JACQUES DENY

Développements récents de la théorie du potentiel

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 403, p. 59-72

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__59_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année, 1971/72, n° 403

DÉVELOPPEMENTS RÉCENTS DE LA THÉORIE DU POTENTIEL

(Travaux de Jacques FARAUT et de Francis HIRSCH)

par Jacques DENY

I. Introduction : le recto et le verso de la Théorie classique.

La théorie newtonnienne classique sur $\mathbb{R}^3$ est l'étude de deux opérateurs : le laplacien Δ et le noyau newtonnien N , celui-ci étant l'opérateur de convolution par la fonction $1/4\pi r$ ($r(\xi) = |\xi|$, distance du point ξ à l'origine). Ils sont liés par la relation $\Delta N = -I$, où I est l'identité sur le domaine de N (domaine qu'il faudrait définir avec précision).

Le laplacien est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller : le semi-groupe des opérateurs de convolution par les distributions de Gauss. Le noyau N est l'intégrale de ce semi-groupe (en un sens à préciser), ou encore la limite, pour λ tendant vers 0 , de la résolvante R_λ de ce semi-groupe (i.e. l'opérateur de convolution par la fonction $\exp(-\sqrt{\lambda}r)/4\pi r$, $\lambda > 0$).

On sait que la considération de ce semi-groupe permet de donner des interprétations probabilistes (en termes de mouvement brownien) des résultats fondamentaux de la théorie newtonnienne. Plus généralement, à un semi-groupe de Feller (vérifiant quelques conditions de régularité) sur un espace localement compact, on peut associer diverses théories du potentiel : c'est le point de départ de la théorie de Hunt [4] ; on y trouve deux opérateurs (analogues à Δ et N) dont nous allons rappeler les propriétés caractéristiques.

Notations. Si X est un espace localement compact, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(X, \mathbb{K})$ est l'espace des fonctions continues sur X, à valeurs dans le corps des scalaires $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tendant vers 0 à l'infini ; $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues à support compact ; $\mathcal{K}^+$ est le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué par les éléments ≥ 0.

Principe du maximum.- *On dit que l'opérateur linéaire A, défini sur un sous-espace $D(A)$ de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$, vérifie ce principe si, pour tout élément f de $D(A)$, on a $Af(\xi_0) \leq 0$ en tout point $\xi_0 \in X$ vérifiant $f(\xi_0) = \sup_{\xi \in X} f(\xi) \geq 0$.*

Il est bien connu que l'opérateur laplacien vérifie le principe du maximum. Plus généralement, tout générateur infinitésimal d'un semi-groupe de Feller vérifie ce principe. Il existe une réciproque, moyennant des hypothèses de densité (théorème de Hille-Yosida-Ray) ; on verra au n° 2 un énoncé plus général, dû à Lumer et Phillips.

Dans le cas où X est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on sait déterminer explicitement (sous forme intégro-différentielle) les opérateurs A vérifiant le principe du maximum et dont le domaine contient suffisamment de fonctions régulières (cf. Courrège [1]). Pour $X = \mathbb{R}^n$ la formule obtenue se réduit à celle de Lévy-Khintchine lorsque A permute avec les translations ; l'opérateur A est l'opérateur de convolution par une distribution d'un type particulier, appelée "laplacien généralisé".

"Coprincipe" du maximum.- *On dit que l'opérateur linéaire V, défini sur un sous-espace $D(V)$ de $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$, vérifie ce principe si, pour tout élément f de $D(V)$, on a $f(\xi_0) \geq 0$ en tout point $\xi_0 \in X$ vérifiant $Vf(\xi_0) = \sup_{\xi \in X} Vf(\xi) \geq 0$.*

Dans le cas important $D(V) = \mathcal{K}$, une forme affaiblie de ce principe (remplacer dans l'énoncé "en tout point ξ_0" par "en au moins un point ξ_0, s'il en existe") est équivalente au <u>principe complet du maximum</u> (de Cartan et Deny) : <u>pour tout élément</u> f <u>de</u> $\mathcal{K}(X, \mathbb{R})$ <u>la relation</u> $Vf(\xi) \leq 1$ <u>sur</u> $\{\xi ; f(\xi) > 0\}$ <u>entraîne</u> $Vf \leq 1$. D'autre part, si l'image de V est dense dans $\mathcal{C}_0$, toutes ces propriétés sont équivalentes (voir les démonstrations dans [4] et [5]).

