ADRIEN DOUADY

Le théorème des images directes de Grauert

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 404, p. 73-87

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__73_0>

Séminaire BOURBAKI 404-01
24e année, 1971/72, n° 404 Novembre 1971

LE THÉORÈME DES IMAGES DIRECTES DE GRAUERT

[d'après KIEHL-VERDIER]

par Adrien DOUADY

1. Introduction.

Soient X un espace $\mathbf{C}$-analytique séparé à base dénombrable et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. On sait que, pour tout ouvert U de X, l'espace vectoriel $\underline{F}(U)$ est de façon naturelle un espace de Fréchet nucléaire. Si V est un ouvert relativement compact de U, ce que nous écrirons $V \subset\subset U$, la restriction $\rho : \underline{F}(U) \to \underline{F}(V)$ est nucléaire, donc compacte [6].

THÉORÈME de finitude [1].- *Si X est compact, les espaces vectoriels $H^n(X;\underline{F})$ sont de dimension finie sur $\mathbf{C}$.*

La démonstration de ce résultat utilise les ingrédients suivants :

THÉORÈME de perturbation.- *Soient E et F deux espaces de Fréchet, $f : E \to F$ un morphisme surjectif et $u : E \to F$ un morphisme compact. Alors $\mathrm{Coker}(f-u)$ est de dimension finie et séparé.*

De ce théorème, on déduit facilement :

COROLLAIRE (L. Schwartz).- *Soient $E^\bullet$ et $F^\bullet$ deux complexes d'espaces de Fréchet et $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ un morphisme induisant un isomorphisme sur l'homologie et tel que f^n soit compact. Alors les espaces vectoriels $H^n(E^\bullet)$ et $H^n(F^\bullet)$ sont de dimension finie.*

Pour démontrer le Théorème de finitude, on prend deux recouvrements finis $\underline{V} = (V_i)$ et $\underline{W} = (W_i)$ de X par des ouverts de Stein tels que $W_i \subset\subset V_i$ pour tout i. Posons $E^\bullet = C^\bullet(X, \underline{V}; \underline{F})$ et $F^\bullet = C^\bullet(X, \underline{W}; \underline{F})$. D'après le Théorème B de Cartan et le Théorème de Leray, on a $H^n(E^\bullet) = H^n(F^\bullet) = H^n(X; \underline{F})$. Comme la restriction $\rho : E^\bullet \to F^\bullet$ est compacte, le Théorème de finitude découle du résultat de Schwartz.

On notera qu'on utilise seulement la compacité de ρ, non sa nucléarité.

Le Théorème des images directes est une "version relative" du théorème de finitude :

THÉORÈME <u>des images directes</u>.- <u>Soient</u> X <u>et</u> S <u>des espaces</u> C-<u>analytiques séparés,</u> $\pi : X \to S$ <u>un morphisme propre et</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau cohérent sur</u> X. <u>Alors les faisceaux</u> $R^n\pi_*\underline{F}$ <u>sont cohérents.</u>

Rappelons que $R^n\pi_*\underline{F}$ est le faisceau sur S associé au préfaisceau $U \longmapsto H^n(\pi^{-1}(U); \underline{F})$.

Une démonstration de cet énoncé a été donnée par Grauert en 1960 (cf. [2]). Une tentative a été faite pour l'exposer au Séminaire Bourbaki en Mai 1961. En fait, la démonstration de Grauert était extrêmement pénible et comportait de nombreuses erreurs de détail. Il a fallu attendre 1969 pour que Knorr [3] donne une démonstration correcte, mais toujours pénible. Au Congrès de Nice, en 1970, Kiehl a exposé le principe d'une nouvelle démonstration. Cette démonstration a été réalisée par Kiehl-Verdier [4]. Forster-Knorr [5] ont également obtenu une démonstration élémentaire.

C'est la méthode de Kiehl-Verdier que nous rapportons ici. Elle suit le plan de la démonstration du Théorème de finitude, mais en considérant des modules de

Fréchet sur des algébres de Fréchet, et en exploitant la nucléarité. Il faut introduire une notion de nucléarité relativement à une algèbre (l'algèbre $\underline{O}(S)$), notion qui décrive les propriétés des restrictions $\rho : \underline{F}(U) \to \underline{F}(V)$ pour $V \subset U \subset X$ et V relativement S-propre dans U . Ceci nécessite de continuels changements d'algèbre, qui correspondent à des rétrécissements de la base S .

