

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MICHEL RAYNAUD

## **Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1974, exp. n° 427, p. 171-185

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1972-1973\\_\\_15\\_\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__171_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CONSTRUCTION ANALYTIQUE DE COURBES EN GÉOMÉTRIE NON ARCHIMÉDIENNE

[d'après David MUMFORD]

par Michel RAYNAUD

Soient  $R$  un anneau de valuation discrète complet,  $k$  son corps résiduel,  $K$  son corps de fractions,  $m$  l'idéal maximal de  $R$ ,  $\pi$  un générateur de  $m$  et  $v$  la valuation normalisée de  $K$ .

Considérons une courbe elliptique  $E$  sur le corps des complexes  $\mathbb{C}$ ; alors  $E$  est le quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau de périodes  $(\omega_1, \omega_2)$ . L'application

$$z \mapsto e^{2\pi iz/\omega_1}$$

factorise le revêtement universel de  $E$  à travers  $\mathbb{C}^*$  de sorte que  $E$  est

aussi le quotient de  $\mathbb{C}^*$  par le sous-groupe engendré par  $q = e^{2\pi i\omega_2/\omega_1}$ . Or

il se trouve que l'on a une structure analogue pour certaines courbes elliptiques définies sur le corps valué non archimédien  $K$ . Plus précisément, si  $E_K$  est une courbe elliptique sur  $K$  qui se spécialise sur  $k$  en une cubique plane  $\bar{E}$  ayant un point double rationnel à tangentes rationnelles distinctes, alors l'invariant  $j$  de  $E_K$  n'est pas entier et Tate a montré que  $E_K$  était le quotient analytique du groupe multiplicatif  $G_m$  de  $K$  par le sous-groupe discret engendré par l'élément  $q$  donné par la formule usuelle

$$q = 1/j + \dots \quad (\text{cf. [6]}).$$

Si, au contraire  $j \in \mathbb{R}$ ,  $E_K$  a potentiellement bonne réduction, et n'admet pas de revêtement analytique de degré infini.

Mumford vient d'étendre le résultat de Tate, d'une part aux variétés abéliennes, d'autre part aux courbes de genre  $\geq 2$  ([5]). Nous ne parlerons ici que des courbes et tout d'abord nous allons décrire la situation sur le corps

des complexes qui aura un analogue non archimédien.

Soit  $D$  un domaine ouvert de la sphère de Riemann, dont la frontière est formée de  $2g$  cercles disjoints  $C_1, C'_1, \dots, C_g, C'_g$ . Supposons que, pour  $i = 1, \dots, g$ , il existe une transformation homographique  $\tau_i$  (ayant deux points fixes distincts), telle que  $\tau_i(C_i) = C'_i$  et  $\tau(D) \cap D = \emptyset$ . Alors le sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$  engendré par les  $\tau_i$  est un groupe libre à  $g$  générateurs,  $\Omega = \bigcup_{\tau \in \Gamma} \tau(\bar{D})$  est un ouvert dense de  $P^1(\mathbb{C})$ , son complémentaire est l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments non nuls de  $\Gamma$ . Le groupe  $\Gamma$  opère librement et proprement sur  $\Omega$  et  $X = \Omega/\Gamma$  est une surface de Riemann compacte de genre  $g$ . C'est, en fait, le quotient de  $\bar{D}$  par les identifications  $C_i \longleftrightarrow C'_i$  définies par les  $\tau_i$ . Bien sûr  $\Omega$  n'est pas un revêtement universel de  $X$ . En fait, on peut choisir des générateurs  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  de  $\pi_1(X)$ , liés par la relation habituelle  $\prod_i [a_i, b_i] = 1$ , de façon que  $\Omega$  soit le revêtement galoisien de  $X$  correspondant au sous-groupe invariant de  $\pi_1$  engendré par les  $a_i$ .

C'est cette uniformisation partielle, dite de Schottky, qui a un analogue non archimédien pour certaines courbes  $X$  définies sur  $K$ . Comme dans le cas des courbes elliptiques, l'existence d'une telle uniformisation de  $X$  est liée à l'existence d'une réduction  $\bar{X}$  de  $X$  sur le corps résiduel  $k$  possédant suffisamment de singularités d'un certain type. Il se trouve que  $\bar{X}$  possède alors un revêtement algébrique de degré infini et que le revêtement analytique cherché de  $X$  s'obtient en relevant de  $k$  à  $K$  le revêtement algébrique de  $\bar{X}$ . Toutes ces constructions s'interprètent particulièrement bien à l'aide de l'arbre de  $\text{PGL}_2(K)$  introduit par Bruhat-Tits ([1] et [7]) et nous allons commencer par là.

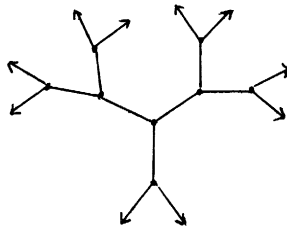
1. L'arbre de  $\text{PGL}_2(K)$ 

Soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension 2. Un réseau  $M$  de  $V$  est un sous- $R$ -module de  $V$ , libre de rang 2. Deux réseaux  $M$  et  $M'$  sont dits équivalents s'ils sont homothétiques, i.e. s'il existe  $a \in K^*$  tel que  $M' = aM$ . Soit  $S$  l'ensemble des classes d'équivalence.