Le noyau newtonnien possède ces propriétés. Il en est de même des résolvantes d'un semi-groupe de Feller. En sens inverse on a le célèbre théorème de Hunt : si l'opérateur V défini sur $\mathcal{K}$ vérifie le principe complet du maximum et si l'image $V(\mathcal{K})$ est dense dans $\mathcal{C}_0$, il existe un semi-groupe de Feller $\{P_t\}_{t \geq 0}$ tel qu'on ait $Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$ $(f \in \mathcal{K})$. Plus généralement (Lion) si V, défini sur $\mathcal{K}$, vérifie la forme affaiblie du "coprincipe" du maximum, il existe une famille résolvante sous-markovienne $\{R_\lambda\}_{\lambda > 0}$ telle qu'on ait $Vf = \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda f$ $(f \in \mathcal{K})$; aucune hypothèse n'est faite sur la densité de l'image. A noter que les démonstrations données dans [4] et [5] supposent X dénombrable à l'infini.

2. <u>Opérateurs dissipatifs et opérateurs codissipatifs.</u>

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$; la norme sur E est notée $\| \cdot \|$.

On dit que l'opérateur linéaire A (non partout défini sur E) est <u>dissipatif</u> si, pour tout $\lambda > 0$ et tout élément $x \in D(A)$ on a $\|\lambda x - Ax\| \geq \|\lambda x\|$.

Cette définition est équivalente à celle de Kato (à l'aide d'un produit semi-intérieur). Tout opérateur vérifiant le principe du maximum est dissipatif (cas de $E = \mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$).

Un résultat essentiel concernant les opérateurs dissipatifs est le théorème de Lumer-Phillips : Soit A un opérateur linéaire de domaine $D(A)$; pour que A soit préfermé et que son plus petit prolongement fermé soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction sur E, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :

(a) $D(A)$ est dense ;

(b) A est dissipatif ;

(c) l'image de $\lambda I - A$ est dense dans E pour un $\lambda > 0$ (et par suite pour tout $\lambda > 0$).

D'une façon analogue on dit (Hirsch) que l'opérateur linéaire V (non partout défini sur E) est <u>codissipatif</u> si, pour tout $\lambda > 0$ et tout élément $x \in D(V)$, on a $\|\lambda Vx\| \leq \|x + \lambda Vx\|$.

Le noyau newtonnien, plus généralement tout opérateur vérifiant le "coprincipe" du maximum, est codissipatif.

Il existe un résultat analogue au théorème de Lumer-Phillips concernant les opérateurs codissipatifs ; il met en jeu une famille résolvante (et non un semi-groupe). Rappelons d'abord qu'une famille résolvante sur E est une famille $\{R_\lambda\}_{\lambda > 0}$ d'opérateurs bornés, vérifiant l'équation résolvante

$$(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu = R_\mu - R_\lambda \qquad (\lambda > 0 , \mu > 0) .$$

La famille est dite à <u>contraction</u> si on a $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$. La famille résolvante est dite de classe L_0 (Hirsch) si, pour tout élément $x \in E$, on a $\lim_{\lambda \to 0} \lambda R_\lambda x = 0$. Lorsqu'il en est ainsi l'ensemble $D(V)$ des points x de E pour lesquels $Vx = \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda x$ existe est partout dense ; l'opérateur linéaire V ainsi défini est fermé ; on l'appelle <u>cogénérateur</u> de la famille résolvante. On dira enfin qu'un opérateur linéaire V "précoengendre" la famille résolvante $\{R_\lambda\}$ si V est préfermé et si son plus petit prolongement fermé est le cogénérateur de $\{R_\lambda\}$.

On peut alors énoncer (Hirsch) : soit V un opérateur de domaine $D(V)$; pour que V "précoengendre" une famille résolvante à contraction, il faut et il suffit que les propriétés suivantes aient lieu :

(a) $D(V)$ est dense dans E ;

(b) V est codissipatif ;

(c) l'image de $I + \lambda V$ est dense dans E pour un $\lambda > 0$ (et par suite pour tout $\lambda > 0$).

