Séminaire N. Bourbaki

Pierre Deligne

Variétés unirationnelles non rationnelles

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 402, p. 45-57

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__45_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année, 1971/72, n° 402

VARIÉTÉS UNIRATIONNELLES NON RATIONNELLES

[d'après M. ARTIN et D. MUMFORD]

par Pierre DELIGNE

Cet exposé contient une description de la variété construite par Artin et Mumford, et la démonstration de ce qu'elle est unirationnelle et non rationnelle. Il contient aussi l'énoncé des théorèmes que démontrent Clemens et Griffiths [4], et Manin et Iskovskih [6], pour construire d'autres exemples. J'ai assisté à des exposés de Artin et Mumford sur le même sujet, et m'en suis largement inspiré.

Dans tout ce qui suit, l'expression "variété algébrique" signifiera "schéma séparé de type fini sur $\mathbf{C}$, réduit et irréductible". On notera $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur une variété algébrique X .

1. Rationalité et unirationalité.

Soit K une extension de type fini de $\mathbf{C}$. Il existe alors une variété algébrique X telle que K soit isomorphe à $k(X)$. On appelle X un modèle de K . D'après [5], K admet toujours un modèle projectif et lisse.

Soient K et L deux extensions de type fini de $\mathbf{C}$, de modèles X et Y . Les homomorphismes $a^{\bullet} : K \hookrightarrow L$ correspondent biunivoquement aux applications rationnelles dominantes $a_{\bullet} : Y \dashrightarrow X$, par la formule $a^{\bullet}(f) = f \circ a_{\bullet}$. D'après [5], si X et Y sont projectifs et lisses, toute application rationnelle $a_{\bullet} : Y \to X$ admet une décomposition $a = b\,c_n^{-1} \dots c_1^{-1}$

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccccc} Y_{n+1} & \xrightarrow{c_n} & \cdots \rightarrow & Y_2 & \xrightarrow{c_1} & Y_1 & = Y , \\ \downarrow b & & & & & & \\ X & & & & & & \end{array}$$

où b et les c_i sont des morphismes (partout définis) et où Y_{i+1} se déduit de Y_i par éclatement d'une sous-variété lisse Z_i (de codimension ≥ 2).

Si $a^{\bullet} : K \rightarrow L$ est un isomorphisme, on peut appliquer le résultat précédent à $(a^{\bullet -1}, Y_{n+1}, X)$. Par itération, on obtient un diagramme commutatif de morphismes de schémas

$$(1.2)\qquad \begin{tikzcd} \cdots & Y^2 \arrow[r, "y^2"] \arrow[d, "a^2"] & Y^1 \arrow[r, equal] & Y^1 \arrow[r, "y^1"] \arrow[d, "a^1"] & Y \arrow[d, "a"] \\ \cdots & X^1 \arrow[r, equal] & X^1 \arrow[r, "x^1"] \arrow[u, "b^1"] & X \arrow[r, equal] & X . \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, les flèches horizontales x^i , y^i sont des composés d'éclatements à centre non singulier, comme en (1.1) ; les a^i et b^i sont birationnels.

Un invariant d'une variété projective et lisse X est dit <u>birationnel</u> s'il ne dépend que de $k(X)$. On vérifie souvent le caractère birationnel d'un invariant à l'aide de (1.2) (pour un exemple typique, voir 2.1). Les invariants utilisables d'un corps K sont en général définis comme la valeur d'un invariant birationnel d'un quelconque modèle projectif et lisse de K .

DÉFINITION 1.3.- <u>Soit</u> X <u>une variété algébrique de dimension</u> n . <u>On dit que</u> X <u>est unirationnelle si les conditions suivantes sont vérifiées</u> :

(i) $k(X)$ <u>est un sous-corps d'une extension transcendante pure</u> $\mathbb{C}(T_1,\ldots,T_r)$ <u>de</u> $\mathbb{C}$;

(ii) une extension finie de $k(X)$ est isomorphe à $\mathbb{C}(T_1,\dots,T_n)$;

(iii) (pour X projectif et lisse), il existe un diagramme (1.1) avec $Y = \mathbb{P}^r(\mathbb{C})$;

(iv) (pour X projectif et lisse), il existe un diagramme (1.1) avec $Y = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

On peut supposer X projectif et lisse, et on a (ii) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (ii).