Si  $M$  et  $M'$  sont deux réseaux, on peut trouver une base  $e_1, e_2$  de  $M$  et des entiers  $n_1, n_2$ , tels que  $(\pi^{n_1} e_1, \pi^{n_2} e_2)$  soit une base de  $M'$ .

L'entier  $|n_2 - n_1|$  ne dépend que des classes d'équivalence et permet de définir une distance sur  $S$ . Notons que quitte à faire une homothétie sur  $M'$ , on peut supposer que  $M'$  est "en position" par rapport à  $M$ , c'est-à-dire que  $n_1 = 0$  et que  $n_2 \geq 0$ .

On construit un graphe  $A$  ayant pour ensemble de sommets  $S$ ; deux sommets étant joints par une arête s'ils sont à une distance 1. On vérifie aisément que ce graphe est sans circuits et connexe, donc est un arbre. Le groupe  $\text{PGL}(V)$  opère isométriquement et transitivement sur  $S$ . Le stabilisateur d'un sommet, défini par le réseau  $M$ , est l'image de  $\text{GL}(M)$ ; les arêtes issues d'un sommet sont en correspondance avec les points de la droite projective sur  $k$  et cette bijection est canonique modulo un automorphisme linéaire de  $\mathbb{P}^1(k)$ ; le stabilisateur strict d'une arête est conjugué à l'image dans  $\text{PGL}_2(K)$  du sous-groupe de  $\text{GL}_2(R)$  formé des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $v(c) > 0$ ; il y a de plus des éléments du type  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$  qui échangent les deux extrémités d'une arête.



(Allure de  $A$  dans le cas où  $k$  a deux éléments)

Dans un arbre, on a la notion de demi-droite issue d'un sommet  $P$ . Deux telles demi-droites définissent le même bout si elles coïncident en dehors d'un nombre fini de sommets. Une demi-droite de  $A$  se représente par une chaîne de réseaux  $M_0 \subset M_1 \subset \dots$  telle que  $M_0/M_n \simeq R/\pi^n R$ . Alors  $D = \bigcap M_n$  est un facteur direct de rang 1 de chacun des  $M_i$  et  $KD$  est une droite de  $V$ . On établit de cette façon une application bijective canonique entre l'ensemble  $B$  des bouts de  $A$  et les points de  $\mathbb{P}^1(V)$ , droite projective construite sur  $V$ . Cette bijection est compatible avec l'action de  $\text{PGL}_2(V)$ .

Etant donnés deux bouts distincts  $x, y$ , il existe dans  $A$  une unique droite d'extrémités  $x$  et  $y$ . Trois bouts distincts  $x, y, z$  déterminent un sommet  $\sigma(x, y, z)$  : l'unique sommet  $P$  commun aux trois droites  $(x, y)$ ,  $(y, z)$ ,  $(z, x)$  ou encore l'unique sommet  $P$ , tel que les demi-droites d'origine  $P$ , d'extrémités  $x, y, z$  partent de  $P$  suivant trois arêtes distinctes. Enfin, si  $x, y, z, t$  sont quatre bouts distincts, la distance des sommets  $\sigma(x, y, z)$  et  $\sigma(x, y, t)$  n'est autre, au signe près, que la valuation du birapport  $(x, y, z, t)$ .

## 2. Sous-groupe de Schottky de $\text{PGL}_2(V)$

DÉFINITION.- Soit  $\gamma \in \text{PGL}_2(K)$  l'image d'un élément  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\text{GL}_2(K)$ . On dit que  $\gamma$  est hyperbolique s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes :

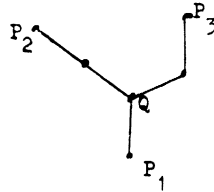
- (i)  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  a 2 valeurs propres (dans  $K$ ) de valuation distinctes.
- (ii)  $\gamma$  est un conjugué de l'image de  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , avec  $\lambda \in \mathfrak{m}$ .
- (iii)  $ad - bc / (a + d)^2 \in \mathfrak{m}$ .

DÉFINITION.- Un groupe de Schottky est un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\text{PGL}(V)$ , de type fini, dont les éléments distincts de l'élément neutre sont hyperboliques.

Désormais  $\Gamma$  désigne un groupe de Schottky. Alors  $\Gamma$  est nécessairement un sous-groupe discret de  $\text{PGL}(V)$  et opère librement sur l'arbre  $A$ , donc est

un groupe libre  $[\Gamma]$ . On suppose de plus que  $\Gamma$  n'est pas commutatif de sorte que l'ensemble  $\Sigma$  des points fixes dans  $P^1(V)$ , des éléments non nuls de  $\Gamma$ , est infini.

