EGBERT BRIESKORN

Sur les groupes de tresses

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 401, p. 21-44

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__21_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année, 1971/72, n° 401

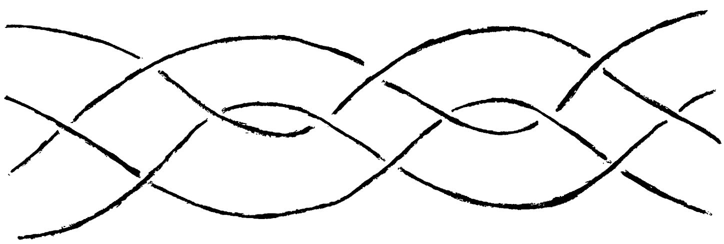
SUR LES GROUPES DE TRESSES

[d'après V. I. ARNOL'D]

par Egbert BRIESKORN

I. Introduction.

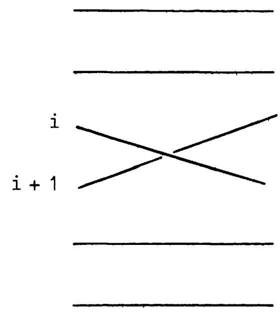
Les tresses sont des objets que l'on peut décrire par des figures comme la suivante :



Les tresses ont été connues bien longtemps avant qu'elles n'aient été introduites comme objets mathématiques par E. Artin [7] en 1925.

Les tresses à n brins se composent de manière évidente et forment un groupe appelé le groupe de tresses $B(n)$. On a un homomorphisme surjectif évident de $B(n)$ sur le groupe symétrique $S(n)$ et son noyau est le groupe des tresses colorées.

On a de façon évidente un système de générateurs $g_1, \dots, g_{n-1}$ de $B(n)$ où g_i croise le i-ème et $(i+1)$-ème brins comme le montre la figure suivante :



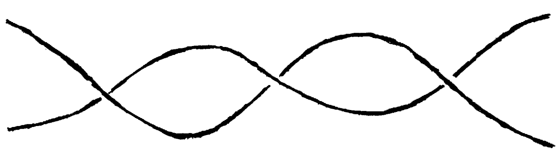
On a évidemment les relations suivantes :

$$g_i g_j = g_j g_i \qquad \text{si} \quad |i-j| > 1$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \qquad \text{si} \quad i = 1,\dots,n-2 \ .$$

Plusieurs auteurs ont prouvé que ces générateurs et relations donnent une présentation du groupe de tresses $B(n)$.

Artin introduisit les tresses à cause de leurs relations avec la théorie des noeuds. En joignant les bouts correspondants d'une tresse on obtient une "tresse fermée" et à celle-ci est associé un noeud ou un link. Par exemple la tresse suivante :



donne le noeud de trèfle :

Tout link peut être obtenu de cette façon, mais des tresses fermées différentes peuvent donner le même link. Résoudre le problème des mots pour le groupe de tresses signifie décider si deux tresses données comme produits de générateurs et de leurs inverses sont égales. Résoudre le problème de la conjugaison signifie décider si deux tresses donnent la même tresse fermée. Le problème des mots a été résolu par E. Artin [7], [8], et le problème de la conjugaison, qui était difficile, a été résolu par F. A. Garside [15] en 1969. Garside donna également une autre solution pour le problème des mots.

Ainsi l'étude des groupes de tresses est une jolie combinaison de la théorie des groupes et de la topologie. Plus récemment, on a trouvé qu'il y avait des relations très intéressantes avec la géométrie algébrique et avec la théorie des groupes finis engendrés par des réflexions. Le sujet de cette conférence est de faire un rapport sur ces développements plus récents et en particulier sur le travail de V. I. Arnol'd.

2. Groupes de tresses généralisés.

Les résultats d'Arnol'd sur les groupes de tresses peuvent être mieux compris en les généralisant à une classe de groupes un peu plus large.

On peut considérer une tresse à n brins comme étant une fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ qui à tout $t \in [0,1]$ fait correspondre n points distincts dans le plan complexe $\mathbf{C}$ et telle que $f(0) = f(1) = \{1,2,\dots,n\}$. Ceci définit un isomorphisme :

$$B(n) = \pi_1(\mathbf{C}^n/S(n) - D)$$

où le groupe symétrique opère sur $\mathbf{C}^n$ par la permutation des coordonnées, D est l'image dans $\mathbf{C}^n/S(n)$ des hyperplans où deux coordonnées sont égales et le point de base $\{1,2,\ldots,n\}$ a été omis.

Cette situation peut être généralisée de la façon suivante : soit W un groupe fini irréductible engendré par des réflexions opérant sur un espace vectoriel réel de dimension n. Alors W opère aussi sur le complexifié V de cet espace vectoriel. Le quotient V/W est une variété affine isomorphe à l'espace affine complexe de dimension n (cf. [10] V, 5.3).

Soient s_i, $i \in I$, les réflexions dans W et soit V_i l'hyperplan complexe de V correspondant à la réflexion s_i. Soit $\Delta = \bigcup_{i \in I} V_i$ l'union de ces hyperplans et soit D l'image de Δ dans V/W. Les hypersurfaces Δ et D sont exactement le lieu de ramification et le discriminant du revêtement ramifié $V \to V/W$ (cf. [10] V, 5.4). Donc avec les complémentaires :

$$Y_W = V - \Delta$$

$$X_W = V/W - D$$

on obtient un revêtement non ramifié :

$$Y_W \to X_W$$

où W est le groupe de transformation du revêtement. Généralisant la définition des groupes de tresses et des groupes des tresses colorées, on peut définir les groupes suivants :

$$G_W = \pi_1 (X_W)$$

$$H_W = \pi_1 (Y_W) .$$

Si W est le groupe symétrique, alors G_W est le groupe de tresses et H_W est le groupe des tresses colorées. Le revêtement $Y_W \to X_W$ donne la suite exacte :

$$1 \to H_W \to G_W \to W \to 1 .$$

Afin de pouvoir décrire G_W à l'aide de générateurs et relations, on a besoin de la matrice de Coxeter (m_{ij}) de W, où m_{ij} = ordre $(s_i s_j)$ et où $s_1, \ldots, s_n$ sont les réflexions correspondant aux murs d'une chambre de W. Dans [11] on a prouvé :

