

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

NICOLAAS H. KUIPER

Sur les variétés riemanniennes très pincées

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 410, p. 201-218

http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__201_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES TRÈS PINCÉES

par Nicolaas H. KUIPER

1. Introduction

En un point p d'une surface différentiable M^2 de l'espace euclidien E^3 , le produit des deux courbures principales est la courbure de Gauss :

$$\kappa = k_1 k_2 = (r_1 r_2)^{-1}$$

c'est un invariant qui ne dépend que de la métrique riemannienne de M . Une définition intrinsèque de κ est donnée par la formule suivante où Δ est un triangle à côtés géodésiques ("Théorème de Gauss-Bonnet")

$$(1) \quad \Delta \rightarrow \int_{\Delta} \kappa \, d\omega = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

$d\omega$ est l'élément de volume et α, β, γ sont les angles de Δ . Soit g la fonction : carré de la longueur d'un vecteur tangent de M . g définit alors la métrique riemannienne et il détermine la fonction κ . Quel que soit $c > 0$, on a la relation

$$(2) \quad \kappa(g, p) = \frac{1}{c^2} \kappa(c^2 g, p).$$

Considérons maintenant une variété différentiable C^∞ de dimension n munie d'une métrique riemannienne complète (M, g) . L'application exponentielle \exp_p de l'espace vectoriel tangent M_p de M en p , dans la variété M est définie ainsi : le point $\exp_p(v)$ est à la distance $\|v\| = \sqrt{g(v)}$ de p sur la demi-géodésique de source p , dans la direction de v .

Si l'ouvert $U \ni 0$ dans M_p est suffisamment petit, la restriction $\exp_p|_U$ est un difféomorphisme. Pour σ un 2-plan (sous-espace vectoriel de

dimension 2) de M_p , $\exp_p(\sigma \cap U)$ est une surface dont la courbure de Gauss au point p s'appelle la courbure (sectionnelle) $\kappa(\sigma)$ de σ . Les structures riemanniennes g et c^2g sur M donnent lieu aux mêmes géodésiques et on déduit de (2) que pour chaque 2-plan σ :

$$(2') \quad \kappa(g, \sigma) = \frac{1}{c^2} \kappa(c^2g, \sigma).$$

Nous nous intéressons aux variétés différentiables C^∞ , compactes M qui admettent une métrique riemannienne g , pour laquelle la courbure κ est "presque constante". On dit que la courbure $\kappa > 0$ (resp. < 0) de (M, g) est δ -pincée s'il existe $\delta > 0$ et $A > 0$ tels que

$$\delta A \leq \kappa(\sigma) \leq A \quad (\text{resp. } -A \leq \kappa(\sigma) \leq -\delta A)$$

pour tout 2-plan σ de M . (On dit aussi brièvement que (M, g) est δ -pincée.) D'après (2'), on peut supposer que $A = 1$. On a alors

$$(3) \quad \delta \leq \kappa \leq 1 \quad (\text{resp. } -1 \leq \kappa \leq -\delta).$$

Il est difficile de définir une notion utile de courbure presque constante pour la valeur constante 0.

Pour une surface compacte connexe à métrique riemannienne (M, g) , δ -pincée et à courbure positive (resp. négative), la caractéristique d'Euler-Poincaré est

$$\chi(M^2) = \int_M \frac{\kappa |d\omega|}{2\pi} > 0 \quad (\text{resp. } < 0).$$

On sait que M admet alors une métrique g' à courbure constante $\kappa = 1$ (resp. -1). Pour les variétés de dimension $n > 2$ la situation est plus compliquée. Il existe des variétés (M, g) $\frac{1}{4}$ -pincées de dimensions paires $2m \geq 4$, telles que M n'admette pas de métrique g' à courbure constante. Pour $\kappa > 0$ d'après le beau théorème de M. Berger [2], les seuls exemples

sont les espaces projectifs complexes et quaternionniens ainsi que le plan des octaves, avec leur métrique symétrique. Eberlein [4] a montré que certains quotients compacts de la boule unitaire ouverte $\mathbb{B}^{2m} \subset \mathbb{C}^m$ ($2m \geq 4$) sont des variétés $\frac{1}{4}$ -pincées à courbure négative qui n'admettent pas de structure riemannienne à courbure constante. On ne sait rien pour $\delta > \frac{1}{4}$ et $\kappa < 0$. Dans la suite nous ne considérons que les variétés à courbure positive.