A titre d'application, nous indiquons à la fin une démonstration du théorème de semi-continuité.

2. Les foncteurs $\hat{\otimes}_A$ et $\hat{\mathrm{Tor}}_n^A$.

Dans ce n° et le suivant, A désigne une algèbre de Fréchet nucléaire, i.e. un espace de Fréchet nucléaire sur $\mathbf{C}$ muni d'une multiplication bilinéaire continue qui en fait une algèbre commutative associative et unifère. On appelle A-module de Fréchet nucléaire un espace de Fréchet nucléaire E sur $\mathbf{C}$ muni d'une loi bilinéaire continue $A \times E \to E$ qui en fait un A-module. On dit qu'un A-module de Fréchet est nucléairement libre s'il est isomorphe à un A-module de la forme $A \hat{\otimes} V$, où V est un espace de Fréchet nucléaire sur $\mathbf{C}$. Soit E un A-module de Fréchet nucléaire ; on appelle résolution nucléairement libre de E une suite exacte

$$\cdots \to L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \cdots \to L_o \to E \to 0 ,$$

de A-modules de Fréchet, où les L_i sont nucléairement libres. Une telle résolution est dite directe si, pour tout n , l'image de d_n admet un supplémentaire topologique dans L_{n-1} comme espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ (pas comme A-module).

PROPOSITION 1.- a) Tout A-module de Fréchet nucléaire admet une résolution nucléairement libre directe.

b) Soient $L.$ et $L'.$ deux résolutions nucléairement libres directes d'un A-module E. Il existe un morphisme de $L'.$ dans $L.$ unique à homotopie près.

Démonstration. a) Elle répond à la question, la "résolution standard" de E, qu'on obtient en posant $L_n = \underbrace{A \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A}_{n+1} \hat{\otimes} E$, la structure de A-module provenant du premier facteur, et

$$d_n(a_o \otimes \ldots \otimes a_n \otimes x) = \Sigma(-1)^i a_o \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes x + (-1)^n a_o \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes a_n x ;$$

un opérateur d'homotopie, $\mathbf{C}$-linéaire seulement, est donné par $t \longmapsto 1 \otimes t$.

b) Si $L = A \hat{\otimes} V$, on a $\mathfrak{L}_A(L ; F) = \mathfrak{L}_{\mathbf{C}}(V ; F)$ pour tout A-module de Fréchet F, donc L est projectif au sens suivant : si $F \to G \to 0$ est une suite exacte, directe (sur $\mathbf{C}$), de A-modules de Fréchet, $\mathfrak{L}_A(L ; F) \to \mathfrak{L}_A(L ; G)$ est surjectif. L'assertion b) en résulte de façon classique.

Soient E et F deux A-modules de Fréchet nucléaires. On pose $E \hat{\otimes}_A F = \mathrm{Coker}(d : E \hat{\otimes} A \hat{\otimes} F \to E \hat{\otimes} F)$, où $d(x \otimes a \otimes y) = ax \otimes y - x \otimes ay$. L'espace $E \hat{\otimes}_A F$ est un A-module non nécessairement séparé. Il est séparé si E est nucléairement libre, car si $E = A \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} V$, on a $E \hat{\otimes}_A F = V \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} F$.

Pour tout n, on définit $\hat{\mathrm{Tor}}_n^A(E, F)$ de la façon suivante : on prend une résolution $L. \to F$ nucléairement libre directe de F et on pose $\hat{\mathrm{Tor}}_n^A(E, F) = H_n(E \hat{\otimes}_A L.)$; c'est un A-module non nécessairement séparé qui, à isomorphisme canonique près, ne dépend pas du choix de $L.$; on a $\hat{\mathrm{Tor}}_o^A(E, F) = E \hat{\otimes}_A F$.