DÉFINITION 1.4.- On dit que X est rationnelle si, au choix

(i) $k(X)$ est une extension transcendante pure de $\mathbb{C}$;

(ii) (pour X projectif et lisse), il existe un diagramme (1.2) avec $Y = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Les invariants birationnels les plus évidents ne permettent pas de distinguer les variétés unirationnelles des variétés rationnelles.

PROPOSITION 1.5.- Soit X une variété algébrique unirationnelle projective et lisse de dimension $n > 0$.

(i) Les plurigenres $P_k = \dim H^0(X, (\Omega_X^n)^{\otimes k})$ $(k > 0)$ sont nuls. Plus généralement, $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes k}) = 0$ pour $k > 0$ (voir [9] Remarque page 02).

(ii) X est simplement connexe ([10]).

Pour $n = 1$ ou 2 , la propriété (i) ci-dessus caractérise déjà les variétés rationnelles. Une variété unirationnelle de dimension ≤ 2 est donc rationnelle, et une sous-extension de degré de transcendance ≤ 2 de $\mathbb{C}(T_1,\dots,T_k)$ est automatiquement pure. On a plus précisément ceci :

a) Pour $n = 1$, si $H^0(X, \Omega_X^1) = 0$, alors $X \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. D'après le théorème de Riemann-Roch, pour tout $x \in X$, $\mathcal{O}(x)$ définit en effet un plongement de X dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

b) Pour $n = 2$, le critère de Castelnuovo-Enriques affirme que X est rationnelle si $p_a = P_2 = 0$, i.e. si $H^0(X, \Omega_X^1) = H^0(X, (\Omega_X^2)^{\otimes 2}) = 0$ (voir [9]).

Pour $n > 2$, il a été très difficile de définir ou de calculer des invariants birationnels qui puissent distinguer entre variétés rationnelles et unirationnelles.

2. Quelques invariants birationnels.

A) Artin et Mumford.

PROPOSITION 2.1.- *Le sous-groupe de torsion $H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$ de $H^3(X, \mathbb{Z})$ est un invariant birationnel de la variété projective et lisse X.*

Si une variété X_2 se déduit d'une variété lisse X_1 par éclatement d'une sous-variété lisse $Z \subset X_1$ de codimension $r \geq 2$, alors (SGA 5 VII)

$$H^n(X_2, \mathbb{Z}) \simeq H^n(X_1, \mathbb{Z}) \oplus \bigoplus_{1}^{r-1} H^{n-2i}(Z, \mathbb{Z}) .$$

En particulier, $H^3(X_2, \mathbb{Z}) \simeq H^3(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H^1(Z, \mathbb{Z})$. Puisque $H^1(Z, \mathbb{Z})$ est sans torsion, on a donc

$$H^3(X_1, \mathbb{Z})_{tors} \xrightarrow{\sim} H^3(X_2, \mathbb{Z})_{tors} .$$

Supposons que $k(X)$ soit isomorphe à $k(Y)$, et soit un diagramme (1.2) On en déduit un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
H^3(X, \mathbb{Z})_{tors} & \xrightarrow{\sim} & H^3(X_1, \mathbb{Z})_{tors} & = & H^3(X_1, \mathbb{Z})_{tors} & \xrightarrow{\sim} & H^3(X_2, \mathbb{Z})_{tors} \\
 & & \uparrow{\scriptstyle a^{1*}} & & \downarrow{\scriptstyle b^{1*}} & & \uparrow{\scriptstyle a^{2*}} \\
H^3(Y, \mathbb{Z})_{tors} & = & H^3(Y, \mathbb{Z})_{tors} & \xrightarrow{\sim} & H^3(Y_1, \mathbb{Z})_{tors} & = & H^3(Y_1, \mathbb{Z})_{tors} .
\end{array}$$

Puisque $a^{2*}b^{1*}$ est bijectif, b^{1*} est injectif. Puisque $b^{1*}a^{1*}$ est bijectif et b^{1*} injectif, a^{1*} est bijectif, et l'assertion en résulte.