Nous allons maintenant associer à  $\Gamma$  un sous-arbre  $\Lambda$  de  $A$ . Les sommets de  $\Lambda$  sont les sommets de  $A$  de la forme  $\sigma(x, y, z)$ , où  $x, y, z$  sont trois points distincts de  $\Sigma$ . Pour s'assurer que l'on obtient ainsi les sommets d'un sous-arbre de  $A$ , il suffit de vérifier que si l'on a trois sommets  $P_j = \sigma(x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  alors le sommet  $Q$  de  $A$  commun aux trois segments  $[P_1P_2]$ ,  $[P_2P_3]$ ,  $[P_3P_1]$  est aussi un sommet de  $\Lambda$ . On peut supposer que les  $P_i$  ne sont pas alignés, de sorte que l'on a un diagramme du type



Soit  $t_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) l'un des trois points  $x_j, y_j, z_j$ , pour lequel la demi-droite d'origine  $P_j$ , d'extrémité  $t_j$  ne part pas de  $P_j$  suivant la même arête que  $P_jQ$ . Alors  $Q = \sigma(t_1, t_2, t_3)$ .

Par construction, de chaque sommet de  $\Lambda$  partent au moins trois arêtes. En particulier, les bouts de  $\Lambda$  sont infinis et s'identifient à une partie des bouts de  $A$ , donc à une partie  $\bar{\Sigma}$  de  $P^1(V)$ . La droite de  $A$  qui joint deux points de  $\Sigma$  est contenue dans  $\Lambda$ , donc  $\bar{\Sigma}$  contient  $\Sigma$ . Par ailleurs  $\Sigma$  est clairement dense dans  $\bar{\Sigma}$ , de sorte que  $\bar{\Sigma}$  n'est autre que l'adhérence de  $\Sigma$  dans  $P^1(V)$ .

Le groupe  $\Gamma$  opère sur  $\Sigma$  et donc sur  $\Lambda$ ; comme  $\Gamma$  opère librement sur  $A$ , il opère aussi librement sur  $\Lambda$ .

PROPOSITION.- Le graphe quotient  $\Lambda^0 = \Lambda/\Gamma$  est fini.

En effet, soient  $P$  un sommet de  $\Lambda$  et  $\tau_1, \dots, \tau_n$  une base du groupe libre  $\Gamma$ . Posons  $P_i = \tau_i(P)$  et soit  $\Lambda'$  le sous-arbre fini de  $\Lambda$ , réunion

des segments  $[P, P_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Montrons que  $\Lambda^0$  est un quotient de  $\Lambda'$ . Il faut voir que  $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{\tau \in \Gamma} \tau(\Lambda')$  est égal à  $\Lambda$ . Or, il est clair que  $\tilde{\Lambda}$  est un sous-arbre plein de  $\Lambda$ . Par ailleurs, si  $\tau$  est un élément non nul de  $\Gamma$ ,  $\tau$  opère sans point fixe sur  $\tilde{\Lambda}$ ; si  $Q$  est un point de  $\tilde{\Lambda}$ , tel que la distance de  $Q$  à  $\tau(Q)$  soit minimum. Alors, les points  $\tau^n(Q)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , sont sur une droite de  $\tilde{\Lambda}$ , sur laquelle  $\tau$  opère par translation. Il en résulte que  $\Sigma$  est contenu dans les bouts de  $\tilde{\Lambda}$  et d'après la définition de  $\Lambda$ , tout sommet de  $\Lambda$  est alors dans  $\tilde{\Lambda}$ .

Comme  $\Lambda^0$  est localement homéomorphe à  $\Lambda$ , on déduit de la proposition précédente que  $\Lambda$  est un arbre localement fini.

### 3. Réalisation géométrique de $\Lambda$

Notons  $P(V)$  le schéma sur  $K$  qui est la droite projective définie par  $V$ , donc égal au spectre homogène de l'algèbre symétrique de  $V$ . De même, à tout réseau  $M$  de  $V$ , on associe  $P(M)$ , spectre homogène de l'algèbre symétrique du  $R$ -module  $M$ . Donc  $P(M)$  est une droite projective au-dessus de  $R$ , munie d'une identification canonique de sa fibre générique avec  $P(V)$ . Si  $M$  et  $M'$  sont deux réseaux de  $V$ , l'identité des fibres génériques de  $P(M)$  et  $P(M')$  se prolonge en un isomorphisme  $P(M) \simeq P(M')$  si et seulement si  $M$  et  $M'$  sont homothétiques. On voit donc que les sommets de l'arbre  $\Lambda$  correspondent aux  $R$ -droites projectives qui prolongent  $P(V)$ , à isomorphismes près.