Remarques.- 1°) Si V est un opérateur dissipatif (ou codissipatif) on a $\overline{\ker V} \cap \overline{\operatorname{Im} V} = \{0\}$, et la somme $\overline{\ker V} + \overline{\operatorname{Im} V}$ est fermée.

Cette remarque de Hirsch se déduit aisément du lemme suivant : si V est codissipatif, on a $\|x + y\| \geq \|x\|$ pour tout $x \in \overline{\operatorname{Im} V}$ et tout $y \in \overline{\ker V}$ (appliquer la définition de la codissipativité à l'élément $z + \lambda y$ avec $z \in D(V)$, $y \in \ker V$, $\lambda > 0$, puis faire tendre λ vers l'infini). Il en résulte que si l'image de V est dense, V est injectif.

2°) Si V est un opérateur dissipatif (resp. codissipatif) de domaine dense, il est préfermé et son plus petit prolongement fermé est dissipatif (resp. codissipatif) ; cela n'entraîne pas que V "préengendre" un semi-groupe à contraction (resp. "précoengendre" une famille résolvante à contraction) : la condition (c) du théorème de Lumer-Phillips n'est pas en général une conséquence des conditions (a) et (b). Cependant, on verra des cas importants où ceci a lieu.

3. Principe du maximum du module et applications.

Les notions et résultats de ce paragraphe sont dus à J. Faraut [2]. Le point de départ est une propriété importante du générateur infinitésimal d'un semi-groupe à contraction sur $\mathscr{C}_o(X, \mathbb{K})$, propriété plus faible que le principe du maximum (vérifié dans le cas particulier où le semi-groupe est de Feller). En voici l'énoncé :

DÉFINITION.- On dit qu'un opérateur A non partout défini sur $\mathscr{C}_o(X, \mathbb{C})$ vérifie le principe du maximum du module si, pour tout élément f de $D(A)$, on a $R_e Af(\xi) \leq 0$ en tout point ξ de X tel que $f(\xi) = \|f\|$.

Un tel opérateur est dissipatif. Le théorème de Lumer-Phillips montre donc qu'inversement, sous certaines hypothèses de densité, un opérateur vérifiant le principe du maximum du module "préengendre" un semi-groupe à contraction sur $\mathscr{C}_o$. On va étudier un cas important où l'hypothèse (c) du théorème de Lumer-Phillips est une conséquence des deux premières.

DÉFINITION.- Une distribution T sur $\mathbb{R}^n$ est dite distribution de Faraut si, pour tout élément f de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $f(0) = \|f\|$, on a $R_e T(f) \leq 0$.

Tout laplacien généralisé est donc une distribution de Faraut.

Hors tout voisinage fermé de l'origine, une distribution de Faraut T coïncide avec une mesure bornée. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et soit g un élément fixe de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\mathrm{supp}(g) \subset B(0, \varepsilon)$ et $1 = g(0) = \|g\|$. Soit $f \in \mathcal{D}(\complement B(0, \varepsilon))$; posons $h = \|f\| g + e^{i\alpha} f$, où α est réel et tel que $T(e^{i\alpha} f) \geq 0$. On a $h(0) = \|h\|$, d'où $0 \leq R_e T(h) = \|f\| R_e T(g) + |T(f)|$, d'où finalement $|T(f)| \leq R_e T(-g) \|f\|$, d'où le résultat.

On en déduit qu'on peut prolonger T aux fonctions indéfiniment dérivables bornées ; en particulier, en prenant pour f un caractère de $\mathbb{R}^n$, on voit qu'on a $R_e\hat{T} \leq 0$, où la fonction continue $\hat{T}$ est la transformée de Fourier de T.

DÉFINITION.- Une famille $\{\mu_t\}_{t>0}$ de mesures complexes sur $\mathbb{R}^n$ est dite un semi-groupe de type (H) si elle vérifie les propriétés suivantes :

(a) la variation totale de μ_t est ≤ 1 $(t > 0)$;

(b) on a $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$ $(s > 0\ ,\ t > 0)$;

(c) μ_t tend faiblement vers δ lorsque t tend vers 0.