L'exemple de Artin et Mumford est basé sur la

CONSTRUCTION 2.2.- On construira une variété unirationnelle X, projective et lisse, de dimension 3, telle que $H^3(X, \mathbf{Z})_{tors} \neq 0$ (on aura $H^3(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}/(2)$).

Multipliant cette variété par $\mathbf{P}^r(\mathbf{C})$, on obtient un exemple analogue en toute dimension ≥ 3.

B) Clemens et Griffiths.

Soit X une variété projective et lisse de dimension 3, telle que $H^o(X, \Omega^3_X) = 0$. La décomposition de Hodge de $H^3(X, \mathbf{C})$ se réduit alors à $H^3(X, \mathbf{C}) = H^{2,1} \oplus H^{1,2}$ et, d'après Weil [11], le tore complexe

$$J(X) = H^3(X, \mathbf{Z})\backslash H^3(X, \mathbf{C})/H^{2,1}$$

est une variété abélienne : la jacobienne intermédiaire de X. Soit

$$\psi : H^3(X, \mathbf{Z}) \otimes H^3(X, \mathbf{Z}) \to H^6(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$$

le cup-produit. D'après le théorème de dualité de Poincaré, la forme alternée sur $H^3(X, \mathbf{Z})/\text{torsion}$ déduite de ψ est de discriminant un. Si $H^1(X, \mathbf{Z}) = 0$, il résulte de Weil [11] qu'elle définit sur $J(X)$ une polarisation principale.

PROPOSITION 2.3 ([4] 3.26).- Si X est rationnelle, la variété abélienne polarisée $J(X)$ est un produit de jacobiennes.

Dans l'esquisse de démonstration qui suit, le signe $\simeq$ désigne un isomorphisme de variétés abéliennes polarisées.

On vérifie successivement :

a) $J(\mathbf{P}^3(\mathbf{C})) = 0$.

b) Si Y'' se déduit de la variété projective non singulière Y' par éclatement d'une courbe lisse Z de jacobienne $J(Z)$ (resp. d'un point), on a ([4] 3.11)

$$J(Y'') \simeq J(Y') \times J(Z)$$

(resp. $J(Y'') \simeq J(Y')$).

c) Si un morphisme $b : Y' \to X$ est birationnel, $J(X)$ est facteur direct dans $J(Y')$: il existe une variété abélienne principalement polarisée de la série principale B telle que

$$J(Y') \simeq J(X) \times B \; .$$

d) Soient $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ des variétés abéliennes principalement polarisées $\neq 0$. On suppose qu'aucun A_i n'admet une décomposition $A_i \simeq A'_i \times A''_i$ (par exemple que A_i est une jacobienne). Alors, toute décomposition de $A = \Pi A_i$ est de la forme

$$A \simeq \Big(\prod_{i \in I} A_i \Big) \times \Big(\prod_{i \notin I} A_i \Big) \qquad \text{pour } I \subset [1,n] \quad ([4]\ 3.23).$$

Si X est rationnelle, il existe un diagramme 2.1 avec $Y = \mathbb{P}^3(\mathbf{C})$ et b birationnel. D'après a) et b), $J(Y_{n+1})$ est un produit de jacobiennes. D'après c) et d), $J(X)$ en est un aussi.

Prenons pour X une hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$. On a

$$H^1(X , \mathbf{Z}) = H^3(X , \mathbf{Z})_{tors} = H^0(X , \Omega^3_X) = 0 \; ,$$

$$\dim J(X) = \dim H^1(X , \Omega^2_X) = 5 \; ,$$

et X est unirationnelle d'après [7]. Soit S la surface qui paramétrise les droites contenues dans X et soit $\alpha : S \to \mathrm{Alb}(S)$ l'application de S dans sa variété d'Albanese. Un des résultats essentiels de [4] est le suivant

THÉORÈME 2.4 ([4] 11.19 et 13.4).- <u>Il existe un isomorphisme</u> $J(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alb}(S)$, <u>qui transforme le diviseur</u> Θ <u>de</u> $J(X)$ <u>en l'image de</u> $S \times S$ <u>par l'application</u>

$$(x,y) \overset{\delta}{\longmapsto} \alpha(x) - \alpha(y) \; .$$

Clemens et Griffiths parviennent alors à utiliser des résultats de [1] pour prouver que $(\mathrm{Alb}(S), \delta(S\times S))$ ne peut pas être la jacobienne polarisée d'une courbe. Une autre preuve de l'irrationalité de X est suggérée dans l'appendice à [4]. Il s'agit de prouver

THÉORÈME 2.5.- <u>Le lieu singulier du diviseur</u> Θ <u>de</u> $J(X)$ <u>est de dimension</u> 0, <u>donc de codimension</u> > 4. <u>Il est même réduit à l'image par</u> δ <u>de la diagonale de</u> $S \times S$.