PROPOSITION 1.- Le groupe G_W a une présentation avec les générateurs $g_1, \ldots, g_n$ et les relations :

$$g_i g_j g_i \ldots = g_j g_i g_j \ldots$$

où le nombre de facteurs de chaque côté est égal à m_{ij}.

Ces relations sont une généralisation évidente de celles des groupes de tresses et on peut penser que les résultats de Garside sur le problème du mot et le problème de la conjugaison peuvent se généraliser à ces groupes. Par exemple, Garside établit que c'est bien le cas si W est le groupe de symétrie H_3 de l'icosaèdre. Ces groupes ont été considérés aussi par N. Iwahori [16]. Cependant, nous allons laisser ces problèmes de côté pour considérer la cohomologie des groupes G_W et H_W. On espère pouvoir calculer la cohomologie de ces groupes à cause de la conjecture suivante :

CONJECTURE.- Les espace X_W et Y_W sont des espaces d'Eilenberg-MacLane.

Malheureusement je n'ai pu prouver cette conjecture que pour quelques types de groupes de réflexions W. (Dans ce qui suit la notation des différents types est celle de [10]. Pour le type A_n, la conjecture fut prouvée par Fox et Neuwirth [13].)

PROPOSITION 2.- Si W est du type A_n, C_n, D_n, G_2, F_4 ou $I_2(p)$, les espaces X_W et Y_W sont des espaces d'Eilenberg-MacLane.

Remarque.- Donc seuls les cas H_3 , H_4 , E_6 , E_7 , E_8 restent à considérer.

Preuve. On montre que Y_W est un fibré localement trivial sur un espace de base qui est un $K(\pi, 1)$ et avec pour fibre une courbe affine complexe. La suite exacte d'homotopie de cette fibration conduit au résultat désiré. Les fibrations sont obtenues de la façon suivante :

Type A_n : Dans ce cas $Y_W \times \mathbf{C} = Z_{n+1}$, où

$$Z_{n+1} = \{ (z_1,\dots,z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid z_i \neq z_j \text{ pour tout } i \neq j \} .$$

La projection $(z_1,\dots,z_{n+1}) \mapsto (z_1,\dots,z_n)$ définit une fibration différentiable localement triviale $Z_{n+1} \to Z_n$ dont la fibre au-dessus de $(z_1,\dots,z_n)$ est $\mathbf{C} - \{z_1,\dots,z_n\}$. Le résultat s'établit alors par récurrence sur n .

Types C_n , G_2 et $I_2(p)$: La même méthode de projection marche.

Type D_n : Dans ce cas $Y_W = \{ (y_1,\dots,y_n) \in \mathbf{C}^n \mid y_i \pm y_j \neq 0 \text{ pour tout } i \neq j \}$. Soit Z l'espace : $Z = \{ (z_1,\dots,z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid z_i \neq 0$ et $z_i \neq z_j$ pour tout $i \neq j \}$. En utilisant encore la méthode de la projection, on montre facilement par récurrence sur n que Z est un $K(\pi, 1)$. On définit $Y_W \to Z$ par $z_i = y_n^2 - y_i^2$. Ceci est alors une fibration différentiable localement triviale.

Type F_4 : Dans ce cas :

$$Y_W = \{ (y_1,\dots,y_4) \in \mathbf{C}^4 \mid y_i \neq 0 \, , \, y_i \pm y_j \neq 0 \text{ pour tout } i \neq j \, , \, y_1 \pm y_2 \pm y_3 \pm y_4 \neq 0 \}$$

$$Z = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3 \mid z_i \neq 0 \, , \, z_i \neq z_j \text{ pour tout } i \neq j \} .$$

L'application $Y_W \to Z$ définie par $z_i = y_1 y_2 y_3 y_4 (y_4^2 - y_i^2)$ donne une fibration différentiable localement triviale.

3. Cohomologie des groupes des tresses colorées généralisés.

Afin de calculer la cohomologie des groupes de tresses colorées généralisés nous avons besoin de deux lemmes. Ceux-ci concerneront une famille finie quelconque d'hyperplans affines complexes V_i , $i \in I$, dans un espace affine complexe V . Pour calculer le p-ième groupe de cohomologie, $0 \leq p \leq n$, on considère les sous-ensembles maximaux $I_{p,1},\dots,I_{p,k_p}$ de I pour lesquels on ait la propriété :

$$\operatorname{codim} \bigcap_{i \in I_{p,k}} V_i = p .$$

<u>Lemme</u> 3.- Pour les complémentaires d'union d'hyperplans $Y = V - \bigcup_{i \in I} V_i$ et $Y_{p,k} = V - \bigcup_{i \in I_{p,k}} V_i$ les inclusions $i_k : Y \to Y_{p,k}$ induisent un isomorphisme :

$$H^p(Y , \mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{k_p} H^p(Y_{p,k} , \mathbb{Z}) .$$

<u>Preuve</u>. (a) En introduisant des ouverts convenables $U_{p,k}$ de Y tels que pour les inclusions $j_k : U_{p,k} \to Y$ les applications induites $j_\ell^* i_k^*$ en cohomologie soient des isomorphismes pour $\ell = k$ et 0 pour $\ell \neq k$, on voit que les inclusions induisent une injection de la somme directe dans $H^p(Y , \mathbb{Z})$.