Pour qu'une famille $\{P_t\}_{t>0}$ d'opérateurs sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n, \mathbf{C})$ soit un semi-groupe à contraction et que les P_t permutent avec les translations de $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe $\{\mu_t\}$ de type (H) tel que P_t soit l'opérateur de convolution par μ_t.

THÉORÈME.- <u>Pour qu'une distribution</u> T <u>sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>soit une distribution de Faraut, il faut et il suffit qu'il existe un semi-groupe</u> $\{\mu_t\}$ <u>de type</u> (H) <u>tel qu'on ait, au sens des distributions</u>

$$T = \lim_{t \to 0} \frac{\mu_t - \delta}{t} \quad ;$$

<u>un tel semi-groupe</u> $\{\mu_t\}$ <u>est unique</u>.

Soit en effet T une distribution de Faraut. Posons $Af = T * f$ pour $f \in \dot{\mathcal{B}}$ (espace des fonctions indéfiniment dérivables tendant vers 0 à l'infini ainsi que chacune de leurs dérivées). La partie importante de l'énoncé (nécessité) résultera du théorème de Lumer-Phillips si on démontre que, pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)(\dot{\mathcal{B}})$ est dense dans $\mathcal{C}_0$. Or cette image contient $\mathcal{F}(\mathcal{K})$, où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier, car l'équation $\lambda\varphi - A\varphi = \mathcal{F}^{-1}\psi$ (avec $\psi \in \mathcal{K}$) admet une solution dans $\dot{\mathcal{B}}$, à savoir $\mathcal{F}^{-1}(\psi/(\lambda - \hat{T}))$; en effet, on a $R_e\hat{T} \leq 0$, donc

$\psi/(\lambda - \hat{T})$ est un élément de $\mathcal{K}$.

Le problème se pose de déterminer explicitement toutes les distributions de Faraut sur $\mathbb{R}^n$. A cet effet on observe d'abord que, à tout laplacien généralisé S sur le produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$, on peut associer une distribution de Faraut sur $\mathbb{R}^n$, à savoir la distribution $T = \pi(S)$ définie par $T(f) = S(e^{i\theta}f)$ $(f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$.
Alors :

THÉORÈME.- <u>L'application</u> π <u>du cône</u> Q <u>des laplaciens généralisés sur</u> $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ <u>dans le cône</u> P <u>des distributions de Faraut sur</u> $\mathbb{R}^n$ <u>est surjective</u>.

Voici le principe de la démonstration (qui est loin d'être immédiate) : Posons $u(\xi) = 1/(1 + |\xi|^2)$. On commence par établir la décomposition

$$P = P \cap (-P) + \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda M ,$$

où M est l'ensemble des $T \in P$ vérifiant $R_e T(\xi_j u) = 0$ $(j = 1,2,\dots,n)$ et $T(u) = 1$. On montre que les éléments de $P \cap (-P)$ sont les distributions de la forme $ic\delta + \sum_j b_j D_j$ (où c et les b_j sont réels) ; une telle distribution est l'image par π de l'élément $-cD_\theta + \sum_j b_j D_j$ de Q . D'autre part, on montre que les points extrémaux du convexe M ont un support contenant au plus un point différent de l'origine (c'est la partie délicate) ; on en déduit leur expression explicite, d'où il résulte qu'elles sont les images par π d'éléments de Q . On conclut grâce au théorème de Krein et Milman et un argument de compacité.

L'expression des laplaciens généralisés sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}$ (formule de Lévy-Khintchine) fournit alors une représentation intégro-différentielle des distributions de Faraut. Donnons cette représentation dans le cas (particulièrement important pour les applications) des distributions de $P(\mathbb{R}_+)$, i.e. des distributions de Faraut qui engendrent un semi-groupe de type (H) de mesures portées par $[0, \infty[$:

$$T(f) = af'(0) - bf(0) + \iint [\, e^{i\theta} f(t) - (1 + i\,\frac{\sin\theta}{1+t})\, f(0)\,]\, d\sigma(t,\theta) ,$$

avec $a \geq 0$, $R_e b \geq 0$, et σ étant une mesure ≥ 0 sur $]0,+\infty[\times \mathbb{T}$, vérifiant $\iint \frac{1 - \cos\theta + t}{1+t}\, d\sigma(t,\theta) < \infty$.