On sait que tel n'est jamais le cas pour le diviseur Θ d'une jacobienne.

C) <u>Manin et Iskovskih.</u>

Le groupe des automorphismes birationnels d'une variété X (égal au groupe des $\mathbf{C}$-automorphismes de $k(X)$) est un invariant birationnel de X. C'est celui qu'utilisent Manin et Iskovski pour montrer qu'une hypersurface quartique lisse dans $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$ n'est jamais rationnelle :

THÉORÈME 2.6 ([6]).- <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux hypersurfaces quartiques lisses dans</u> $\mathbb{P}^4(\mathbf{C})$. <u>Tout isomorphisme birationnel</u> $a : X \dashrightarrow Y$ <u>est automatiquement birégulier.</u>

Puisque certaines hypersurfaces quartiques sont unirationnelles, [7] ce théorème fournit un nouvel exemple de variétés unirationnelles non rationnelles.

3. <u>L'exemple de Artin et Mumford.</u>

Soit dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ une configuration consistant en

a) deux courbes cubiques lisses C_1 et C_2, d'équations $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, qui se coupent transversalement ;

b) une conique lisse Q, d'équation $q = 0$, qui rencontre chaque C_i en trois points de tangence distincts.

Nous construirons

a) un fibré vectoriel V sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, de rang 3 ;

b) une forme quadratique $\Phi : V \to \mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ faisceau inversible) de discriminant $f_1 f_2$ (si Δ , section de $\mathcal{L}^{\otimes 3} \otimes (\Lambda^3 V)^{\otimes(-2)}$, est le discriminant, le sous-schéma de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ d'équation $\Delta = 0$ est $C_1 \cup C_2$).

Soit $X \subset \mathbb{P}(V^*)$ le fibré en coniques sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, dégénérant le long de $C_1 \cup C_2$, d'équation homogène $\Phi = 0$. Les conditions suivantes seront vérifiées.

c) Φ est en tout point de rang ≥ 2 : pour $s \in C_1 \cup C_2$, la fibre $X_s = f^{-1}(s)$ est réunion de deux droites concourantes ; les seuls points singuliers de X sont les points singuliers des fibres X_s pour $s \in C_1 \cap C_2$.

d) Soit S le revêtement double de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ramifié le long de Q et $X_S = X \times_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})} S$. Alors, X_S/S admet une section

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ S \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[r, "\pi"'] & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) . \end{tikzcd}$$

e) Pour $s \in (C_1 \cup C_2) - Q$, les deux points $\alpha(t)$ pour $\pi(t) = s$ sont dans les deux composantes irréductibles de X_s .

Localement (pour la topologie usuelle) sur $C_1 \cup C_2$, la restriction du fibré X à $C_1 \cup C_2$ s'obtient en recollant deux fibrés en droites projectives le long d'une section. Toutefois, lorsqu on parcourt un lacet dans $C_1 \cup C_2$, ces deux fibrés peuvent s'échanger : il existe un revetement double non ramifié $(C_1 \cup C_2)^*$ de $C_1 \cup C_2$ dont, localement, les deux sections locales correspondent aux deux fibrés en droites projectives dont $X|C_1 \cup C_2$ est réunion. Soit $\pi_i : C_i^* \to C_i$

le revêtement double de C_i induit par $(C_1 \cup C_2)^*$. Nous n'utiliserons de e) que le corollaire suivant

<u>Lemme</u> 3.1.- C_i^* <u>est irréductible.</u>

D'après e), C_i^* est le normalisé du revêtement double de C_i induit par S. Le lemme résulte de ce que la section q de $\mathcal{O}(2)|_{C_i}$ n'est pas le carré d'une section de $\mathcal{O}(1)|_{C_i}$; si q était un carré, les trois points d'intersection de Q avec C_i seraient en effet collinéaires.