(b) La surjectivité de cette application est d'abord prouvée pour $p = n$ en décomposant V à l'aide d'un nombre fini d'hyperplans réels parallèles tels que chaque bande entre les hyperplans ne contienne au plus qu'un point $\bigcap_{i \in I_{n,k}} V_i$. La surjection résulte alors d'une utilisation répétée de suites de Mayer-Vietoris.

(c) La preuve de la surjectivité pour un p général se ramène au cas précédent en utilisant un argument du type de Lefschetz. Soit L un sous-espace affine de dimension p suffisamment général. On a un diagramme commutatif d'applications induites par les inclusions :

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_k H^p(Y_{p,k}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"] & H^p(Y) \arrow[d, "i"] \\ \bigoplus_k H^p(Y_{p,k} \cap L) \arrow[r, "g"] & H^p(Y \cap L) \end{tikzcd}$$

f est un isomorphisme pour des raisons géométriques évidentes, g est un isomorphisme d'après (b), et i est injectif d'après un théorème du type de Lefschetz [17] , donc h est surjectif. C. Q. F. D.

COROLLAIRE 4.- Pour toute famille finie d'hyperplans affines complexes V_i , $i \in I$, dans un espace affine V , $H^*(V - \bigcup_{i\in I} V_i , \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de type fini.

<u>Preuve</u>. Ceci résulte du lemme 3 par récurrence sur la dimension, car il est facile de voir que $Y_{p,k} = \mathbb{C}^{n-p} \times \mathbb{C}^* \times \tilde{Y}_{p-1\,,\,k}$, où $\tilde{Y}_{p-1\,,\,k}$ est un complémentaire d'une union d'hyperplans dans un espace affine de dimension $p - 1$.

<u>Lemme</u> 5.- Soient V_j , $j \in I$, une famille finie d'hyperplans affines complexes dans V donnés par les formes linéaires ℓ_j . Alors les classes de cohomologie associées aux formes différentielles holomorphes $w_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\ell_j}{\ell_j}$ engendrent l'anneau de cohomologie entière $H^*(V - \bigcup_{j\in I} V_j , \mathbb{Z})$. De plus cet anneau est isomorphe à la $\mathbb{Z}$-sous-algèbre engendrée par les w_j dans l'algèbre des formes méromorphes sur V .

<u>Preuve</u>. Dans le cas de la dimension 1 , le lemme est une conséquence triviale du théorème des résidus. Dans le cas général il résulte du lemme 3 par récurrence sur la dimension comme dans le corollaire précédent. Ceci est clair pour la première assertion. Pour la seconde à l'aide du lemme 3 on se ramène au cas où tous les V_j passent par un point. Mais alors les caractéristiques d'Euler-Poincaré

de l'anneau gradué de cohomologie et de l'anneau des formes sont toutes les deux égales à 0 . Donc le résultat en résulte par induction sur le degré des formes.

THÉORÈME 6.- Soit W un groupe de réflexions opérant sur l'espace affine complexe de dimension n , et soit Y_W le complémentaire dans V de l'union des hyperplans complexes associés aux réflexions. Alors l'anneau de cohomologie de Y_W a les propriétés suivantes :

(i) $H^p(Y_W, \mathbb{Z})$ est abélien libre. Son rang est égal au nombre d'éléments $w \in W$ de longueur $\ell(w) = p$, où ℓ est la longueur relativement au système des générateurs constitué de toutes les réflexions de W .

(ii) Le polynôme de Poincaré de $H^*(Y_W, \mathbb{Z})$ est

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + m_i t)$$

où les m_i sont les exposants de W .

(iii) La structure multiplicative de $H^*(Y_W, \mathbb{Z})$ est celle de l'algèbre engendrée par les 1-formes décrites dans le lemme 5.

<u>Preuve</u>. (i) L'inexistence de torsion a été déjà donnée dans le corollaire 4. L'assertion concernant les nombres de Betti b_p est prouvée par récurrence sur n . Supposons que l'assertion soit vraie pour les groupes de réflexions opérant sur les espaces de dimension inférieure à n . Les éléments de longueur p sont ceux qui fixent un sous-espace de codimension p . Ceux qui fixent $\bigcap_{i \in I_{p,k}} V_i$ sont les éléments de longueur maximale dans le groupe de réflexions qui fixe cet espace, donc pour p inférieur à n leur nombre est égal au rang de $H^p(Y_{p,k})$ d'après l'hypothèse de récurrence. Donc l'assertion pour b_p résulte du lemme 2 pour $p < n$. Mais alors elle est aussi vraie pour $p = n$, car la somme alternée des b_p et celle des nombres d'éléments de longueur p sont égales à 0 .

(ii) L'assertion concernant le polynôme de Poincaré est une conséquence de (i) et d'un résultat de Shephard et Todd qui a été prouvé de façon systématique par L. Solomon [18].

(iii) C'est un cas particulier du lemme 5.

<u>Remarques</u>.- (1) Pour le type A_n , ce théorème a été prouvé par V. I. Arnol'd [2] en utilisant des méthodes différentes. En fait Arnol'd donne une description meilleure de la structure multiplicative : l'anneau de cohomologie est isomorphe au quotient de l'algèbre extérieure engendrée par les w_i par l'idéal engendré par les relations :

$$w_i \wedge w_j + w_j \wedge w_k + w_k \wedge w_i$$

où les 1-formes w_i , w_j , w_k sont définies comme dans le lemme 5 et correspondent aux hyperplans V_i , V_j , V_k tels que codim $(V_i \cap V_j \cap V_k) < 3$.