Les distributions de Faraut ont des applications intéressantes à l'Analyse harmonique et à l'Analyse fonctionnelle. Mentionnons brièvement une application au calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes. On sait (cf. par exemple, L. Schwartz [7]) qu'à un semi-groupe à contraction $\{P_t\}$ sur un espace de Banach E on peut associer un homomorphisme G de $\mathfrak{M}(\mathbb{R}_+)$ (algèbre des mesures bornées portées par $\mathbb{R}_+$) dans $\mathcal{L}(E)$, défini par

$$G(\mu)x = \int_0^{\infty} P_t x \, d\mu(t) \qquad (x \in E) .$$

Cet homomorphisme se prolonge aux distributions T de $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, mais l'opérateur fermé $G(T)$, qu'on définit par régularisation, est en général non borné ; en particulier $G(-\delta')$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe.

THÉORÈME.- Soit $\{P_t\}$ un semi-groupe à contraction sur E , et soit G l'homéomorphisme d'algèbre associé. Soit $\{\mu_t\}$ un semi-groupe de type (H), dont les éléments sont des mesures portées par $\mathbb{R}_+$. Alors $\{G(\mu_t)\}$ est un semi-groupe à contraction sur E dont le générateur infinitésimal est $G(T)$, où T est la distribution de Faraut qui "engendre" le semi-groupe $\{\mu_t\}$.

Ce résultat admet une interprétation élégante : les fonctions qui "opèrent" sur les générateurs infinitésimaux des semi-groupes à contraction sont les transformées de Laplace des distributions du cône $P(\mathbb{R}_+)$.

4. Enoncés abstraits des principes ; extensions des théorèmes de Hunt et Lion.

Les notions et résultats de ce paragraphe sont dus à F. Hirsch [3]. On notera B' et S' la boule-unité et la sphère-unité du dual E' de l'espace de Banach E, $\mathfrak{E}$ l'ensemble des points extrémaux de B', enfin $\hat{\mathfrak{E}}$ l'ensemble des points de S' qui sont faiblement adhérents à $\mathfrak{E}$.

Par exemple pour $E = \mathcal{C}_0(X, \mathbb{C})$, $\mathfrak{E} = \hat{\mathfrak{E}}$ est l'ensemble des mesures de la forme $e^{i\alpha}\,\delta_\xi$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\xi \in X$; cet ensemble n'est pas faiblement fermé si X n'est pas compact.

A tout $x \in E$ associons l'ensemble $W(x)$ des formes $\varphi \in S'$ vérifiant $\langle x, \varphi\rangle = \|x\|$. On a évidemment $W(0) = S'$. Pour $x \neq 0$, $W(x)$ est une partie convexe de S', fermée et non vide (d'après Hahn-Banach) ; il en résulte que $W(x)$ contient au moins un point de $\mathfrak{E}$.

Voici alors une caractérisation des opérateurs dissipatifs et des opérateurs codissipatifs ; la première partie précise un résultat de Kato [8] :

THÉORÈME.- <u>Pour qu'un opérateur linéaire</u> A <u>défini dans</u> E <u>soit dissipatif, il faut et il suffit que, pour tout élément</u> $x \in D(A)$, <u>il existe au moins un élément</u> $\varphi \in \hat{\mathfrak{E}}$ <u>tel qu'on ait</u> $\langle x, \varphi\rangle = \|x\|$ <u>et</u> $R_e\,\langle Ax, \varphi\rangle \leq 0$.

<u>Pour que l'opérateur</u> V <u>soit codissipatif il faut et il suffit que, pour tout élément</u> $x \in D(V)$, <u>il existe au moins un élément</u> $\varphi \in \hat{\mathfrak{E}}$ <u>tel qu'on ait</u> $\langle Vx, \varphi\rangle = \|Vx\|$ <u>et</u> $R_e\langle x, \varphi\rangle \geq 0$.