Soient toujours  $M$  et  $M'$  deux réseaux de  $V$ . Alors les éléments de  $M'$  engendrent un idéal divisoriel  $I(M')$  de  $\text{Sym}(M)$ ; de même les éléments de  $M$  engendrent un idéal divisoriel  $I(M)$  de  $\text{Sym}(M')$ . Si on remplace  $M'$  par un réseau homothétique,  $I(M')$  est modifié par tensorisation par un idéal inversible. En particulier, si  $M'$  est en position par rapport à  $M$  et à la distance  $r > 0$  de  $M$ ,  $I(M')$  est un idéal de  $\text{Sym}(M)$  qui définit une section de  $P(M)$  au-dessus de  $R/\pi^r R$ . On établit ainsi une correspondance canonique entre les segments dans  $\Lambda$ , d'origine le sommet défini par  $M$  et les sections de  $P(M)$  au-dessus des quotients artiniens de  $R$ . Par passage à la limite, on retrouve la correspondance entre bouts de  $\Lambda$  et sections de  $P(M)$  au-dessus de  $R$ .

(qui correspondent eux-mêmes aux points rationnels de  $P(V)$ ).

Considérons maintenant  $P(MM')$ , le joint de  $P(M)$  et  $P(M')$ , c'est-à-dire l'adhérence schématique dans  $P(M) \times_{\mathbb{R}} P(M')$  du graphe du morphisme identique des fibres génériques. On a donc un diagramme (commutatif)

$$\begin{array}{ccc} & P(MM') & \\ \rho \swarrow & & \searrow \rho' \\ P(M) & & P(M') \end{array}$$

On vérifie immédiatement que  $\rho$  (resp.  $\rho'$ ) n'est autre que le morphisme d'éclatement de l'idéal divisoriel  $I(M')$  (resp.  $I(M)$ ). En particulier, la fibre spéciale  $\overline{P(MM')}$  de  $P(MM')$  est réduite et a deux composantes irréductibles, qui se projettent isomorphiquement, l'une sur  $\overline{P(M)}$  grâce à  $\rho$  et l'autre sur  $\overline{P(M')}$  grâce à  $\rho'$ . Ces deux composantes se coupent transversalement en un point et l'anneau local de  $P(MM')$  en ce point est isomorphe à l'anneau local à l'origine de  $R[X,Y]/XY - \pi^n$ .

Nous aurons à considérer des schémas en courbes  $C$  sur  $k$ , localement de type fini, vérifiant les conditions suivantes :

(\*) (i)  $C$  est réduit.

(ii) Les normalisés des composantes irréductibles de  $C$  sont des droites projectives sur  $k$ .

(iii) Un point singulier de  $C$  est rationnel et l'anneau local est analytiquement isomorphe au localisé à l'origine de  $XY = 0$  (autrement dit, on a soit un point double ordinaire d'une composante de  $C$ , à tangentes rationnelles, soit un point commun à deux composantes qui se coupent transversalement).

A un tel schéma, on associe un graphe, ayant pour sommets les composantes irréductibles ; un point commun à deux composantes définit une arête, un point double d'une composante définit une arête qui est un lacet.

Soit, maintenant,  $\Lambda$  un sous-arbre fini de  $A$ , dont les sommets sont définis par des réseaux  $M_1, \dots, M_n$  et soit  $P(\Lambda)$  le joint des  $P(M_i)$ . On déduit immédiatement de l'étude faite dans le cas où  $\Lambda$  est un segment, que la fibre spéciale  $\overline{P(\Lambda)}$  de  $P(\Lambda)$  vérifie (\*) et que son graphe s'identifie cano-



niement à  $\Lambda$ . Plus précisément, pour tout  $i$ , il existe une et une seule composante irréductible  $C_i$  de  $\overline{P(\Lambda)}$ , qui par la projection canonique  $P(\Lambda) \rightarrow P(M_i)$  s'envoie isomorphiquement sur  $\overline{P(M_i)}$ . A une arête  $[M_i M_j]$  de  $\Lambda$ , de longueur  $n$ , correspond un point d'intersection de  $C_i$  et  $C_j$  et l'anneau local de  $P(\Lambda)$  en ce point est isomorphe à  $R[X, Y]/XY - \pi^n$ . Notons par ailleurs que  $P(\Lambda)$  est propre, plat sur  $S$  et normal.

Considérons enfin le cas d'un arbre  $\Lambda$  localement fini dont les sommets sont définis par des réseaux  $M_i$ . Soit  $M$  l'un d'entre eux et considérons  $\Lambda$  comme réunion croissante des sous-arbres finis  $\Lambda_n$  où  $\Lambda_n$  est réunion des segments de  $\Lambda$ , d'origine  $M$ , contenant au plus  $n + 1$  sommets. Alors les schémas  $P(\Lambda_n)$  forment un système projectif. Les arêtes de  $\Lambda_{n+1} - \Lambda_n$  définissent un nombre fini de points rationnels non singuliers de  $P(\Lambda_n)$ ; soit  $U_n$  l'ouvert complémentaire dans  $P(\Lambda_n)$ . Alors pour tout entier  $m \geq 0$ , les morphismes canoniques  $P(\Lambda_{n+m}) \rightarrow P(\Lambda_n)$  sont des isomorphismes au-dessus de  $U_n$  de sorte que l'on obtient des immersions ouvertes  $U_0 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow \dots$ . On note  $P(V)$  le schéma réunion des  $U_n$ .