(2) Quand W est le groupe de Weyl d'un groupe complexe simple G , il est intéressant de comparer la cohomologie décrite au théorème 6 avec la cohomologie de G/T , où T est un tore maximal. Il est bien connu que cette cohomologie n'a pas de torsion, s'annule dans les dimensions impaires et que son polynôme de Poincaré est :

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + t^2 + t^4 + \dots + t^{2m_i}) .$$

C'est pourquoi, grâce à un résultat de Solomon [19], le nombre de Betti b_{2p} est égal au nombre d'éléments $w \in W$ tels que $L(w) = p$. Ici L est la longueur relativement aux réflexions qui correspondent aux murs d'une chambre de Weyl.

4. Cohomologie des groupes des tresses généralisés.

Ainsi la cohomologie des groupes des tresses colorées généralisés H_W est entièrement comprise, au moins dans les cas où la conjecture est vraie. La situation est beaucoup plus compliquée pour les groupes G_W . Evidemment il y a quelques faits évidents :

(i) La cohomologie de X_W s'annule dans les dimensions supérieures à la dimension complexe de X_W , car X_W est une variété de Stein.

(ii) De la proposition 1, le premier groupe d'homologie peut être calculé facilement en abélianisant G_W . C'est $\mathbb{Z}$ sauf dans les cas C_n , F_4 , G_2 et $I_2(p)$, p pair, où c'est $\mathbb{Z}^2$. Donc il n'y a pas de torsion dans le second groupe de cohomologie.

(iii) L'ordre de toute torsion doit diviser l'ordre de W . Ceci provient de la suite spectrale de $Y_W \to X_W$

$$E_2^{pq} = H^p(W , H^q(Y_W , \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X_W , \mathbb{Z}) .$$

De cette suite spectrale on obtient également que la cohomologie invariante $H^q(Y_W , \mathbb{Z})^W$ est isomorphe à la partie libre de $H^q(X_W , \mathbb{Z})$. Avec les lemmes 3 et 5 ceci permet de calculer les nombres de Betti de X_W .

THÉORÈME 7.- Les nombres de Betti b_i non nuls de X_W sont ceux du tableau suivant :

Type de W	Nombre de Betti	
A_n	$b_o = b_1 = 1$	
C_n	$b_o = b_n = 1 \;;\; b_i = 2 \,,\; 0 < i < n$	
D_n	$b_o = b_1 = 1$	n impair
D_n	$b_o = b_1 = b_{n-1} = b_n = 1$	n pair
E_6	$b_o = b_1 = 1$	
E_7	$b_o = b_1 = b_6 = b_7 = 1$	
E_8	$b_o = b_1 = b_7 = b_8 = 1$	
F_4	$b_o = b_4 = 1 \,,\; b_1 = b_2 = b_3 = 2$	
G_2	$b_o = b_2 = 1 \,,\; b_1 = 2$	
H_3	$b_o = b_1 = b_2 = b_3 = 1$	
H_4	$b_o = b_1 = b_3 = b_4 = 1$	
$I_2(p)$	$b_o = b_1 = 1$	p impair
$I_2(p)$	$b_o = b_2 = 1 \,,\; b_1 = 2$	p pair

<u>Preuve</u>. On choisit parmi les sous-espaces $\bigcap_{i \in I_{p,k}} V_i$ un système de représentants, disons ceux qui correspondent à $I_{p,k}$, $k = 1,\ldots,r_p$, tels que l'un quelconque de ces espaces soit envoyé surjectivement sur exactement un de ces représentants par un élément $w \in W$. Ces représentants peuvent être évidemment choisis comme intersections de murs d'une chambre de Weyl, i.e. peuvent être décrits par un certain sous-graphe du graphe de Coxeter. Soit $W_{p,k}$ le groupe correspondant engendré par des réflexions, et soit $W'_{p,k}$ le sous-groupe de W qui stabilise $\bigcap_{i \in I_{p,k}} V_i$. Alors :

$$H^P(Y_W , \mathbb{Z})^W = \bigoplus_{k=1}^{r_p} H^P(Y_{p,k} , \mathbb{Z})^{W'_{p,k}} .$$

Ce fait avec la nullité de la caractéristique d'Euler-Poincaré de X_W permet un calcul par récurrence de la cohomologie invariante, car dans beaucoup de cas il n'y a pas de cohomologie invariante par $W_{p,k}$, et dans les autres cas l'action de $W'_{p,k}$ peut être décrite à l'aide du lemme 5. Exemple : De cette façon, il est très facile de montrer que pour le type A_n on a $b_i = 0$ pour $i > 2$. On le montre directement pour $i = 2$ et pour $i > 2$ on utilise une double récurrence sur n et i .

Remarque.- Pour A_n , ce résultat fut prouvé par Arnol'd [3] à l'aide d'une méthode différente.

Ainsi la partie libre de $H^*(X_W , \mathbb{Z})$ a été déterminée. En ce qui concerne la torsion, la situation est beaucoup plus compliquée. Cependant il y a au moins un résultat systématique concernant les groupes G_W associés aux groupes de réflexions des trois séries infinies A_n , C_n , D_n : leur cohomologie se stabilise. Il y a des inclusions évidentes, non uniques, $A_n \subset A_{n+1}$, $C_n \subset C_{n+1}$, $D_n \subset D_{n+1}$, et des inclusions correspondantes pour les groupes G_W qui peuvent, par exemple, être définies à l'aide des générateurs donnés dans la proposition 1. Pour les applications induites en cohomologie on a le résultat suivant :

THÉORÈME 8.-

$$H^p(G_{A_{n+1}} , \mathbb{Z}) \cong H^p(G_{A_n} , \mathbb{Z}) ,$$

$$H^p(G_{C_{n+1}} , \mathbb{Z}) \cong H^p(G_{C_n} , \mathbb{Z}) ,$$

$$H^p(G_{D_{n+1}} , \mathbb{Z}) \cong H^p(G_{D_n} , \mathbb{Z}) ,$$

pour $n \geq 2p + 2$.

