}_\varepsilon)$ linéairement. Posons $V_\lambda^- = V_\lambda \cap E_-$, $\lambda \in]0,1[$. Clairement, r induit $r| : V_{2\varepsilon}^- \twoheadrightarrow V_{2\varepsilon}^-$ qui rétracte V_ε^- sur Y_- . Pour tout $y \in Y$, $r^{-1}(y) \subset V_{2\varepsilon}$ est contractile, en effet $r^{-1}(y) = y * L$, pour un sous-complexe fini $L \subset Y^c$.

On forme maintenant $W_\varepsilon = (V_{2\varepsilon}^- \times [-1,0] \coprod V_\varepsilon)/\{(x,0) = x$, pour $x \in V_\varepsilon^-\}$ plongé naturellement dans $R^q = R^{q-1} \times R \supset R^q_+$. On prolonge r sur W_ε par $(r|) \times id_{[-1,0]}$ pour définir

$$r : W_\varepsilon \twoheadrightarrow V_{2\varepsilon}^- \times [-1,0] \cup Y \subset W_\varepsilon .$$



Il est maintenant commode d'épaissir en considérant (pour m grand) le couple $(V,V_-) = B^m \times (V_\varepsilon , V^-_\varepsilon)$, ainsi que $\widetilde{V}_- = (2B^m) \times V^-_{2\varepsilon}$ et

$$W = V \cup \widetilde{V}_- \times [-1,0] \subset (2B^m) \times W_\varepsilon .$$

Si $\theta : 2B^m \twoheadrightarrow 2B^m$ écrase B^m sur 0 , on prolonge r , de $W_\varepsilon = 0 \times W_\varepsilon$ à tout W , comme restriction de $\theta \times r$.

$$\begin{array}{ccc} 2B^m \times W_\varepsilon & \xrightarrow{\theta \times (r|W_\varepsilon)} & 2B^m \times W_\varepsilon \\ \cup & & \cup \\ W & \xrightarrow{\quad r \quad} & \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y . \end{array}$$

La situation reste qualitativement inchangée.

$r : W \to \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y$ jouit des trois propriétés suivantes :

(i) W <u>est une variété</u> ;

(ii) r <u>est</u> CE ;

(iii) $r|\partial W$ <u>est</u> LC^1 .

<u>Preuve de</u> (i) : W_ε est par construction une s-variété, sa frontière ayant un bicollier δW dans $\mathbb{R}^q$ (δW est visiblement le bord formel de W).

<u>Preuve de</u> (ii) <u>et</u> (iii). Pour $y \in Y$, $r^{-1}(y) \cap (W_\varepsilon , \delta W_\varepsilon) = (cL,L)$;

alors $r^{-1}(x) \cap (W,\partial W) = (c(S^{m-1} * L), S^{m-1} * L)$ avec $cS^{m-1} = B^m$, en vertu de l'identification standard $cA \times cB = c(A * B)$.

Soient X_1 un voisinage régulier de X_- dans X et $X_2 = \overline{X - X_1}$, $X_o = X_1 \cap X_2$.

On connaît depuis 1961 beaucoup d'exemples (de MILNOR) où X_o n'est pas simplement équivalent au sous-polyèdre similaire $Y_o \subset Y$. C'est la première obstruction à trouver une démonstration banale de l'invariance.

Il sera essentiel de modifier r pour avoir, en plus :

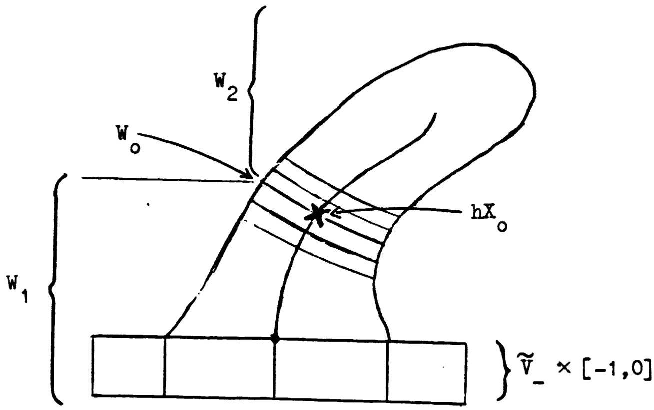
(iv) $r^{-1}(Y - Y_-) \xrightarrow{r} Y - Y_-$ <u>est une projection de fibré en disques sur l'image réciproque d'un voisinage de</u> hX_2.

<u>Idée importante d'Edwards</u> : les propriétés (i) - (iii) assurent que cette rétraction CE sur la variété $Y - Y_-$ est l'analogue topologique d'une rétraction de voisinage tubulaire différentiable de MILNOR. Donc, par un théorème [1] d'unicité de voisinages tubulaires topologiques qu'Edwards sait démontrer, la modification de $r : W \to \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y$ sur $r^{-1}(Y - Y_-)$ est possible - dès qu'il existe un fibré en disques quelconque normal à $Y - Y_-$ dans W - ce qui est bien le cas pour m grand. Finalement Edwards a su trafiquer r à la main, tâche que nous reportons.