On a $\hat{\mathrm{Tor}}_q^A(E, F) = 0$ pour $q > 0$ si F est nucléairement libre, car on peut alors prendre $L.$ réduite à $L_o = F$. Si $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ est une suite exacte courte de A-modules de Fréchet nucléaires, on a une suite exacte courte de complexes $0 \to E_1 \hat{\otimes}_A L. \to E_2 \hat{\otimes}_A L. \to E_3 \hat{\otimes}_A L. \to 0$, d'où une suite exacte (algébrique) longue des $\hat{\mathrm{Tor}}_n$. En prenant pour $L.$ la résolution standard de F , on obtient $E \hat{\otimes}_A L_n = E \hat{\otimes} \underbrace{A \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A}_{n} \hat{\otimes} F$, et on constate la symétrie des bifoncteurs $\hat{\mathrm{Tor}}_n^A$. De tout cela on déduit que l'on peut calculer les $\hat{\mathrm{Tor}}_n^A(E, F)$ en prenant une résolution nucléairement libre non nécessairement directe de F .

3. Transversalité.

DÉFINITION 1.- *Soient E et F deux A-modules de Fréchet nucléaires. On dit que E et F sont transverses si $E \hat{\otimes}_A F$ est séparé et si $\hat{\mathrm{Tor}}_q^A(E, F) = 0$ pour $q > 0$.*

Si E est nucléairement libre, il est transverse à F pour tout F .

Soit $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ une suite exacte, si F est transverse à E_2 et E_3 , il est transverse à E_1 .

Soient $A \to A_1 \to A_2$ des homomorphismes d'algèbres nucléaires et E un A-module de Fréchet nucléaire. Si A_1 et A_2 sont transverses à E sur A , alors A_2 est transverse à $A_1 \hat{\otimes}_A E$ sur A_1 .

PROPOSITION 2.- *Soient S_o un espace de Stein, U_o un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $S_o \times U_o$. Soient $S \subset\subset S_o$ et $U \subset\subset U_o$ des ouverts de Stein, et S' un ouvert de Stein de S . Alors $\underline{O}(S')$ et $\underline{F}(S \times U)$ sont transverses sur $\underline{O}(S)$.*

Démonstration. L'espace de Fréchet $\underline{O}(S \times U) = \underline{O}(S) \hat{\otimes} \underline{O}(U)$ est un module nucléairement libre sur $\underline{O}(S)$. Soit $\underline{L}. \to \underline{F}$ une résolution libre de $\underline{F}$ sur $S \times U$ (une telle résolution existe d'après le Théorème A). D'après le Théorème B, $\underline{L}.(S \times U)$ est une résolution de $\underline{F}(S \times U)$, nucléairement libre sur $\underline{O}(S)$. On a

$\underline{O}(S') \hat{\otimes}_{\underline{O}(S)} \underline{O}(S \times U) = \underline{O}(S') \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \underline{O}(U) = \underline{O}(S' \times U)$, d'où

$\underline{O}(S') \hat{\otimes}_{\underline{O}(S)} \underline{L}.(S \times U) = \underline{L}.(S' \times U)$. Mais $\underline{L}.(S' \times U)$ est une résolution de $\underline{F}(S' \times U)$, d'où $\underline{O}(S') \hat{\otimes}_{\underline{O}(S)} \underline{F}(S \times U) = \underline{F}(S' \times U)$ et $\hat{\mathrm{Tor}}_q^{\underline{O}(S)}(\underline{O}(S'), \underline{F}(S\times U)) = 0$ pour $q > 0$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 3.- *Soient* $E^\bullet$ *un complexe borné à droite de* A-*modules de Fréchet nucléaires, et* F *un* A-*module de Fréchet nucléaire, transverse aux* E^n . *Si* $E^\bullet$ *est acyclique en degré* $\geq k$, *il en est de même de* $F \hat{\otimes}_A E^\bullet$.

Démonstration. Les suites exactes $0 \to Z^n(E^\bullet) \to E^n \to Z^{n+1}(E^\bullet) \to 0$ montrent par récurrence descendante que $Z^n(E^\bullet)$ est transverse à F pour $n \geq k - 1$. Ces suites restent donc exactes par $\hat{\otimes}_A F$.

COROLLAIRE.- *Soient* $E^\bullet$ *et* $F^\bullet$ *deux complexes bornés à droite de* A-*modules de Fréchet nucléaires,* $f : E^\bullet \to F^\bullet$ *un morphisme et* M *un* A-*module de Fréchet nucléaire transverse aux* E^n *et aux* F^n . *Si* f *induit un isomorphisme sur l'homologie, il en est de même de* $1 \otimes f : M \hat{\otimes}_A E^\bullet \to M \hat{\otimes}_A F^\bullet$.