Remarque.- Dans le cas A_n , le théorème est dû à Arnol'd [3]. En fait, il donne une meilleure borne pour n en fonction de p . L'idée de base de la preuve d'Arnol'd est la même que celle qui suit pour tous les cas.

Preuve. (a) Fixons l'une des séries A_n , C_n , D_n et soit W_n le groupe correspondant de rang n . A cause de la proposition 2, on doit comparer $H^p(X_{W_{n+1}})$ et $H^p(X_{W_n})$ (Les coefficients sont toujours les entiers avec action triviale). Les homomorphismes entre les groupes de cohomologie en question peuvent être décrits comme ci-dessous. W_{n+1} opère sur V . Choisissons un point dans V ayant W_n comme groupe d'isotropie et soit x_o l'image de ce point dans V/W_{n+1} . Alors pour un bon voisinage U de x_o l'espace $U \cap X_{W_{n+1}}$ a le type d'homotopie de X_{W_n} et l'inclusion $U \cap X_{W_{n+1}} \subset X_{W_{n+1}}$ induit l'homomorphisme désiré entre les groupes de cohomologie.

(b) Afin de prouver que c'est un isomorphisme jusqu'à un certain degré p_o , on passe de la cohomologie de X_W , qui est le complément du discriminant D , à l'homologie de $\bar{D}$, compactifié de D auquel on a rajouté un point. (Dans ce qui suit, pour tout espace X , on note $\bar{X}$ le compactifié de X auquel on a rajouté un point et si $\bar{X}$ s'envoie dans $\overline{V/W_{n+1}}$, on note $\bar{X}^o$ l'espace X moins les points qui s'envoient sur x_o .) La dualité d'Alexander donne :

$$H^p(X_{W_{n+1}}) \cong H_{2n+1-p}(\bar{D}) .$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que l'homologie relative de $(\bar{D}, \bar{D}^o)$ est isomorphe à l'homologie réduite de la double suspension du compactifié du discriminant de W_n . Ainsi les isomorphismes désirés $H^p(X_{W_{n+1}}) \cong H^p(X_{W_n})$ pour $p \leq p_o$ proviendront de la suite d'homologie de $(\bar{D}, \bar{D}^o)$ si nous pouvons prouver que $H_i(\bar{D}^o) = 0$ pour $i \geq 2n - p_o$.

(c) Ceci sera prouvé par récurrence, où en plus de D d'autres espaces similaires doivent être considérés. D est composé d'une ou deux composantes irréductibles. Chaque composante E est l'image dans V/W_{n+1} d'un hyperplan de réflexion. Il est suffisant de montrer que $H_i(\bar{E}^o) = 0$ pour $i \geq 2n - p_o$.

C'est nécessaire de généraliser cette situation de la façon suivante : soit $V'' \subset V'$ une paire de sous-espaces de V obtenus comme intersections d'hyperplans de réflexion. Soit $W' \subset W$ un sous-groupe du stabilisateur de V' qui opère sur V' comme un groupe engendré par des réflexions. Soit W'' le stabilisateur de V'' dans W' . Dans les cas que nous aurons à considérer, W'' opère sur V'' comme un groupe engendré par des réflexions, donc $F = V''/W''$ est un espace affine complexe. Soit $E \subset V'/W'$ l'image de F . Ce que l'on doit prouver par récurrence est que $H_i(\bar{E}^o) = 0$ pour certains i et certaines paires de sous-espaces $V'' \subset V'$.

Les paires $V'' \subset V'$ que l'on a à considérer sont obtenues inductivement de la façon suivante : on commence avec une paire $V'' \subset V'$, où $V' = V$ et V'' est un hyperplan de réflexion. Supposons qu'une paire $V'' \subset V'$ ait été construite. Alors l'application correspondante $F \to E$ induit un isomorphisme dans le complémentaire de certains sous-ensembles analytiques de codimension 1 .

Les composantes irréductibles de ces sous-ensembles sont les images de certains sous-espaces $V''' \subset V''$. Ainsi on obtient de nouvelles paires $V''' \subset V''$ et $V''' \subset V'$. De cette façon on continue de construire des paires $V'' \subset V'$ aussi longtemps que $2 \cdot \dim V'' > n + 1$. Cette condition sur la dimension garantit le fait que V'' contienne des points au-dessus de x_o .

(d) Pour les espaces construits ci-dessus :

$$H_i(\bar{E}^o) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geq \dim_{\mathbf{C}} E + \frac{n}{2} + 1 \, .$$

La preuve se fait par récurrence sur la dimension de E . Considérons l'application $\bar{F}^o \to \bar{E}^o$. Restreinte aux complémentaires de certains ensembles $\bar{B}^o \subset \bar{F}^o$ et $\bar{A}^o \subset \bar{E}^o$, c'est un homéomorphisme. C'est pourquoi les homomorphisme de la suite exacte d'homologie de $(\bar{F}^o , \bar{B}^o)$ dans celle de $(\bar{E}^o , \bar{A}^o)$ sont des isomorphismes pour les groupes d'homologie relative. L'homologie de $\bar{A}^o$ et $\bar{B}^o$ s'annule au-dessus d'un certain degré d'après l'hypothèse de récurrence. Le point crucial maintenant est le suivant : $\bar{F}$ contient seulement un point au-dessus de x_o . Donc $\bar{F}^o$ est une cellule et son homologie réduite est nulle. C'est pourquoi le résultat désiré sur la nullité de $H_i(\bar{E}^o)$ provient immédiatement de la comparaison des deux suites exactes. L'application de ce résultat au discriminant démontre le théorème à cause de (b).