L'ensemble $X_o = X_1 \cap X_2 \subset X$ a un bicollier dans X donné par les coordonnées barycentriques ayant servi à construire X_1, (cf. V_ε) : donc X_o et X_2 sont des s-variétés et on pourra appliquer 9.2. Ces mêmes coordonnées fournissent une rétraction CE $p : X_1 \to X_-$. Certainement le fibré $W_o \equiv r^{-1}(h(X_o))$ sur $h(X_o)$ de fibre B^{m+q-n}, qui est assuré par (iv), sera une variété ainsi que $W_2 = r^{-1}(h(X_2))$ et $W_1 = \mathrm{Adh}(W - W_2)$.

---

[1] (Edwards, 6/1973) Ce théorème inédit permettra une démonstration simplifiée valable aussi pour les CW complexes de dimension finie.



h induit une équivalence de triades munies de types simples $(X\,;X_1\,,X_2) \xrightarrow{h} (W\,,W_1\,,W_2)$, cf. [KS_2, § 5.3, § 5.10]. On va vérifier que $X_i \xrightarrow{h} W_i$, $i = 0$, 1 , 2 , est une équivalence simple. Alors $X \xrightarrow{h} W$ sera aussi simple d'après le <u>théorème de somme</u> (§ 2), mais alors $Y \subset W$ étant simple (et même une expansion), on saura que $X \xrightarrow{h} Y$ est simple.

Or, $X_o \xrightarrow{h} W_o$ et $X_2 \xrightarrow{h} W_2$ sont simples selon 9.2. Pour $X_1 \xrightarrow{h} W_1$ on utilise le diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[rr, "h|"] & & W_1 \arrow[d, shift left, "\rho\ \mathrm{CE}"] \\
X_- \arrow[u, "\text{expansion}"] \arrow[r, "h|", "\text{simple}"'] & Y_- \arrow[r, hook, "\text{expan.}"'] & \tilde{V}_- \times [-1,0] \arrow[u, hook, shift left]
\end{tikzcd} .$$

En bas h est simple par hypothèse de récurrence ; et ρ est la composition de deux rétractions CE :

$$\rho : W_1 \xrightarrow{r} \tilde{V}_- \times [-1,0] \cup h(X_1) \xrightarrow{\rho'} \tilde{V}_- \times [-1,0] ,$$

où ρ' est la rétraction telle que, pour $x \in hX_1$, $\rho'(x) = h p h^{-1}(x)$. Donc ρ est CE (cf. [L]). De plus

$$(\rho|) : \partial W_1 \xrightarrow{r|} \partial(\tilde{V}_- \times [-1,0]) \cup h(X_1) \xrightarrow{\rho'|} \partial(\tilde{V}_- \times [-1,0])$$

est composition de $r|$ qui est LC^1 et $\rho'|$ qui est CE ; donc

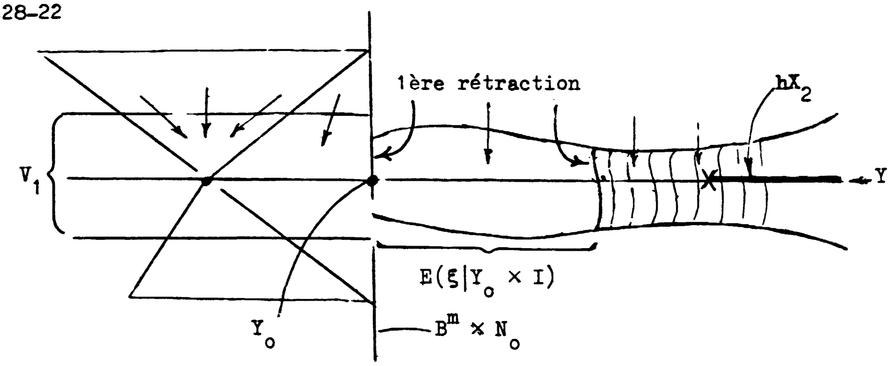
$\partial W_1 \to \partial(\widetilde{V}_- \times [-1,0])$ est LC^1 .

Maintenant, selon le théorème d'approximation 9.3, ρ est homotope à un homéomorphisme et donc simple (§ 9.2). On voit donc sur le diagramme que $X_1 \xrightarrow{h} W_1$ est simple, ce qui établit la simplicité de $X \xrightarrow{h} Y$.

Il reste à trafiquer $r : W \to \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y$, pour gagner la propriété (iv). Soit (N_1 , Y_1) un voisinage régulier de (R^{q-1},Y_-) dans (E,Y) tel que $Y_1 \cap hX_2 = \emptyset$ et de frontière (N_o , Y_o) dans (R^q_+,Y) admettant un voisinage bicollier (respectant Y). Soit (N_2 , Y_2) son complément fermé.