PROPOSITION.-  $P(\Lambda)$  est un  $R$ -schéma plat normal de fibre générique  $P(V)$ , dont la fibre spéciale  $\overline{P(\Lambda)}$  vérifie (\*). Plus précisément, pour tout  $i$ , il existe une projection canonique  $P(\Lambda) \rightarrow P(M_i)$  et une unique composante irréductible de  $\overline{P(\Lambda)}$  qui par cette projection s'envoie isomorphiquement sur  $\overline{P(M_i)}$ . Cette correspondance s'étend en un isomorphisme canonique du graphe de  $\overline{P(\Lambda)}$  sur  $\Lambda$ .

Soit alors  $x$  un point fermé de la fibre générique  $P(V)$  de  $P(\Lambda)$ . Comme chacun des  $P(\Lambda_n)$  est propre sur  $R$ ,  $x$  se spécialise en un point de la fibre fermée de  $P(\Lambda_n)$ . Qu'en est-il à la limite dans  $P(\Lambda)$ ? La réponse est immédiate:  $x$  se spécialise dans  $P(\Lambda)$  si et seulement si,  $x$  n'est pas un point rationnel de  $P(V)$  correspondant à un bout infini de  $\Lambda$ . Pour éliminer ces points, on va remplacer  $P(\Lambda)$  par son complété  $\mathcal{O}(\Lambda)$  le long de la fibre fermée, c'est-à-dire par le schéma formel  $\varprojlim_n P_n(\Lambda)$ , où

$$P_n(\Lambda) = P(\Lambda) \otimes_R R/\pi^n R \quad (\text{EGA I, } \S 9).$$

Cette opération de complétion nous fait passer du domaine de la géométrie algébrique à celui de la géométrie analytique. En effet, munissons l'espace projectif  $P(V)$  de sa structure analytique (rigide) au sens de Tate, Kiehl (cf. [8] et [4]). Alors le schéma formel  $\mathcal{P}(\Lambda)$  a une "fibre générique" qui correspond au sous-espace analytique ouvert de  $P(V)$ , ayant pour espace sous-jacent le complémentaire des bouts infinis de  $\Lambda$ .

#### 4. Passage au quotient par $\Gamma$

Revenons à notre groupe  $\Gamma$  et à l'arbre associé  $\Lambda$ . On peut appliquer à  $\Lambda$  la construction précédente. Le groupe  $\Gamma$  opère sur  $P(\Lambda)$  et donc sur  $\mathcal{P}(\Lambda)$  de façon compatible avec son action sur  $\Lambda$ , en particulier, un élément non nul de  $\Gamma$  ne laisse fixe aucun sommet et aucune arête de  $\Lambda$ , donc  $\Gamma$  opère librement sur la fibre fermée de  $P(\Lambda)$ .

Nous allons construire un quotient  $\mathcal{P}(\Lambda)/\Gamma$  en deux crans. Soit d'abord  $\Gamma_0$  un sous-groupe invariant de  $\Gamma$ , d'indice fini tel qu'un élément non nul de  $\Gamma_0$  ne transforme pas un sommet de  $\Lambda$  en un sommet adjacent. On peut alors recouvrir  $\mathcal{P}(\Lambda)$  par des ouverts affines  $\overline{w}_i$  tel que  $\tau(\overline{w}_i) \cap \overline{w}_i = \emptyset$  pour  $\tau \neq 1$ . Soit  $w_i$  l'ouvert formel affine de  $\mathcal{P}(\Lambda)$  défini par  $\overline{w}_i$ . Alors les  $w_i$  recouvrent  $\mathcal{P}(\Lambda)$  et on construit le schéma formel quotient  $\mathcal{P}(\Lambda)/\Gamma_0 = \mathcal{X}_{\Gamma_0}$  par simple recollement des  $w_i$ . Comme  $\Lambda/\Gamma$  est un graphe fini, il en est de même de  $\Lambda/\Gamma_0$  et par suite  $\mathcal{X}_{\Gamma_0}$  est de type fini sur  $R$ , donc est propre et par ailleurs plat et normal. Le groupe fini  $\Gamma/\Gamma_0$  opère librement sur  $\mathcal{X}_{\Gamma_0}$ ; en grim pant sur les puissances de  $\pi$ , on construit la courbe formelle quotient  $\mathcal{X}_{\Gamma}$  qui est elle aussi propre normale et plate sur  $R$ . Soit  $p : \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{X}_{\Gamma_0} \rightarrow \mathcal{X}_{\Gamma}$  le morphisme composé. Alors  $p$  est un morphisme formel, étale surjectif, compatible avec  $\Gamma$  et le couple  $(\mathcal{X}_{\Gamma}, p)$  est un quotient de  $\mathcal{P}(\Lambda)$  par  $\Gamma$ , unique à isomorphisme près.