La méthode utilisée dans la preuve du théorème 8 peut également être utilisée pour calculer certains des groupes de cohomologie $H^p(X_W , \mathbf{Z})$. Jusqu'à maintenant des résultats partiels seulement sont connus. Par exemple, Arnol'd dans [3] a calculé les quelques premiers groupes de cohomologie stables des groupes de tresses.

THÉORÈME 9.- Les sept premiers groupes de cohomologie stables $H^p(B(n) , \mathbf{Z})$ des groupes de tresses sont ceux qui sont donnés dans le tableau suivant :

p	0	1	2	3	4	5	6
H^p	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}$	0	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_2$	$\mathbf{Z}_6$	$\mathbf{Z}_6$

Il y a un autre résultat intéressant sur la cohomologie entière dans [3] qui semble être une particularité des groupes de tresses :

THÉORÈME 10.- $\qquad H^p(B_{2n+1} , \mathbf{Z}) = H^p(B_{2n} , \mathbf{Z})$.

L'anneau de cohomologie des groupes de tresses à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ a été entièrement déterminé par D. B. Fuks [14] par une méthode assez différente. Utilisant le fait que l'action du groupe symétrique sur l'espace complexe de dimension n provient d'une action réelle, Fuks construit de manière très naturelle une décomposition cellulaire de X_W . L'analyse du complexe de chaînes à coefficients dans $\mathbb{Z}_2$ permet de calculer $H^*(B(n), \mathbb{Z}_2)$.

Il est convenable de décrire le résultat pour l'homologie au lieu de la cohomologie et de passer à l'homologie stable. $H_*(B(\infty), \mathbb{Z}_2)$ a la structure d'une algèbre de Hopf sur $\mathbb{Z}_2$, où la comultiplication μ correspond à la multiplication de l'anneau de cohomologie et la multiplication est définie par la somme directe des tresses $B(n) \oplus B(n) \to B(n+m)$. D. B. Fuks prouve :

THÉORÈME 11.- (i) L'algèbre de Hopf $H_*(B(\infty), \mathbb{Z}_2)$ est une algèbre de polynômes avec coefficients $\mathbb{Z}_2$ ayant des générateurs x_i , $i = 1,2,\dots$ de degré $2^i - 1$ et dont la comultiplication μ est donnée par

$$\mu(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1 .$$

(ii) Les homomorphismes des groupes de tresses dans les groupes orthogonaux induisent des monomorphismes d'algèbre de Hopf

$$H_*(BO(\infty), \mathbb{Z}_2) \leftarrow H_*(B(\infty), \mathbb{Z}_2) .$$

(iii) $H_*(B(n), \mathbb{Z}_2)$ est la sous-coalgèbre ayant pour une base les monômes $x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}$ tels que $\Sigma k_i 2^i \leq n$.

<u>Remarques</u>.- $H^*(B(n), \mathbb{Z}_2)$ est entièrement déterminé par ce théorème. De plus, R. Switzer m'a fait remarquer que l'homomorphisme $H_*(BO(\infty), \mathbb{Z}_2) \leftarrow H_*(B(\infty), \mathbb{Z}_2)$ est déjà entièrement déterminé par (i) et l'injectivité (ii). La raison en est

que l'algèbre de Hopf $H_*(BO(\infty), \mathbb{Z}_2)$ ne possède qu'un seul élément primitif p_j de degré j. Donc x_i s'envoie nécessairement sur p_{2^i-1}. Enfin, G. Segal et R. Switzer m'ont fait remarquer que l'algèbre de Hopf $H_*(B(\infty), \mathbb{Z}_2)$ est isomorphe à $H_*(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_2)$; l'homologie des espaces de lacets itératifs $\Omega^k S^n$, $k < n$, a été déterminée par T. Kudo et S. Araki pour coefficients $\mathbb{Z}_2$ dans leur article " On $H_*(\Omega^N(S^n) ; \mathbb{Z}_2)$ ", Proc. Japan Acad. 32(1956), 333-335. Très récemment G. Segal a même déterminé $H_*(B(\infty), \mathbb{Z})$ (voir les remarques ajoutées aux épreuves).

5. Relations des groupes de tresses avec l'algèbre et la géométrie algébrique.

Arnol'd utilise les résultats sur la cohomologie des groupes pour traiter un problème classique : la construction de fonctions algébriques à partir de fonctions algébriques d'un plus petit nombre de variables.

Plus précisément soit f une fonction algébrique de n variables $x_1, \ldots, x_n$. On dira que f est une "composition" de fonctions algébriques d'un plus petit nombre de variables si f peut être construite de la manière suivante. On commence par substituer des fonctions polynomiales $p_i(x)$ des variables $x_1, \ldots, x_n$ aux indéterminées d'une fonction algébrique de k variables, $k < n$. On obtient ainsi une fonction algébrique des x_ν. Ayant construit des fonctions algébriques $\varphi_j(x)$, on peut former des fonctions polynomiales des φ_j et des x_ν et on peut substituer ces fonctions aux indéterminées d'une fonction algébrique de moins de n variables. Si en répétant ce processus un nombre fini de fois on atteint f, alors f est dite "composition" de fonctions algébriques d'un plus petit nombre de variables. Ici la composition des fonctions "multiformes" est définie de telle manière que les nombres de valeurs se multiplient.

Arnol'd [4], [5] prouve :

PROPOSITION 12.- Pour $n = 2^r$ la fonction algébrique f des $n-1$ variables $a_1, \dots, a_{n-1}$ définie par l'équation

$$z^n + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

n'est pas une composition de fonctions algébriques d'un plus petit nombre de variables.