2. Rappel des résultats classiques de Rauch, Klingenberg et Berger

M. Rauch [10] fut le premier à poser le problème des variétés δ -pincées (toujours $\kappa > 0$). Dans la suite (M^n, g) est une variété riemannienne complète, connexe, simplement connexe (sauf mention explicite). Rauch a prouvé en 1951 :

THÉORÈME.- L'assertion $\delta \leq \kappa \leq 1 \Rightarrow M^n$ est homéomorphe à S^n est vraie pour $\delta > 0,74$.

Ce n'est que dans la période de 1958 à 1961 que Klingenberg et Berger purent améliorer la constante, toujours en préservant la même conclusion.

Le tableau historique des résultats partiels est comme suit :

$\delta > 0,74$	suffit	Rauch	1951
$\delta > 0,54$	suffit	Klingenberg [8]	1959
$\delta > \frac{1}{4}$	suffit pour n pair	Berger [2]	1960
	suffit pour n impair	Klingenberg [9]	1961

En vue des contre-exemples, on ne peut pas améliorer ce résultat final :

THÉORÈME 1.- $\frac{1}{4} < \kappa \leq 1 \Rightarrow M^n$ est homéomorphe à S^n .

3. Résultats récents tenant compte des structures différentiables

D. Gromoll ([6], 1966) a démontré que pour $\delta_n < 1$ suffisamment grand, les variétés (M^n, g) δ -pincées sont difféomorphes à S^n . Les constantes δ^n de [6] tendent vers 1 pour $n \rightarrow \infty$. Shikata [13] 1967 a obtenu également avec d'autres méthodes un tel résultat. On a amélioré ce théorème comme suit :

THÉORÈME 2.- $\delta \leq \kappa \leq 1 \Rightarrow M^n$ est difféomorphe à S^n , pour

$\delta \geq 0,87$ Sugimoto, Shiohama, Karcher, juin 1971 [14] ;

$\delta \geq 0,85$ idem, novembre 1971 ;

$\delta \geq 0,80$ Ruh, février 1972.

Les méthodes utilisées sont plus intéressantes que les constantes exactes obtenues.

Problème ouvert. Rappelons qu'on ne sait toujours pas s'il existe une sphère exotique M^n (non difféomorphe à S^n) qui admette une métrique riemannienne à courbure $\kappa > 0$.

4. Quelques éléments de démonstration

a. Théorème de comparaison d'Alexandrov ($n = 2$) et Toponogov [15] ($n \geq 2$).
(Pour la démonstration, on peut voir [5].)

Soient (M, g) à courbure κ , $\delta \leq \kappa \leq 1$, S_δ la 2-sphère de courbure δ . On considère des triangles à côtés géodésiques (voir figure 1) sur les espaces M et S_δ . $a, b, c, a_\delta, \alpha, \alpha_\delta$ désignent des mesures de côtés et d'angles (on a $a + b + c < 2\pi / \sqrt{\delta}$).

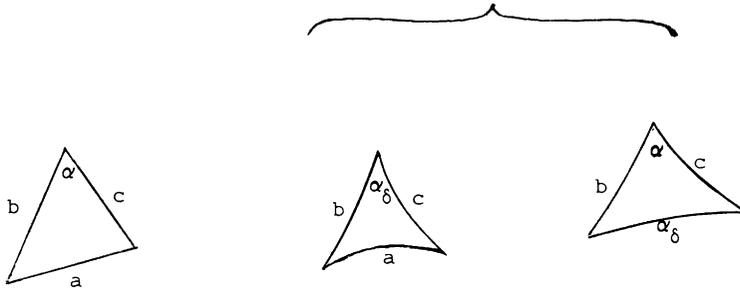
Sur M Sur S_δ 

Figure 1

Alors

(4)

$$\alpha \geq \alpha_\delta$$

et (5)

$$a \leq a_\delta$$

b. Théorème d'injectivité. Nous supposons que (M, g) est comme toujours complet simplement connexe, que $\kappa \leq 1$ et que si la dimension est impaire, on a de plus $\frac{1}{4} < \kappa$. Soit $p \in M$. Alors la restriction de \exp_p à la boule ouverte

$$\overset{\circ}{B}_p(\pi) = \{u \in M_p : g(u) < \pi^2\}$$

de rayon π , est un plongement différentiable (ouvert) dans M . De plus, l'image contient tous les points u à distance $d(p, u) < \pi$ de p dans M

$$(6) \quad \exp_p \overset{\circ}{B}_p(\pi) = \{u \in M : d(p, u) < \pi\}.$$

Sous cette forme générale, le théorème est dû à Klingenberg [9].