S'obtient en appliquant la proposition au "mapping cylinder" de f .

4. *Applications* A-*nucléaires et* A-*sous-nucléaires*.

DÉFINITION 2.- *Soient* A *une algèbre de Fréchet,* E *et* F *deux* A-*modules de Fréchet et* $f : E \to F$ *une application* A-*linéaire. On dit que* f *est* A-*nucléaire s'il existe une famille équicontinue* (ξ_i) *d'applications* A-*linéaires de* E *dans* A , *une famille bornée* (y_i) *d'éléments de* F *et une famille absolument sommable* (λ_i) *de nombres complexes telles que,* $\forall\, x \in E$,

$$f(x) = \Sigma\, \lambda_i\, \xi_i(x)\, y_i \ .$$

On dit que f est A-sous-nucléaire s'il existe un A-module de Fréchet M et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

où h est surjectif et g est A-nucléaire.

Si $u : E \to F$ est A-nucléaire, et si $f : E_1 \to E$ et $g : F \to F_1$ sont A-linéaires continues, $g \circ u \circ f$ est A-nucléaire. Si V et W sont des espaces de Fréchet nucléaires et $u : V \to W$ une application $\mathbf{C}$-nucléaire, $1_A \otimes u : A \hat{\otimes} V \to A \hat{\otimes} W$ est A-nucléaire. Par exemple :

PROPOSITION 4.- *Soient* S *un espace de Stein,* U *et* V *deux ouverts de Stein de* $\mathbf{C}^n$ *tels que* $V \subset\subset U$. *Alors la restriction* $\rho : \mathcal{O}(S \times U) \to \mathcal{O}(S \times V)$ *est* $\mathcal{O}(S)$*-nucléaire. Si* $S \subset\subset S_o$ *et* $U \subset\subset U_o$, *où* S_o *et* U_o *sont de Stein, pour tout faisceau analytique cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* $S_o \times U_o$, *la restriction* $\rho : \mathcal{F}(S \times U) \to \mathcal{F}(S \times V)$ *est* $\mathcal{O}(S)$*-sous-nucléaire.*

Soient E et F deux A-modules de Fréchet et $f : E \to F$ une application A-linéaire. Soit F_1 un sous-A-module fermé de F tel que $f(E) \subset F_1$ et notons f_1 l'application $x \longmapsto f(x)$ de E dans F_1 . Si f est A-nucléaire, f_1 n'est pas A-sous-nucléaire en général (même si A , E et F sont nucléaires). Cependant :

PROPOSITION 5.- *Avec les notations ci-dessus, supposons* A , E *et* F *nucléaires. Soient* B *une algèbre de Fréchet nucléaire et* $\rho : A \to B$ *un homomorphisme* $\mathbf{C}$*-nucléaire d'algèbres. On suppose que* B *est transverse sur* A *à* E , F *et* F/F_1 . *Alors, si* f *est A-sous-nucléaire,* $1_B \otimes f_1 : B \hat{\otimes}_A E \to B \hat{\otimes}_A F_1$ *est B-sous-nucléaire.*

Lemme 1.- Si f est A-nucléaire, $\rho \otimes f_1 : E \to B \hat{\otimes}_A F_1$ est C-nucléaire.

Démonstration du lemme. Ecrivons $f(x) = \Sigma \lambda_i \xi_i(x) y_i$ comme dans la définition 2, et factorisons ρ en $A \to A_1 \xrightarrow{\rho_1} B_1 \to B$, où A_1 et B_1 sont des espaces de Banach et ρ_1 est nucléaire. Alors $\rho \otimes f : E \to B \hat{\otimes}_A F$ se factorise en $E \xrightarrow{u} \ell^\infty(A_1) \xrightarrow{R} \ell^1(B_1) \xrightarrow{v} B \hat{\otimes}_A F$, où u est donnée par les ξ_i, v par les y_i, et $R = \Sigma \lambda_i \iota_i \circ \rho_1 \circ \pi_i$ est nucléaire. Donc $\rho \otimes f$ est C-nucléaire de E dans $B \hat{\otimes}_A F$. Grâce aux hypothèses de transversalité, $B \hat{\otimes}_A F_1$ s'identifie à un sous-espace fermé de $B \hat{\otimes}_A F$ et $\rho \otimes f$ applique E dans ce sous-espace, l'application induite étant $\rho \otimes f_1$. Comme E est nucléaire, il en résulte que $\rho \otimes f_1$ est nucléaire.