<u>Esquisse de preuve</u>. (i) L'ensemble des points $a \in \mathbf{C}^{n-1}$ pour lesquels toutes les valeurs de la fonction f sont distinctes est exactement l'espace classifiant X de $B(n)$ qu'on a décrit ci-dessus. Utilisant le fait que le groupe de transformations du revêtement $Y \to X$ est le groupe symétrique, on se ramène facilement à prouver qu'il n'y a pas de polynômes q et p_i , $i = 1,\dots,k$, et de fonction algébrique φ de k variables, $k < n-1$, tels que

$$f(x) = q(\varphi(p(x)), x) .$$

(ii) Supposons que f soit de cette forme. Soit Z l'ensemble des points de $\mathbf{C}^k$ pour lesquels toutes les valeurs de φ sont distinctes. Les polynômes p_i définissent alors une application $p : X \to Z$, et le revêtement $Y \to X$ est obtenu à partir du revêtement de Z correspondant à φ par changement de base. Par conséquence, on a un diagramme commutatif d'homomorphismes :

$$\begin{tikzcd} H^*(BS(n), \mathbb{Z}_2) \arrow[rr, "\rho^*"] \arrow[dr] & & H^*(B(n), \mathbb{Z}_2) \\ & H^*(Z, \mathbb{Z}_2) \arrow[ur, "p^*"'] & \end{tikzcd}$$

où ρ^* est l'homomorphisme de cohomologie des espaces classifiants induit par l'homomorphisme évident $\rho : B(n) \to S(n)$. On peut déduire du théorème 11 que $\rho(w_{n-1}) \neq 0$ pour la classe de Stiefel-Whitney w_{n-1} , $n = 2^r$. Mais $H^i(Z, \mathbb{Z}_2) = 0$

pour $i > k$, parce que Z est une variété de Stein de dimension k . On a ainsi une contradiction.

Remarques.- On a vu que les classes de cohomologie des groupes de tresses définissent des classes caractéristiques pour les fonctions algébriques, qui sont des classes d'obstruction pour le problème considéré ci-dessus. Il ne faut pas confondre ce problème avec le problème classique qui consiste à simplifier la solution des équations algébriques au moyen d'une transformation de Tschirnhaus. Pendant que le problème de Arnol'd a une réponse négative, A. Wiman et plus récemment R. Brauer ont donnés des solutions positives pour le problème classique.

Une raison pour laquelle les groupes de tresses généralisés sont intéressants du point de vue de la géométrie algébrique est que leurs espaces classifiants X_W figurent d'une manière naturelle comme espaces de base de familles de variétés algébriques. Considérons, par exemple, l'application $\mathbb{C}^{k+1} \times \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-2}$ donnée par

$$(z_o,\ldots,z_k\,,\,t_1,\ldots,t_{n-2}) \longmapsto (\sum_{i=1}^{k} z_i^2 + z_o^n + t_1 z_o^{n-2} + \ldots + t_{n-2}\, z_o\,;\, t_1,\ldots,t_{n-2}) \,.$$

Cette fibration est lisse précisément au-dessus de l'espace classifiant $X_{S(n)}$. C'est pourquoi on obtient une opération du groupe fondamental $B(n)$ sur l'homologie de la fibre non-singulière. Dans ce cas là, la fibre F^k a le type d'homotopie d'un bouquet de $(n-1)$ sphères S^k . D'après une idée très intéressante de F. Pham, on peut déterminer la forme d'intersection de $H_k(F^k\,,\,\mathbb{Z})$ à une équivalence près utilisant la théorie classique de Picard-Lefschetz et les relations du groupe de tresses. Par cette méthode, on montre que pour k pair l'image de $B(n)$ dans le groupe des automorphismes de $H_k(F^k,\mathbb{Z})$ est $S(n)$. Le cas où k est impair a aussi été traité par Arnol'd [1] et Varchenko [20]. Varchenko affirme que l'image de $B(n)$ est $Sp(n-1, Z)$ pour n impair. Le germe à l'origine de l'application décrite ci-dessus est la déformation semi-universelle de la singularité donnée par l'équation $z_o^n + z_1^2 + \dots + z_k^2 = 0$. Généralisant ce fait, on peut prouver, [12], [6].

THÉORÈME 13.- Pour les groupes W de type A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 les espaces X_W sont le complément du discriminant de la déformation semi-universelle de la singularité rationnelle du type correspondant.

Les singularités rationnelles furent introduites par M. Artin [9] ; et le théorème 13 montre qu'il y a une relation étroite entre ces singularités et les tresses de E. Artin.

REMARQUES AJOUTÉES AUX ÉPREUVES

1) Quelques jours avant l'exposé oral, G. Segal m'a signalé qu'il avait démontré le théorème suivant : Soit $\Omega_o^2 S^2$ la composante connexe du lacet trivial de l'espace de lacets itéré $\Omega^2 S^2$. Soit $H_*(B(\infty),G)$ l'homologie stable des groupes de tresses à coefficients dans un groupe abélien G quelconque, où l'opération de $B(\infty)$ sur G est triviale.

THÉORÈME.- Il y a un isomorphisme

$$H_*(B(\infty),G) \cong H_*(\Omega_o^2 S^2 , G) .$$

Ce résultat a un analogue déjà connu pour le groupe symétrique stable $S(\infty)$ et pour $\Omega^\infty S^\infty$ (cf. M. Barrat - S. Priddy : On the homology of non-connected monoids and their associated groups, Comment. Math. Helv. 47 (1972), 1-14).