Par ailleurs, en relevant à  $\mathcal{X}_{\Gamma}$  un diviseur ample sur la fibre spéciale

$\bar{\mathcal{C}}_\Gamma$ , on construit un diviseur ample sur  $\mathcal{C}_\Gamma$  et par suite  $\mathcal{C}_\Gamma$  est algébrisable, de façon essentiellement unique en un schéma en courbes  $X_\Gamma$  propre (EGA III, tn. 5.4.5), et  $X_\Gamma$  est plat et normal. Ces propriétés restent vraies après extension de  $R$  à la clôture intégrale de  $R$  dans une extension finie de  $K$ , la fibre générique de  $X_\Gamma$  est lisse sur  $K$ .

Rappelons [2] qu'une courbe stable au-dessus d'un schéma  $T$  et un  $T$ -schéma en courbes, propre et plat, dont les fibres géométriques satisfont aux deux conditions suivantes :

- (i) les seules singularités sont des points doubles ordinaires.
- (ii) Si une composante irréductible est une droite projective, elle rencontre les autres composantes en au moins trois points.

DÉFINITION.- Une courbe stable sur le corps  $k$  qui vérifie (\*) est dite déployée et dégénérée.

THÉORÈME.- Le  $R$ -schéma  $X_\Gamma$  est une  $R$ -courbe stable, dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale est déployée et dégénérée. Si  $\Gamma$  est un groupe libre de rang  $g$  alors les fibres de  $X_\Gamma$  sont de genre  $g$ .

En effet,  $X_\Gamma$  est une courbe propre qui vérifie (\*) et qui est stable car d'un sommet de  $\Lambda$  partent au moins trois arêtes. Le genre de  $X_\Gamma$  est égal au nombre de lacets de son graphe, donc au nombre de générateurs de  $\Gamma$ .

### 5. Construction inverse

Soit  $X$  une  $R$ -courbe stable, dont la fibre générique est lisse de genre  $g \geq 2$  et dont la fibre spéciale  $\bar{X}$  est déployée et dégénérée.

Nous allons montrer que  $X$  peut s'obtenir à partir d'un sous-groupe de Schottky de  $\text{PGL}_2(K)$  par la construction précédente.

Soit  $\mathcal{C}$  le  $R$ -schéma formel propre et plat sur  $R$ , normal, complété de  $X$  le long de  $\bar{X}$ . La courbe  $\bar{X}$  admet un revêtement universel  $\bar{P} \xrightarrow{\bar{p}} \bar{X}$ , de groupe  $\Gamma$  libre, à  $g$  générateurs. Le graphe  $\Lambda$  de  $\bar{P}$  est un arbre locale-

ment fini tel que de chacun de ses sommets partent au moins trois arêtes : c'est aussi un revêtement universel du graphe de  $\bar{X}$ . Compte tenu de l'unicité des relèvements infinitésimaux des morphismes étales (EGA IV, 17),  $\bar{p}$  s'étend en un R-morphisme formel étale  $p : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  qui fait de  $\mathcal{G}$  un revêtement de  $\mathcal{X}$ , galoisien de groupe  $\Gamma$ . Comme  $\mathcal{X}$  est plat sur R et normal, il en est de même de  $\mathcal{G}$ .

Il nous faut réaliser  $\Gamma$  comme sous-groupe de  $\text{PGL}_2(K)$ . Soit I l'ensemble des sommets de  $\Lambda$ . Pour tout  $i \in I$ , soit  $\mathcal{D}_i$  un diviseur relatif positif formel sur  $\mathcal{G}$  dont le support ne rencontre que la composante irréductible  $C_i$  de  $\bar{P}$  relative au sommet  $i$ . Soient  $\Lambda'$  un sous-arbre fini de  $\Lambda$  et  $\mathcal{D}'$  le diviseur somme des  $\mathcal{D}_i$  pour  $i \in \Lambda'$ . Notons  $C_{\Lambda'}$  la courbe propre, contenue dans  $\bar{P}$ , réunion des  $C_i$  pour  $i \in \Lambda'$ . Soit  $\mathcal{L}'$  le faisceau inversible formel sur  $\mathcal{G}$  égal à  $0_{\mathcal{G}}(\mathcal{D}')$  et soit  $\bar{\mathcal{L}}'$  sa restriction à la fibre spéciale  $\bar{P}$ .

Alors  $\bar{\mathcal{L}}'$  est engendrée par ses sections globales, la k-algèbre graduée

$\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\bar{P}, \bar{\mathcal{L}}'^{\otimes n})$  est de type fini et le k-morphisme canonique

$\bar{r}' : \bar{P} \rightarrow \text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\bar{P}, \bar{\mathcal{L}}'^{\otimes n}))$  (EGA II, 3.7) s'identifie à la projection de  $\bar{P}$  sur  $C_{\Lambda'}$ , qui envoient les composantes irréductibles ne figurant pas dans  $C_{\Lambda'}$  sur des points.