Donnons la démonstration dans le cas codissipatif. Supposons la condition vérifiée. Soit $x \in D(V)$. Par hypothèse il existe $\varphi \in S'$ avec $\langle Vx, \varphi\rangle = \|Vx\|$ et

$R_e\langle x , \varphi\rangle \geq 0$, d'où, pour $\lambda > 0$,

$$\|\lambda Vx\| = \lambda\langle Vx , \varphi\rangle \leq R_e\langle x + \lambda Vx , \varphi\rangle \leq \|x + \lambda Vx\| ,$$

donc V est codissipatif.

Supposons inversement V codissipatif et soit $x \in D(V)$. On peut supposer $Vx \neq 0$ (sinon tout élément $\varphi \in S'$ convient). A tout $\lambda > 0$ associons un élément φ_λ de $\mathcal{E} \cap W(x + \lambda Vx)$. On a

$$\|\lambda Vx\| \leq \|x + \lambda Vx\| = \langle x + \lambda Vx , \varphi_\lambda\rangle \leq R_e\langle x , \varphi_\lambda\rangle + \|\lambda Vx\| ,$$

d'où $R_e\langle x , \varphi_\lambda\rangle \geq 0$. Soit alors $\varphi \in B'$ une valeur d'adhérence faible de φ_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. En passant à la limite on obtient $R_e\langle x , \varphi\rangle \geq 0$; d'autre part, l'égalité $\|x + \lambda Vx\| = \langle x + \lambda Vx , \varphi_\lambda\rangle$ donne $\|Vx\| = \langle Vx , \varphi\rangle$. Il reste à vérifier qu'on a $\|\varphi\| = 1$, ce qui résulte immédiatement de l'hypothèse $Vx \neq 0$.

Dans le cas $E = \mathcal{C}_o(X , \mathbf{C})$ l'expression des éléments de $\hat{\mathcal{E}}$ conduit au résultat suivant : pour que l'opérateur A soit dissipatif, il faut et il suffit que, à tout élément $f \in D(A)$, on puisse associer un nombre réel α et un point $\xi \in X$ tels qu'on ait

$$e^{i\alpha} f(\xi) = \|f\| \quad \underline{\text{et}} \quad R_e(e^{i\alpha} Af(\xi)) \leq 0 .$$

Cette propriété caractéristique est plus faible que le principe du maximum du module ; elle lui est équivalente lorsque le domaine de A est partout dense dans $\mathcal{C}_o$.

On a un résultat analogue concernant les opérateurs codissipatifs sur $\mathcal{C}_o(X , \mathbf{C})$; un tel opérateur est caractérisé par une propriété qu'on pourrait appeler "coprincipe faible" du maximum du module. Lorsque l'image de V est dense, cette propriété est équivalente à la suivante ("coprincipe" du maximum du module) : pour tout élément f de $D(V)$, on a $R_e f(\xi) \geq 0$ en tout point $\xi \in X$ tel que $Vf(\xi) = \|Vf\|$.

Dans le cas réel, on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME.- *Soit* V *un opérateur de domaine partout dense dans l'espace de Banach réel* E *; pour que* V *soit codissipatif il faut et il suffit que, pour tout élément* x *de* $D(V)$, *la relation* " $\langle Vx , \varphi\rangle \leq 1$ pour tout $\varphi \in E'$ tel que $\langle x , \varphi\rangle > 0$ " *entraîne* $\|Vx\| \leq 1$.

C'est une conséquence non immédiate du théorème précédent. Dans le cas $E = \mathcal{C}_0(X , \mathbb{R})$ la condition peut s'énoncer ainsi : *pour tout élément* $f \in D(V)$ *les relations* $Vf(\xi) \leq 1$ *sur* $\{f(\xi) > 0\}$ *et* $Vf(\xi) \geq -1$ *sur* $\{f(\xi) < 0\}$ *entraînent* $\|Vf\| \leq 1$. On reconnait là *une forme affaiblie du principe complet du maximum* (cf. n° 1).