Démonstration de la proposition. Soit

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif où h est surjectif et g est A-nucléaire. Alors g induit une application $g_1 : M \to F_1$, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \hat{\otimes}_C M \arrow[r, "1_B \otimes (\rho \otimes g_1)"] \arrow[d] & B \hat{\otimes}_C (B \hat{\otimes}_A F_1) \arrow[d] \\ B \hat{\otimes}_A E \arrow[r, "1_B \otimes f_1"] & B \hat{\otimes}_A F_1 \end{tikzcd}$$

qui montre que $1_B \otimes f_1$ est A-sous-nucléaire.

5. Perturbations A-sous-nucléaires.

THÉORÈME 1.- *Soient A une algèbre de Fréchet nucléaire, E et F des A-modules de Fréchet nucléaires, f et u deux morphismes de E dans F. On suppose que u est A-sous-nucléaire, et que f est surjectif. Soient A_1 une algèbre de Fréchet et $\rho : A \to A_1$ un homomorphisme d'algèbres qui se factorise à travers une algèbre de Banach B. On suppose A_1 transverse sur A à E et F. Alors le conoyau de $1 \otimes (f - u) : A_1 \hat{\otimes}_A E \to A_1 \hat{\otimes}_A F$ est un A_1-module de type fini.*

(La conclusion de ce théorème est purement algébrique ; le conoyau en question n'est pas nécessairement séparé.)

Lemme 2.- *Soient B une algèbre de Banach, M un B-module de Fréchet et $v : M \to M$ un morphisme B-nucléaire. Alors $\mathrm{Coker}(1_M - v)$ est un B-module de type fini.*

Démonstration. Ecrivons $v(x) = \Sigma \lambda_i \xi_i(x) y_i$ comme dans la définition 2 et factorisons v en $M \xrightarrow{\alpha} \ell^1(B) \xrightarrow{\beta} M$, où $\alpha(x) = (\lambda_i \xi_i(x))$ et β est défini par les y_i. Posons $w = \alpha \circ \beta : \ell^1(B) \to \ell^1(B)$. L'application w est B-nucléaire car α l'est, et on a $\mathrm{Coker}(1_M - v) \approx \mathrm{Coker}(1_{\ell^1(B)} - w)$. On est donc ramené au cas où M est un module de Banach.

Si M est un module de Banach, on peut mettre v sous la forme $v' + v''$, où v' est de rang fini sur B et $\|v''\| < 1$. Alors $1 - v''$ est un automorphisme et $1 - v = (1 - v'') - v'$ a un conoyau de type fini.

Démonstration du Théorème. a) On peut supposer que u est A-nucléaire et E nucléairement libre.

b) On peut alors factoriser u en $f \circ v$, où $v : E \to E$ est A-nucléaire. En effet, écrivons $u(x) = \Sigma \lambda_i \, \xi_i(x) \, y_i$ comme dans la définition 2, et $\lambda_i = \lambda_i' \lambda_i''$ avec (λ_i') sommable et (λ_i'') tendant vers 0 . Quitte à remplacer y_i par $\lambda_i'' y_i$, on peut supposer que les y_i tendent vers 0 . On peut alors écrire $y_i = f(x_i)$, où les x_i tendent vers 0 , et on a $u = f \circ v$, où $v(x) = \Sigma \lambda_i \, \xi_i(x) \, x_i$.

c) On peut supposer que $F = E$ et $f = 1_E$. En effet, si $u = f \circ v$, f donne une application surjective de $\mathrm{Coker}(1_E - v)$ sur $\mathrm{Coker}(f - u)$, et de même après $\hat{\otimes}_A A_1$.