En utilisant le fait que  $H^1(\bar{P}, \bar{\mathcal{L}}'^{\otimes n}) = 0$  pour  $n \geq 0$  et la platitude de  $\mathcal{G}$ , on prouve que  $H^0(\mathcal{G}, \mathcal{L}'^{\otimes n})$  est un R-module libre de type fini et que le morphisme canonique  $H^0(\mathcal{G}, \mathcal{L}'^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{R} \rightarrow H^0(\bar{P}, \bar{\mathcal{L}}'^{\otimes n})$  est un isomorphisme. On en déduit que  $\mathcal{L}'$  est engendré par ses sections globales, que

$\text{Proj}(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{G}, \mathcal{L}'^{\otimes n}))$  est un R-schéma propre  $P(\Lambda')$ , plat sur R, normal

et que l'on a un morphisme formel canonique  $r_{\Lambda'}$  de  $\mathcal{G}$  dans le complété formel  $\mathcal{O}(\Lambda')$  de  $P(\Lambda)$  qui relève  $\bar{r}'_{\Lambda'}$ . Comme la fibre spéciale de  $P(\Lambda')$  est isomorphe à  $C_{\Lambda'}$ , elle est de genre 0, donc la fibre générique est isomorphe à la droite projective sur K (noter qu'elle possède un point rationnel). Si le graphe  $\Lambda'$  est réduit au sommet d'indice  $i$  de  $\Lambda$ ,  $P(\Lambda') = P_i$  est alors

une droite projective relative au-dessus de  $R$ . Dans le cas général, si  $i$  est un sommet  $\Lambda'$ , on a un morphisme canonique  $P(\Lambda') \rightarrow P_i$  qui est un isomorphisme sur les fibres génériques. Ces remarques permettent, (une fois choisis un sommet  $i_0$  de  $\Lambda$  et un  $K$ -isomorphisme de  $P(V)$  sur la fibre générique de  $P_{i_0}$ ) de réaliser canoniquement  $\Lambda$  comme sous-arbre de l'arbre  $A$  de  $PGL_2(V)$  et de définir un isomorphisme canonique entre  $\mathcal{G}$  et le complété formel  $\mathcal{G}(\Lambda)$  de la réalisation géométrique  $P(\Lambda)$  de  $\Lambda$ . De plus, l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{G}$ , donc aussi sur  $\mathcal{G}(\Lambda)$ , provient d'une action de  $\Gamma$  sur  $P(\Lambda)$  et en particulier  $\Gamma$  opère sur  $P(V)$ , donc est contenu dans  $PGL_2(V)$ ; ce plongement est compatible avec la réalisation de  $\Lambda$  comme sous-arbre de  $A$ .

Soit  $\gamma$  un élément non nul de  $\Gamma$ . Alors  $\gamma$  et ses puissances non nulles opèrent sans point fixe sur  $\Lambda$ , donc  $\gamma$  opère par translation sur une droite convenable de  $\Lambda$ . L'ensemble  $\Sigma$  des points fixes des éléments de  $\Gamma$  est donc contenu dans l'ensemble des bouts de  $\Lambda$ . Soient  $H$  un sommet de  $\Lambda$  et  $H_0$  son image dans le graphe quotient  $\Lambda_0 = \Lambda/\Gamma$ . Comme de  $H$  partent au moins trois arêtes, on peut trouver dans  $\Lambda_0$  trois lacets d'origine  $H_0$  qui partent suivant trois arêtes (orientées) différentes. Ces lacets correspondent à trois éléments du groupe fondamental  $\Gamma$ , ayant des points fixes respectifs  $x, y, z$  tels que  $\sigma(x,y,z) = H$ . Donc  $\Lambda$  est l'arbre canoniquement associé à  $\Gamma$ . Ceci achève de montrer que  $X$  est isomorphe à une courbe du type  $X_\Gamma$ .

Soient maintenant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sous-groupes de Schottky et cherchons à quelles conditions  $X_{\Gamma_1}$  et  $X_{\Gamma_2}$  sont isomorphes. Rappelons que le foncteur  $\underline{F}$  des isomorphismes de deux courbes stables est représentable par un  $R$ -schéma fini et net ([2]). Par ailleurs, comme les fibres spéciales  $\bar{X}_{\Gamma_1}$  et  $\bar{X}_{\Gamma_2}$  sont déployées et dégénérées, tout isomorphisme géométrique est rationnel sur  $k$ , donc  $\underline{F}$  est décomposé. Il résulte de ces remarques que tout isomorphisme géométrique des fibres génériques de  $X_{\Gamma_1}$  et  $X_{\Gamma_2}$  est rationnel sur  $K$  et s'étend en un  $R$ -isomorphisme  $u : X_{\Gamma_1} \simeq X_{\Gamma_2}$ . Après complétion formelle et passage aux

revêtements universels,  $u$  se relève en un isomorphisme formel  $v : \mathcal{P}(\Lambda_1) \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda_2)$  compatible avec les actions respectives de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . En introduisant comme plus haut un diviseur formel, on montre que  $v$  provient d'un isomorphisme algébrique  $P(\Lambda_1) \xrightarrow{\sim} P(\Lambda_2)$ , donc d'un automorphisme de la fibre générique  $P(V)$ . On a donc établi le résultat suivant.