Au revêtement double C_i^* de C_i correspondent un caractère d'ordre 2 du groupe fondamental de C_i et un système local A_i localement isomorphe à $\mathbb{Z}$, défini par la suite exacte de faisceaux sur C_i

$$0 \rightarrow A_i \rightarrow \pi_{i*}\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \underline{\mathbb{Z}} \rightarrow 0 ,$$

où Tr est la "somme des valeurs sur les deux feuillets du revêtement".

On a

(3.2) $\quad H^0(C_i , A_i) = 0 \quad , \quad H^1(C_i , A_i) = \mathbb{Z}/2 \quad , \quad H^2(C_i , A_i) = \mathbb{Z}/2$.

Nous n'utiliserons d) que pour prouver le fait suivant

<u>Lemme</u> 3.3.- X <u>est unirationnel.</u>

La surface S est une quadrique dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, donc est rationnelle. Puisque X_S/S admet une section, on a un isomorphisme birationnel $X_S \sim S \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et X est image de la variété rationnelle X_S.

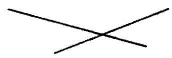
Les neuf points singuliers de X sont des points quadratiques ordinaires. On peut résoudre chacun d'eux comme suit (cf. [3])

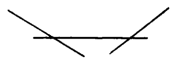
a) On l'éclate ; ceci résoud X et remplace le point singulier par une quadrique P, isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

b) On choisit une projection $P \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et on contracte dans l'éclaté $\tilde{X}_1$ de X les fibres de cette projection ; c'est possible car β est lisse, que ses fibres sont isomorphes à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et que le fibré normal à P dans $\tilde{X}_1$ induit sur chaque fibre un fibré $\mathcal{O}(-1)$ ([8]).

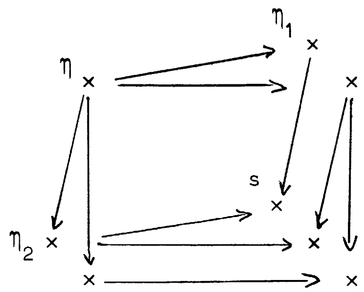
Soit $\tilde{X}$ la variété obtenue. On dispose d'une application de $\tilde{X}$ dans X, et $\tilde{X}$ se déduit de X en remplaçant chaque point singulier par une droite projective. Les fibres de la projection $p : \tilde{X} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sont des trois types suivants

$s \notin C_1 \cup C_2$ une conique

$s \in C_1 \cup C_2$, $s \notin C_1 \cap C_2$  deux droites concourantes

$s \in C_1 \cap C_2$  trois droites comme indiqué.

Quand on passe du point générique η de $\mathbf{P}^2(\mathbb{C})$ au point générique η_i de C_i $(i = 1,2)$ à $s \in C_1 \cap C_2$, les composantes irréductibles se spécialisent comme indiqué dans le diagramme suivant

(3.4) 

(les croix représentent des composantes irréductibles, les multiplicités sont toutes un). La fastidieuse vérification de ce résultat local est omise. On en tire

<u>Lemme</u> 3.5.- <u>On a</u> $R^0 p_* \underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Z}}$, $R^1 p_* \mathbb{Z} = 0$ <u>et une suite exacte de faisceaux</u>

$$0 \to A_1 \oplus A_2 \to R^2 p_* \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\mathrm{Tr}} \underline{\mathbb{Z}} \to 0 .$$

On peut maintenant utiliser la suite spectrale de Leray de p pour calculer $H^*(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. Le fait essentiel est le suivant (qui implique l'irrationalité de X).

<u>Lemme</u> 3.6.- <u>On a</u> $H^3(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/(2)$.