Dans la démonstration de ces théorèmes, un rôle essentiel est joué par un lemme de comparaison de champs de Jacobi dû à Rauch [10]. Avec ces résultats, il est facile d'obtenir un théorème à la Rauch. Supposons $\delta > \frac{4}{9}$. Alors S_δ^2

est une sphère de rayon $\delta^{-\frac{1}{2}} < \frac{3}{2}$ et de diamètre intrinsèque $\pi \delta^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(\pi - \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$. Pour deux points u_1 et u_2 dans M à distance $d(u_1, p) = d(u_2, p) = \pi - \varepsilon$ de p , comparons le triangle (u_1, u_2, p) dans M avec un triangle S_δ^n dont deux côtés ont la longueur $\pi - \varepsilon$. On trouve d'après a) :

$$\underbrace{\quad}_{\text{sur } M} \quad \underbrace{\quad}_{\text{sur } S_\delta^n}$$

$$a = d(u_1, u_2) \leq a_\delta \leq 2 \cdot \pi \delta^{-\frac{1}{2}} - 2(\pi - \varepsilon) = \pi - \varepsilon .$$

Pour u_1 fixé, $d(u_1, u_2) \leq \pi - \varepsilon$ est vraie pour tout u_2 à distance $\pi - \varepsilon$ de p . Alors le bord de la boule $\exp_p B(\pi - \varepsilon)$ est contenu dans la boule $\exp_{u_1} \overset{\circ}{B}(\pi - \varepsilon)$. La deuxième boule ouverte ne contient pas p . Par conséquent, la réunion des deux boules est une n -variété différentiable, compacte, M' , contenu dans M , et alors M' est égal à M ; M' est couvert par deux boules ouvertes. D'après le théorème de Morton Brown [3] $M' = M$ est donc homéomorphe à S^n . C'est le théorème désiré.

Pour obtenir le théorème de Berger-Klingenberg, on suppose que $\frac{1}{4} < \delta \leq \kappa \leq 1$. On prend deux points p, q dans M , pour lesquels la distance $d(p, q)$ est maximale. Le diamètre (intrinsèque) de S_δ est

$$\pi \delta^{-\frac{1}{2}} = 2(\pi - \varepsilon) < 2\pi ,$$

par définition de ε . Alors, de même, M est couvert par les boules plongées $\exp_p \overset{\circ}{B}(\pi - \varepsilon)$ et $\exp_q \overset{\circ}{B}(\pi - \varepsilon)$ d'où le théorème.

5. Sur la théorie de Sugimoto, Shiohama et Karcher [14] $\delta > 0,85$

Soit $\frac{1}{4} < \delta \leq \kappa \leq 1$. On choisit, comme dans le paragraphe 4, p et q à distance maximale et on définit :

$$\text{l'équateur } M^0 = \{u \in M : d(p,u) = d(q,u)\} ;$$

$$\text{la boule nord } M^+ = \{u \in M : d(p,u) \leq d(q,u)\} ;$$

$$\text{la boule sud } M^- = \{u \in M : d(p,u) \geq d(q,u)\} .$$

On définit de manière analogue pour la n -sphère S à courbure constante égale à 1, par rapport à deux points diamétralement opposés P et Q : l'équateur S^0 ; la boule nord S^+ , et la boule sud S^- . On peut affirmer que M^+ et M^- sont vraiment des boules à bord différentiables.

On va définir comme suit un homéomorphisme :

$$h : M \rightarrow S .$$

Pour M^+ , h est le difféomorphisme (voir figure 2) :

$$h(u) = \exp_p \tau^+ \lambda^+ \exp_p^{-1}(u) , \quad u \in M^+ .$$

λ^+ désigne un difféomorphisme de $\exp_p^{-1}(M^+)$ sur la boule $B_p(\pi/2)$ dans l'espace tangent M_p , qui préserve les demi-droites dans M_p de source $0 \in M_p$ et λ^+ est l'identité près de p .

τ^+ est une isométrie entre les espaces tangents de M à p et de S à P .