d) Supposons donc que $\rho : A \to A_1$ se factorise à travers une algèbre de Banach B , que $E = A \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} V$, où V est un espace de Fréchet nucléaire et que $u : E \to E$ est A-nucléaire. Alors $B \hat{\otimes}_A E = B \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} V$ est un B-module de Fréchet, et $1_B \otimes u : B \hat{\otimes}_A E \to B \hat{\otimes}_A E$ est B-nucléaire, donc le conoyau de $1 - (1_B \otimes u)$ est un B-module de type fini. Autrement dit, il existe $r \in \mathbb{N}$ et $h : B^r \to B \hat{\otimes}_A E$ tel que $(1_B \otimes (1 - u) \, , h) : B \hat{\otimes}_A E \oplus B^r \to B \hat{\otimes}_A E$ soit surjectif. Alors $(1_{A_1} \otimes (1 - u) \, , 1_{A_1} \otimes h) : A_1 \hat{\otimes}_A E \oplus A_1^r \to A_1 \hat{\otimes}_A E$ est surjectif.

C.Q.F.D.

6. Un Théorème "à la Schwartz".

La démonstration du Théorème 2 comporte une récurrence utilisant le Théorème 1 et la Proposition 5, donc un grand nombre d'extensions des scalaires. Ceci nous amène à poser la définition suivante :

DÉFINITION 3.- <u>On appelle chaîne nucléaire d'algèbres</u> un système inductif $\underline{A} = ((A_t) \, , (\rho_t^{t'}))_{t \in [0,1]}$ <u>où les</u> A_t <u>sont des algèbres de Fréchet nucléaires</u>

et où, pour $t < t'$, $\rho_t^{t'} : A_t \to A_{t'}$ *est un homomorphisme d'algèbres,* $\mathbf{C}$-*nucléaire et se factorisant à travers une algèbre de Banach.*

Si E est un A_o-module de Fréchet nucléaire, on dit que $\underline{A}$ est transverse à E si A_t est transverse à E sur A_o pour tout t .

Exemple.- Soient S un sous-espace analytique d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^m$, $r = (r_1,\dots,r_m)$ tel que $D_r \subset\subset \Omega$, où D_r est le polydisque ouvert de polyrayon r , et $s = (s_1,\dots,s_m)$ où $0 < s_i < r_i$. Alors les $\underline{O}(S \cap D_{r-ts})$ forment une chaîne nucléaire d'algèbre. Si U_o et U sont des ouverts de Stein de $\mathbf{C}^n$ tels que $U \subset\subset U_o$ et $\underline{F}$ un faisceau cohérent sur $S \times U_o$, cette chaîne nucléaire d'algèbre est transverse à $\underline{F}((S \cap D_r) \times U)$.

THÉORÈME 2.- *Soient* $\underline{A} = (A_t)_{t\in[0,1]}$ *une chaîne nucléaire d'algèbres,* $E^\bullet$ *et* $F^\bullet$ *des complexes de* A_o-*modules de Fréchet nucléaires, bornés à droite, et* $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ *un morphisme de complexes. On suppose que* $f^\bullet$ *induit des isomorphismes sur l'homologie, que les* f^n *sont* A_o-*sous-nucléaires et que* $\underline{A}$ *est transverse aux* E^n *et aux* F^n . *Alors, il existe un complexe* $L^\bullet$ *de* A_1-*modules tel que* L^n *soit libre de type fini sur* A_1 , *et un morphisme de complexes* $h : L^\bullet \to A_1 \hat{\otimes}_{A_o} E^\bullet$ *qui induit un isomorphisme sur l'homologie.*

Lemme 3.- *Soit* $t_o < 1$, *soient* $E^\bullet$ *et* $F^\bullet$ *deux complexes de* A_{t_o}-*modules de Fréchet nucléaires bornés à droite et acycliques en degré* $> n$, *et soit* $f^\bullet : E^\bullet \to F^\bullet$ *un morphisme de complexes. On suppose que* f^n *est* A_{t_o}-*sous-nucléaire, que* $f^\bullet$ *induit un isomorphisme* $H^k(E^\bullet) \to H^k(F^\bullet)$ *pour tout* k , *et que* A_t *est transverse à* E^k *et* F^k *pour tout* k *et tout* $t \geq t_o$. *Alors il existe* $t_1 < 1$ *tel que* $H^n(E^\bullet_{t_1})$ *et* $H^n(F^\bullet_{t_1})$ *soient des modules de type fini sur* A_{t_1} , *où* $E^\bullet_{t_1} = A_{t_1} \hat{\otimes}_{A_{t_o}} E^\bullet$ *et* $F^\bullet_{t_1}$ *de même.*