Calculons les termes E_2 de la suite spectrale de Leray de p . On a

$$R^o p_* \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \quad \text{donc} \quad E^{p,o} = \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z}\ ,\ 0\ ,\ \mathbb{Z} \quad \text{pour } p = 0 \text{ à } 4\ ,$$

et $$R^1 p_* \mathbb{Z} = 0 \quad \text{donc} \quad E^{p,1} = 0\ .$$

Pour calculer $E^{p,2} = H^p(R^2 p_* \underline{\mathbb{Z}})$, on utilise la suite exacte longue définie par la suite exacte courte de faisceaux 3.5. On trouve

$$0 \rightarrow E^{o,2} \xrightarrow{a} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \rightarrow E^{1,2} \rightarrow 0\ ,$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \rightarrow E^{2,2} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0\ ,$$

$$E^{3,2} = 0 \quad \text{et} \quad E^{4,2} = \mathbb{Z}\ .$$

On vérifie facilement que $a(E^{o,2}) = 2\,\mathbb{Z}$ (ce fait n'est d'ailleurs pas nécessaire à la démonstration de $H^3(\widetilde{X}, \mathbb{Z})_{tors} \neq 0$). Les E_2^{pq} sont donc les suivants

$$\begin{array}{c|ccccc}
q & & & & & \\
 & 2\,\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2 & E^{2,2} & 0 & \mathbb{Z} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \\
\hline
 & & & & & p
\end{array}$$

Les différentielles d_r ne peuvent qu'être nulles, de sorte que $E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$, et le lemme en résulte.

On voit qu'il était essentiel de disposer de <u>deux</u> courbes $C_i \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ le long desquelles X dégénère, car on tue un groupe $\mathbb{Z}/2$ en passant de $H^1(\mathrm{Ker}(R^2 p_* \mathbb{Z} \rightarrow \underline{\mathbb{Z}}))$ à $H^1\ R^2 p_* \mathbb{Z} = E^{1,2}$.

Il reste à effectuer les constructions promises. Artin et Mumford savent prouver <u>a priori</u> l'existence d'un fibré en coniques du type voulu. Je me contenterai de donner des équations qui en définissent un.

1) L'image de $f_1 f_2$ dans $H^o(Q , \mathcal{O}(6))$ est le carré de $g_1 \in H^o(Q , \mathcal{O}(3))$, car Q est rationnelle et les zéros de $f_1 f_2$ sur Q sont doubles. Ce g_1 se relève en $g \in H^o(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) , \mathcal{O}(3))$ car $H^1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) , \mathcal{O}(1)) = 0$. Puisque $f_1 f_2 - g^2$ s'annule sur Q , c'est un multiple de q :

$$f_1 f_2 = g^2 + qd .$$

2) On prend $V = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}$, et la forme

$$\Phi : V \to \mathcal{O} : (x , y , z) \longmapsto qx^2 + 2gxy - dy^2 - z^2 .$$

On a $\Delta = g^2 + qd = f_1 f_2$. En un point où Φ serait de rang ≤ 1 , on aurait $\Delta = q = d = 0$, d'où $g = 0$, et $\Delta = g^2 + qd$ aurait un zéro double. Ceci est absurde car $C_1 \cap C_2 \cap Q = \emptyset$. Enfin, S s'identifie au sous-schéma de X d'équation $y = 0$, et d) e) en résultent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI - On a theorem of Torelli, Am. J. of Math., 80 4 (1958), p. 801-828.

[2] M. ARTIN and D. MUMFORD - Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Journal London Math. Soc., (to appear).

[3] M. ATIYAH - On analytic surfaces with double points, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 247 (1958), p. 237-244.

[4] C. H. CLEMENS and P. A. GRIFFITHS - The intermediate jacobian of the cubic threefold, preprint.

[5] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero : I, II, Ann. of Math., 79 (1964), p. 109-326.

[6] Ju. I. MANIN et V. A. ISKOVSKIH - L'hypersurface quartique de dimension trois, et un contre-exemple au problème de Lüroth, Mat. Sbornik, 86 1 (1971),140-166

[7] L. ROTH - Algebraic threefolds, Ergebnisse der Math., Heft 6, Springer-Verlag, 1955.

[8] B. SAINT-DONAT - Sur un théorème de G. Castelnuovo et F. Enriques, Thèse de 3ème Cycle, Lyon 1968.

[9] J.-P. SERRE - Critère de rationalité pour les surfaces algébriques (d'après K. Kodaira), Séminaire Bourbaki, exposé 146, volume 1956/57, W. A. Benjamin, New York.

[10] J.-P. SERRE - On the fundamental group of a unirational variety, J. London Math. Soc. 34 (1959), p. 481-484.

[11] A. WEIL - Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, Paris 1958.