Sur M^- , on définit h (déjà connu sur M^0)

$$h(u) = \exp_Q f_* \tau^- \lambda^- \exp_Q^{-1}(u) , \quad u \in M^- .$$

λ^- et τ^- sont analogues à λ^+ et τ^+ . f_* est un homéomorphisme sur lui-même de la boule $B_Q(\pi/2)$ dans l'espace tangent de S à Q . Ce sera le cône sur un difféomorphisme f de la sphère unitaire S^{n-1} dans cet espace tangent. f est uniquement défini dès que τ^+ et τ^- sont donnés. L'homéomorphisme h est un difféomorphisme en dehors de $M^0 \cup q$. Pour qu'il

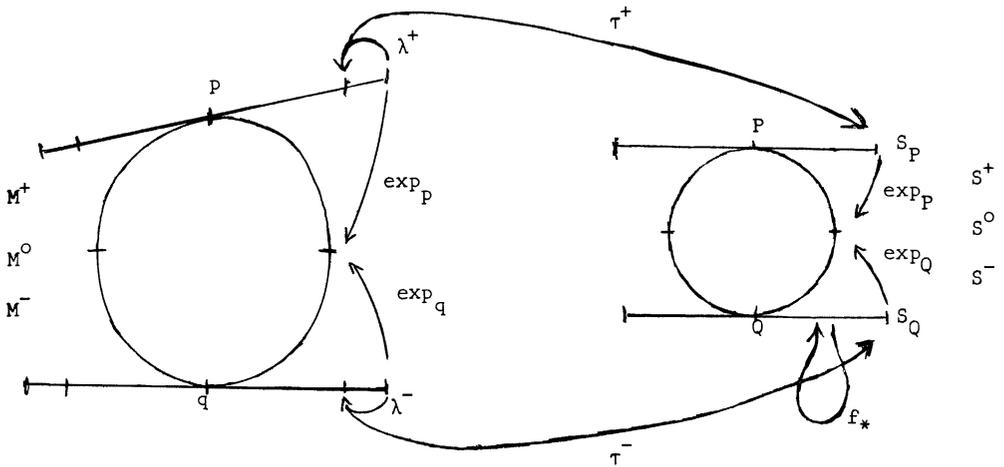


Figure 2

devienne un difféomorphisme en les points de M^0 , il suffit de changer h dans un double collier de M^0 mince.

Le problème est ainsi réduit à trouver un difféomorphisme de la boule B .

$$F : B \rightarrow B$$

qui prolonge $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} = \partial B$. Pour que F existe, il suffit que f soit difféotope à l'identité. f s'identifie à la correspondance entre directions en q et directions en p , donnée par la relation : "pointer vers le même point de M^0 ".

Les auteurs étudient ensuite l'application f . On essaie de définir une homotopie f_t entre l'identité f_0 et $f = f_1$, pour lequel le point u se déplace dans la direction de $f(u)$:

$$F(t,u) = f_t(u) = \exp_u^{-1} f(u) \exp_u t$$

Pour l'existence de F , il faut que (d est la distance dans S^{n-1})

$$(8) \quad d(u, f(u)) < \pi.$$

Ruh avait déjà montré que si $L = (\sqrt{\delta} \sin(\pi/2\sqrt{\delta}))^{-1}$, alors :

$$\sup_{|v|=1} |df_u(v)| = \|df_u\| \leq L \quad \text{et} \quad \|df_u^{-1}\| \leq L.$$

En utilisant [1], les auteurs trouvent que (8) est satisfait pour

$$\delta > 0,65.$$

F défini, on examine s'il peut être une difféotopie.

Soit $\phi(u, v)$ l'angle dans l'espace $E^n \supset S^{n-1}$ entre les directions des vecteurs v tangent au point $u \in S^{n-1}$ et $(df)(v)$ au point $f(u)$. Si, pour tout u, v , les angles $\beta = d(u, f(u))$ et $\phi = \phi(u, v)$ sont petits, il est géométriquement plausible que les f_t (df_t de rang maximal) sont des difféomorphismes pour $0 \leq t \leq 1$, et F est alors la difféotopie désirée.

Dans une analyse élaborée, les auteurs prouvent que tel est déjà le cas si

$$\beta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ce qui est vrai pour} \quad \delta > 0,76,$$

$$\text{et} \quad \phi \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{ce qui est vrai pour} \quad \delta > 0,90.$$

Mieux, on montre que c'est le cas si :

$$\cos \phi > \begin{cases} (\sin \beta / \beta)^{\frac{1}{2}} \cos \beta & \text{pour } \beta \leq \pi/2 \\ \cos \beta & \text{pour } \beta \geq \pi/2 \end{cases}$$

ce qui est satisfait pour $\delta > 0,85$.