Démonstration. Les suites exactes $0 \to Z^k(E^\bullet) \to E^k \to Z^{k+1}(E^\bullet) \to 0$ montrent par récurrence descendante que A_t est transverse à $Z^k(E^\bullet)$, et de même à $Z^k(F^\bullet)$, pour $k \geq n$. L'application f^n induit une application A_{t_o}-sous-nucléaire $Z^n(E^\bullet)$ dans F^n , dont l'image est contenue dans $Z^n(F^\bullet)$. D'après la prop. 5 , pour $t_o < t' < 1$, l'application $Z^n(E^\bullet_{t'}) \to Z^n(F^\bullet_{t'})$ induite par f^n est $A_{t'}$-sous-nucléaire. L'application $(d\, , f^n) : F^{n-1}_{t'} \oplus Z^n(E^\bullet_{t'}) \to Z^n(F^\bullet_{t'})$ est surjective, et $(0, f^n)$ est $A_{t'}$-sous-nucléaire, donc pour $t' < t_1 < 1$ l'application $d : F^{n-1}_{t_1} \to Z^n(F^\bullet_{t-1})$ a un conoyau de type fini sur A_{t_1} . C.Q.F.D.

Démonstration du Théorème. On va construire par récurrence descendante $t_n < 1$, un A-module libre de type fini L^n sur A_{t_n} , des morphismes $d^n : L^n \to L^{n+1}_{t_n}$ et $h^n \to E^n_{t_n}$ tels que :

1) $L_{(n)} : 0 \to L^n \to L^{n+1}_{t_n} \to \dots$ soit un complexe et $h^\bullet$ un morphisme de ce complexe dans $E^\bullet$;

2) le "mapping cylinder" $M_{(n)}$ de ce morphisme, défini par $M^k_{(n)} = E^k \oplus L^{k+1}$ pour $k \geq n - 1$, soit acyclique en degré $\geq n$.

Supposons L^k , etc. construits pour $k \geq n + 1$. Le "mapping cylinder" $N_{(n+1)}$ de $f^\bullet \circ h^\bullet$ est également acyclique en degré $> n$, et le morphisme de $M^\bullet_{(n+1)}$ dans $N^\bullet_{(n+1)}$ donné par $f^\bullet$ est $A_{t_{n+1}}$-sous-nucléaire en chaque degré et induit un isomorphisme sur l'homologie. D'après le lemme 3, il existe $t_n < 1$ tel que $H^n(M^\bullet_{t_n})$ soit un A_{t_n}-module de type fini. On peut alors trouver un A_{t_n}-module libre de type fini L^n et un morphisme $\binom{h^n}{d^n} : L^n \to M^n = E^n_{t_n} \oplus L^{n+1}_{t_n}$ dont l'image est contenue dans $Z^n(M^\bullet)$ et tel que l'image de $E^{n-1} + L^n$ soit $Z^n(M^\bullet)$. Le module L^n , muni de (h^n, d^n) répond à la question. C.Q.F.D.

7. Démonstration du Théorème des images directes.

Soient X et S des espaces $\mathbf{C}$-analytiques séparés, $\pi : X \to S$ un morphisme propre, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X et s_o un point de S. On va montrer que les faisceaux $\underline{R}^n\pi_* \underline{F}$ sont cohérents au voisinage de s_o. On peut supposer que S est un sous-espace analytique fermé d'un ouvert Ω de $\mathbf{C}^m$ et $s_o = 0$. On peut trouver un polydisque $D_R \subset \Omega$ et des familles $(X_i)_{i \in I}$, $(\varphi_i)_{i \in I}$ telles que I soit un ensemble fini, que (X_i) soit un recouvrement ouvert de $\pi^{-1}(D_R \cap S)$ et que φ_i soit un isomorphisme au-dessus de Ω de X_i sur un sous-espace analytique fermé de $D_R \times U_i$, où U_i est un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^{n_i}$. On peut trouver $D_{r_o} \subset\subset D_R$ et des ouverts de Stein $W_i \subset\subset V_i \subset\subset U_i$ tels que, en posant $V_{i,r} = \varphi_i^{-1}(D_r \times V_i)$ et $W_{i,r}$ de même, les W_{i,r_o} forment un recouvrement de $\varphi^{-1}(D_{r_o} \cap S)$. Soit $s = (s_1,\dots,s_m)$ tel que $s_i < r_{o_i}$, posons $r_t = r - ts$, $A_t = \underline{O}(D_{r_t} \cap S)$, $\underline{V}_t = (V_{i,r_t})$ et $\underline{W}_t$ de même. Alors les A_t forment une chaîne nucléaire, et les complexes de cochaînes alternées $C^\bullet(\underline{V}_o ; \underline{F})$ et $C^\bullet(W_o ; \underline{F})$ satisfont aux hypothèses du Théorème 2 en vertu du Théorème B, du Théorème de Leray et de la Proposition .