THÉORÈME.- 1) Les fibres génériques géométriques de  $X_{\Gamma_1}$  et  $X_{\Gamma_2}$  sont isomorphes si et seulement si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont conjugués dans  $\text{PGL}(V)$ .

2) Tout automorphisme de la fibre générique géométrique de  $X_{\Gamma}$  est rationnel sur  $K$  et le groupe de ces automorphismes est canoniquement isomorphe à  $N(\Gamma)/\Gamma$  où  $N(\Gamma)$  est le normalisateur de  $\Gamma$  dans  $\text{PGL}(V)$ .

### 6. Un exemple

Soient  $P^1(R)$  une droite projective sur  $R$ ,  $P^1(k)$  sa fibre spéciale et  $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$   $2n$  points rationnels distincts sur la fibre spéciale  $P^1(k)$ . Notons  $C$  la courbe stable, dégénérée et déployée obtenue en identifiant  $x_i$  et  $y_i$  pour tout  $i$ . Prenons  $P^1(R)$  comme sommet de base  $H$  de l'arbre  $A$ . Les points  $(x_i, y_i)$  déterminent alors  $2n$  arêtes distinctes issues de  $H$ . Soient  $D_1, \dots, D_n$   $n$  droites de  $A$  passant par  $H$  telles que  $D_i$  contiennent les arêtes relatives à la paire  $(x_i, y_i)$ . Enfin, pour tout  $i$ , soit  $\tau_i$  un élément hyperbolique de  $\text{PGL}_2(K)$  qui opère par translation sur  $D_i$ . Alors les  $\tau_i$  engendrent un groupe de Schottky  $\Gamma$ , libre de rang  $n$ ;  $\Gamma$  opère transitivement sur les sommets de l'arbre  $\Lambda$  associé à  $\Gamma$  et de chaque sommet de  $\Lambda$  partent  $2n$  arêtes. Les courbes  $X_{\Gamma}$  correspondantes aux divers groupes  $\Gamma$  s'identifient aux  $R$ -courbes stables, à fibre générique lisse et à fibre spéciale isomorphes à  $C$ . Prenons en particulier  $n = 2$ , pour  $k$  un corps à trois éléments, et  $\tau_i$  opérant par translation d'amplitude 1 sur  $D_i$ . Alors  $\Lambda = A$ . Si l'on regarde la réalisation géométrique de  $\Lambda$ , on trouve que  $X_{\Gamma}$  est régulier et que sa fibre générique est le quotient par  $\Gamma$  de l'ouvert analytique de  $P^1(K)$  complémentaire des points rationnels.

7. Généralisation

Désignons maintenant par  $R$  un anneau local noethérien, complet pour la topologie définie par son idéal maximal, intégralement clos, de corps résiduel  $k$ , de corps des fractions  $K$ . Si  $X \rightarrow R$  est une  $R$ -courbe stable dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale est déployée et dégénérée, la construction "inverse" que l'on vient de décrire dans le cas où  $R$  est un anneau de valuation discrète s'étend immédiatement. Elle fournit un arbre localement fini  $\Lambda$ , une réalisation géométrique formelle  $\mathcal{P}(\Lambda)$  et un sous-groupe libre  $\Gamma$  de  $\mathrm{PGL}_2(K)$ . La construction directe de  $X_\Gamma$  à partir d'un sous-groupe  $\Gamma$  convenable est par contre plus délicate, faute de disposer d'un arbre ambiant  $A$  associé à  $\mathrm{PGL}_2(K)$ . Néanmoins, Mumford réussit à définir ce que doit être un sous-groupe de Schottky  $\Gamma$ , à associer aux points fixes de  $\Gamma$  un arbre  $\Lambda$ , une réalisation géométrique  $\mathcal{P}(\Lambda)$  et une courbe stable  $X_\Gamma$ , quotient de  $\mathcal{P}(\Lambda)$  par  $\Gamma$ . Cette uniformisation fournit une bonne description de la compactification du module des courbes lisses, au voisinage des points à l'infini correspondant aux fibres les plus dégénérées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local, Publ. Math. I.H.E.S., n° 41 (1972), 5-252.
- [2] P. DELIGNE and D. MUMFORD - The irreducibility of the space of curves of given genus, Pub. Math. I.H.E.S., n° 36 (1969).
- [3] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK - Eléments de géométrie algébrique, Pub. Math. I.H.E.S., n° 4, 8, 11, ... cité EGA .
- [4] R. KIEHL - Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionen Theorie, Invent. Math., 2 (1967).
- [5] D. MUMFORD - An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compositio Mathematica, vol. 24, Fasc. 2, 1972.
- [6] P. ROQUETTE - Analytic theory of elliptic functions over local fields, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Neue Folge, Heft 1 (1970).
- [7] J.-P. SERRE - Groupes discrets, Notes Miméo., Cours au Collège de France, 1969.
- [8] J. TATE - Rigid analytic spaces, Invent. Math., 12 (1971).