Alors, pour m grand, il existe un fibré en disques ξ normal à (Y_2 , Y_o) dans $B^m \times (N_2 , N_o)$, selon le théorème d'existence stable (relatif) de HIRSCH-MAZUR [H] [KS_2,§ 5], un résultat qui comporte sa version pour les s-variétés. (La platitude locale de (Y_2 , Y_o) dans $B^m \times (N_2 , N_o)$ (KLEE) est une partie de ces raisonnements (voir MILNOR [M, p. 63].)

On impose maintenant à la triangulation E de R^q_+ , qui a défini V_ε , de rendre N_i et Y_i des sous-complexes pleins. Alors $V_\varepsilon \xrightarrow{r} Y$ induit une rétraction CE $V^i_\varepsilon \xrightarrow{r} Y_i$ de voisinages réguliers de Y_i dans N_i . On pose $V_i = B^m \times V^i_\varepsilon$. On impose ensuite à ξ la condition : $E(\xi|Y_2) \subset V_2$ (par une compression radiale). On pose $W^* = \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup V_1 \cup E(\xi|Y_2)$ et on définit une rétraction CE $r^* : W^* \to \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y$, par $r^*(x) = r(x)$ pour $x \in \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup V_1$, et par $r^*(x) = rr_o(x)$ pour $x \in E(\xi|Y_2)$, où r_o est une rétraction CE $E(\xi|Y_2) \to E(\xi|Y_o) \cup Y_2$ que le lecteur aura le plaisir de construire à partir d'un collier $Y_o \times I$ de Y_o dans $Y_2 - hX_2$, un isomorphisme $\xi|(Y_o \times I) = (\xi|Y_o) \times I$, et une fonction de rayon pour ξ , cf. [KS_2, § 4], - selon le diagramme



Ce $r^* : W^* \to \widetilde{V}_- \times [-1,0] \cup Y$ possède les propriétés (i) - (iv). D'ailleurs, la simplicité de $Y \hookrightarrow W^*$ est assurée par 9.2(b)(c) et par le théorème de somme. Donc le raisonnement ci-dessus établit le théorème d'invariance 9.1.

BIBLIOGRAPHIE

[Ch_1] T. A. CHAPMAN - Notes on Hilbert Cube Manifolds, mimeographed, University of Kentucky at Lexington, 1973.

[Ch_2] T. A. CHAPMAN - Surgery and handle straightening in Hilbert cube manifolds, preprint 1972, Pacific J. Math.

[Ch_3] T. A. CHAPMAN - Compact Hilbert cube manifolds and the invariance of Whitehead torsion, preprint 1972, Bull. Amer. Math. Soc.

[Ch_4] T. A. CHAPMAN - Topological invariance of Whitehead torsion, preprint 1972.

[Ch_5] T. A. CHAPMAN - All Hilbert cube manifolds are triangulable, pre-preprint 1972.

[Ch_6] T. A. CHAPMAN - Classification of Hilbert cube manifolds and infinite simple homotopy types, preprint 1972.

[Co] M. COHEN - A Course in Simple-homotopy Theory, Graduate Texts in Math. 10, Springer, 1972.

[E] R. D. EDWARDS - The topological invariance of simple homotopy type for polyedra, manuscrit polycopié, 1972; preprint UCLA, 1973.

[H] M. HIRSCH - On normal microbundles, Topology 5 (1966), 229-240.

[K] R. C. KIRBY - Stable homeomorphisms and the annulus conjecture, Ann. of Math., 89 (1969), 575-582.

[KS_1] R. C. KIRBY and L. C. SIEBENMANN - Triangulation and Hauptvermutung, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 742-749 ; [cf. aussi C. MORLET - Sém. Bourbaki, exposé 362, 1968/69, Lecture Notes in Maths., vol. 179, Springer-Verlag, 1971.]

[KS_2] R. C. KIRBY and L. C. SIEBENMANN - Essays on topological manifolds smoothings and triangulations : III Some basic theorems for topological manifolds, preprint of projected Ann. of Math. Study.

[L] C. LACHER - Cell-like mappings I, Pacific J. Math., 30 (1969), 717-731.

[M] J. W. MILNOR - Microbundles, Part I, Topology, vol. 3 (1964), Supplement 1, 53-80.

[S_1] L. C. SIEBENMANN - Infinite simple homotopy types, Indag. Math. 32 (1970), 479-495, also Koninkl. Niederl. Akad. Wet. Amsterdam, Series A (Math), 73 (1970), 479-595.

[S_2] L. C. SIEBENMANN - Approximating cellular maps by homeomorphisms, Topology, 11 (1972), 271-294.

[W] J. E. WEST - Mapping cylinders of Hilbert cube factors, Gen. Top. and its App., 1 (1971), 111-125.

[Wa] F. WALDHAUSEN - Lecture notes, polycopié, Princeton 1972, (ils décrivent très brièvement son idée).