Le résultat de Segal permet de déterminer complètement l'homologie stable des groupes de tresses. Car la fibration de Hopf $S^3 \to S^2$ permet d'identifier $H_*(\Omega_o^2 S^2, G)$ avec $H_*(\Omega^2 S^3, G)$, et l'homologie de $\Omega^2 S^3$ est connue. L'algèbre de Hopf $H_*(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_2)$ est d'après Kudo et Araki une algèbre de polynômes avec coefficients $\mathbb{Z}_2$ engendrée par des éléments primitifs x_i de degré $2^i - 1$, où $i \geq 1$. L'opération de Bockstein β_2 est donnée par $\beta_2 x_i = x_{i-1}^2$. Quant à l'algèbre de Hopf $H_*(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_p)$ pour p impair, d'après les résultats de E. Dyer - R. K. Lashof (Homology of iterated loop spaces, Amer. J. Math. 84 (1962), 35-88, Theorem 5.2) c'est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes engendrée par des éléments z_i de degré $2p^i - 2$, où $i \geq 1$, et d'une algèbre extérieure engendrée par des éléments y_i de degré $2p^i - 1$, où $i \geq 0$. L'opération de Bockstein β_p est déterminée par $\beta_p(y_o) = 0$ et $\beta_p(y_i) = z_i$ pour $i \geq 1$. Enfin, la composante p-primaire du groupe d'homologie $H_q(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z})$ est isomorphe au noyau de $\beta_p : H_q(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_p) \to H_{q-1}(\Omega^2 S^3, \mathbb{Z}_p)$ pour $q > 1$, tandis que les deux premiers groupes d'homologie sont évidemment infinis cycliques.

2) Je signale que quelques problèmes posés dans l'exposé précédent ont été résolus. P. Deligne a prouvé que les espaces X_W sont des espaces d'Eilenberg Mc-Lane. Il a même démontré que pour un ensemble fini d'hyperplans complexes homogènes H_i, $i \in I$, d'un espace vectoriel complexe V, le complémentaire $V - \bigcup_{i \in I} H_i$ est un $K(\pi, 1)$, à condition que les H_i soient les complexifiés d'hyperplans réels H_i' d'un espace vectoriel réel V' tels que les composantes connexes de $V' - \bigcup H_i'$ soient des cônes simpliciaux : c'est le résultat principal d'un article sur " Les immeubles des groupes de tresses généralisés ", à paraître dans Inv. Math. 17 (1972).

Une étude des groupes de tresses généralisés utilisant les méthodes de Garside a été faite par K. Saito et moi-même : dans un article intitulé " Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen ", à paraître dans Inv. Math. 17, nous déterminons le centre de ces groupes, et nous donnons une solution du problème des mots et du problème de la conjugaison. Ces problèmes sont aussi résolus dans l'article de P. Deligne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. ARNOL'D - Remark on the Branching of Hyperelliptic Integrals as Functions of the Parameters, Functional Anal. Appl., 2 (1968), p. 187-189.

[2] V. I. ARNOL'D - The Cohomology Ring of the Colored Braid Group, Math. Notes of the Academy of Sci. of the USSR, 5 (1969), p. 138-140.

[3] V. I. ARNOL'D - O nektoryh topologičeskih invariantah algebraičeskih funkcii, (Sur quelques invariants topologiques de fonctions algébriques), Trudy Moskovskogo Matematičeskogo Obščestva. 21 (1970), p. 27-46.

[4] V. I. ARNOL'D - Topological Invariants of Algebraic Functions II, Functional Anal. Appl., 4 (1970), p. 91-98.

[5] V. I. ARNOL'D - Cohomology Classes of Algebraic Functions Invariant under Tschirnhausen Transformations, Functional Anal. Appl., 4 (1970), p. 74-75.

[6] V. I. ARNOL'D - O matricah, zavisjaščih ot parametrov, (Sur des matrices qui dépendent de paramètres), Uspehi matematičeskih nauk, 26 (1971), p. 101-114.

[7] E. ARTIN - Theorie der Zöpfe, Hamb. Abh., 4 (1925), p. 47-72.

[8] E. ARTIN - Theory of Braids, Annals of Math., 48 (1947), p. 101-126.

[9] M. ARTIN - Some Numerical Criteria for Contractibility of Curves on Algebraic surfaces, Amer. J. Math., 84 (1962), p. 485-496.

[10] N. BOURBAKI - Groupes et algèbres de Lie, chapitres 4, 5 et 6, Eléments de mathématique XXXIV, Hermann, Paris, 1968.

[11] E. BRIESKORN - Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe, Invent. Math., 12 (1971), p. 57-61.

[12] E. BRIESKORN - Singular Elements of Semisimple Algebraic Groups, Comptes Rendus du Congrès International des mathématiciens, Nice 1970.

[13] R. H. FOX, L. NEUWIRTH - The Braid Groups, Math. Scand., 10 (1962), p. 119-126.

[14] D. B. FUKS - Cohomologies of the Braid Groups mod. 2 , Functional Anal. Appl., 4 (1970), p. 143-151.

[15] F. A. GARSIDE - The Braid Group and other Groups, Quart. J. Math. Oxford, 2. Ser. 20 (1969), p. 235-254.

[16] N. IWAHORI - On the Structure of a Hecke Ring of a Chevalley Group over a Finite Field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 10 (1963/64), p. 215-236.

[17] LÊ DŨNG TRÁNG - Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Preprint, Centre de Mathématique de l'Ecole Polytechnique, Paris, 1971.

[18] L. SOLOMON - Invariants of Finite Reflection Groups, Nagoya Math. J., 22 (1963), p. 57-64.

[19] L. SOLOMON - The Orders of the Finite Chevalley Groups, J. Algebra, 3 (1966), p. 376-393.

[20] A. N. VARCHENKO - On the Bifurcation of Multiple Integrals Depending on a Parameter, Functional Anal. Appl., 3 (1969), p. 322-324.