Cette nouvelle forme de la condition permet une extension intéressante du théorème de Hunt et Lion :

THÉORÈME.- *Soit* V *un opérateur linéaire de* $\mathcal{C}_0(X , \mathbb{R})$ *dont le domaine contient* $\mathcal{K}(X , \mathbb{R})$. *Pour que* V *"précoengendre" une famille résolvante à contraction, il faut et il suffit qu'il soit codissipatif.*

Donnons brièvement la démonstration, qui mérite d'être connue, même dans le cas classique de Hunt et Lion (elle évite un laborieux procédé d'approximation). La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante il suffit de vérifier (d'après le n° 2) que, pour $\lambda > 0$, l'image de $I + \lambda V$ est partout dense dans $\mathcal{C}_0$.

Or soit $\varphi \in \mathcal{K}^+(X)$. On voit facilement que l'opérateur partout défini $V_\varphi : f \to V(f\varphi)$ vérifie la forme affaiblie du principe complet du maximum, donc est codissipatif. Il est donc borné (car il est préfermé et partout défini). De plus on a $\operatorname{Im}(I + \lambda V_\varphi) = \mathscr{C}_o$ (il en est ainsi pour les petites valeurs de λ). Soit alors μ une mesure bornée orthogonale à $\operatorname{Im}(I + \lambda V)$. Soit $f_\varphi \in \mathscr{C}_o$ tel que $f = f_\varphi + \lambda V_\varphi f_\varphi$ (où f est donné dans $\mathscr{C}_o$). D'après la codissipativité de V_φ on a $\|f_\varphi\| \leq 2\|f\|$. D'autre part, écrivant $f = (1 - \varphi)f_\varphi + (I + \lambda V)\varphi f_\varphi$, il vient

$$\langle f , \mu \rangle = \int f \, d\mu = \int (1 - \varphi) f_\varphi \, d\mu ,$$

d'où

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq 2 \|f\| \int |1 - \varphi| \, d|\mu| .$$

L'arbitraire sur φ entraîne $\int f \, d\mu = 0$, d'où finalement $\mu = 0$, ce qui prouve la densité de l'image de $I + \lambda V$.

Remarques.- 1°) Dans le cas où l'opérateur codissipatif V (défini dans $\mathscr{C}_o$) est positif, on pourrait se demander s'il vérifie le principe complet du maximum (et non seulement la forme affaiblie) ; il n'en est rien (contre-exemple sur un espace à trois points).

2°) Dans le cas $X = \mathbb{R}^n$, supposons que $V \neq 0$ soit codissipatif et permute avec les translations. Alors V est un précogénérateur, même si on ne suppose pas que son domaine contient $\mathscr{K}$. Ce résultat est intéressant, car il englobe le cas du noyau logarithmique dans le plan ; il se démontre par une méthode de balayage.

3°) Il existe des opérateurs codissipatifs de domaine et d'image dense dans $\mathscr{C}_o(]0,1[, \mathbb{R})$ qui ne sont pas des précogénérateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ph. COURRÈGE - Sur la forme intégro-différentielle des opérateurs de $\mathfrak{C}_k^\infty$ dans $\mathfrak{C}$ satisfaisant au principe du maximum, Séminaire de Théorie du potentiel, Faculté des Sciences de Paris, 10e année, 1965/66, n° 2.

[2] J. FARAUT - Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitésimaux de semi-groupes d'opérateurs, Ann. Inst. Fourier, 20 (1970), p. 235-301.

[3] F. HIRSCH - Familles résolvantes, générateurs, cogénérateurs, potentiels, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[4] G. A. HUNT - Markoff processes and potentials, Illinois J. of Math, 1 (1957), p. 44-93 et p. 316-369.

[5] G. LION - Familles d'opérateurs et frontières en théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), fasc. 2, p. 389-453.

[6] G. LUMER and R. S. PHILLIPS - Dissipative operators in a Banach space, Pacific J. of Math., 11 (1961), p. 679-698.

[7] L. SCHWARTZ - Lectures on mixed problems in partial differential equations and representation of semi-groups, Tata Institute, Bombay, 1958.

[8] T. KATO - Nonlinear semi-groups and evolution equations, J. of Math. Soc. Japan, 19 (1967), p. 508-520.