Par suite, il existe un complexe $\underline{L}^\bullet$ de faisceaux libres de type fini sur $S \cap D_{r_1}$ et un morphisme $h : \underline{L}^\bullet(S \cap D_{r_1}) \to C^\bullet(\underline{V}_1 ; \underline{F})$ qui induit un isomorphisme de $H^n(S \cap D_{r_1})$ sur $H^n(\varphi^{-1}(S \cap D_{r_1}) ; \underline{F})$ pour tout n, en notant $\underline{H}^n$ le faisceau d'homologie du complexe de faisceaux $\underline{L}^\bullet$. Il résulte de la Prop. 2 et du Cor. de la Prop. 3 que, pour tout ouvert de Stein S' de S contenu dans $S \cap D_{r_1}$, le morphisme h donne un isomorphisme de $\underline{H}^n(S')$ sur $H^n(\varphi^{-1}(S') ; \underline{F})$. Par suite, h définit un isomorphisme de $\underline{H}^n$, qui est cohérent, sur $\underline{R}^n\pi_* \underline{F}$, au-dessus de $S \cap D_{r_1}$, ce qui démontre le théorème.

8. Le Théorème de semi-continuité. (*)

Avec les hypothèses et notations du Théorème des images directes, pour $s \in S$, posons $X(s) = \pi^{-1}(s)$ et $\underline{F}(s) = \underline{O}_{X(s)} \otimes_{\underline{O}_X} \underline{F}$.

THÉORÈME 3.- Si $\underline{F}$ est plat sur S, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des $s \in S$ tels que $\dim H^n(X(s) ; \underline{F}(s)) \geq k$ est un sous-ensemble analytique de S.

Démonstration. Reprenons les notations du n° 7. Il suffit de voir que, pour $s \in S \cap D_{r_1}$, le morphisme $h : \underline{L}^\bullet(S \cap D_{r_1}) \to C^\bullet(\underline{V}_1 ; \underline{F})$, qui induit un isomorphisme sur l'homologie, définit un isomorphisme de $H^n(\underline{L}^\bullet(s))$ sur $H^n(X(s) ; \underline{F}(s))$. Or cela résulte du Cor. de la Prop. 3 et du lemme suivant :

Lemme 4.- Avec les notations de la Prop. 2, si $\underline{F}$ est plat sur S_o, le module $\underline{F}(S \times U)$ est transverse à $\underline{O}_{S,s}/\underline{m}_s$ pour tout $s \in S$.

La démonstration de ce lemme est analogue à celle de la prop. 2, en remarquant que $\underline{L}_\bullet(s)$ est une résolution de $\underline{F}(s)(U)$ car $\underline{F}$ est plat.

(*) La rédaction de ce numéro distribuée lors du séminaire contenait un énoncé faux du Th. 3. Je remercie P. Siegfried de me l'avoir signalé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. CARTAN et J.-P. SERRE - Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), p. 128-130.

[2] H. GRAUERT - Ein Theorem der Analytischen Garbentheorie und die modulräume Complexer Strukturen, Publ. Math. I.H.E.S., Bures-sur-Yvette, 1960.

[3] K. KNORR - Der Grauertsche Kohärenzsatz, Inventiones Math. 1970.

[4] KIEHL-VERDIER - Ein Einfacher Beweis des Kohärensatzes von Grauert, Math. Ann. 195 (1971), p. 24-50.

[5] FORSTER-KNORR - Ein Beweis des Grauertschen Bildgarbensatzes nach idees von B. Malgrange, Manuscripta Mathematica, Vol. 5, Fasc. 1, 1971.

[6] Par exemple : F. TRÈVES - Topological Vector spaces, Academic Press.