6. Sur la théorie de Ruh

6.a. L'idée fondamentale. La nouvelle idée de Ruh, qu'il a déjà utilisée dans [11], est d'imiter l'application de Gauss f , qui à chaque point u de la sphère unitaire $M = S^n = \{z \in E^{n+1} : |z| = 1\}$ dans l'espace euclidien E^{n+1} associe le vecteur unitaire normal en u pointé vers l'extérieur. f est l'identité donc un difféomorphisme. On peut rendre intrinsèque cette construction, comme suit :

Soient $\tau(M)$ le fibré tangent de $M = S^n$ et $\nu(M)$ le fibré trivial de fibre \mathbb{R} de section marquée e . $\eta(M) = \tau(M) \oplus \nu(M)$ est alors un \mathbb{R}^{n+1} -fibré (trivial) sur $M = S^n$. Notons E_u sa fibre au point u . Elle contient de manière naturelle l'espace tangent M_u . Notons ∇ la connexion de Levi-Civita sur $\tau(M)$. Pour un constant $c > 0$, on définit une connexion ∇' sur le fibré $\eta(M)$ par

$$(9) \quad \begin{cases} \nabla'_X Y = \nabla_X Y - c\langle X, Y \rangle e, & Y \in \tau(M) \\ \nabla'_X e = cX. \end{cases}$$

Pour $c = 1$, c' est le parallélisme absolu (= intégrable), induit par le transport parallèle dans E^{n+1} .

L'application de Gauss $u \mapsto f(u) \in M_p$ se réalise par le transport ∇' -parallèle du vecteur $e = e_u$ du point $u \in M$ vers un point fixe $p \in M$.

6.b. Les champs de $(n+1)$ -repères W^+ et W^- et les applications f^+ , f^- , f .

Dans le cas d'une variété pincée (M, g) avec $\frac{1}{4} < \delta \leq \kappa \leq 1$, on définit p, q, M^0, M^+, M^- comme dans le paragraphe 5. On introduit $\eta(M) = \tau(M) \oplus \nu(M)$ et le champ e . La connexion ∇' sera donnée par la for-

mule (9) avec

$$(10) \quad c^2 = \frac{1}{2}(1 + \delta) \leq 1 .$$

On définit une structure euclidienne dans la fibre E_u , qui induit dans $M_u \subset E_u$ la structure donnée g , et tel que $e \in E_u$ soit unitaire et orthogonale à M_u , pour tout $u \in M$.

Dans une $n+1$ -base de E_u formée de e et des vecteurs d'une base orthonormée de $M_u \subset E_u$, l'élément de l'algèbre de Lie dans (9) est représenté par une matrice antisymétrique

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & & & -c \\ & & & -c \\ & & & \cdot \\ & & & -c \\ \hline c & c & \dots & c \\ \hline & & & 0 \end{array} \right)$$

Par conséquent le transport parallèle ∇' préserve les structures euclidiennes des fibres de $\eta(M)$. Choisissons dans E_p un $n+1$ -repère W_p^+ orthonormal. Soit W^+ le champ des $n+1$ -repères orthonormaux sur M^+ , obtenu par transport ∇' -parallèle de W_p^+ suivant les demi-géodésiques de (M^+, g) de source p . Soient C une géodésique minimale de p à q et W_q^- le repère déduit de W_p^+ par transport ∇' -parallèle le long de C . Soit W^- le champ de $n+1$ -repères sur M^- , déduit de W_q^- par transport ∇' -parallèle suivant les demi-géodésiques de (M^-, g) de source q . En général, les champs W^+ et W^- ne coïncident pas sur l'équateur M^0 . Soit $\langle e_u, W_u^+ \rangle \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées du vecteur e_u en $u \in M^+$ dans la base W_u^+ . Soit $f^+(u) \in E_p$ déduit de $e_u \in E_u$ par transport parallèle le long des demi-géodésiques de source p . Dans la base W_p^+ , $f^+(u)$ a encore pour coordonnées $\langle e_u, W_u^+ \rangle$. On définit de même $\langle e_u, W_u^- \rangle \in \mathbb{R}^n$ et $f^-(u) \in E_p$

pour $u \in \mathbf{M}^-$ (le transport parallèle se fait le long des demi-géodésiques de source q prolongées par C^{-1}).

En général, $f^+|_{\mathbf{M}^0}$ et $f^-|_{\mathbf{M}^0}$ ne coïncident pas. On va les rendre égaux comme suit.

Lemme 1.- (Voir § 6.c) Si $\delta > 0,62$, alors

$$(11) \quad f^+(x) + f^-(x) \neq 0 \quad \text{pour } x \in \mathbf{M}^0$$

Soit $\delta > 0,62$. Alors

$$f(x) = \frac{f^+(x) + f^-(x)}{\|f^+(x) + f^-(x)\|} \in \mathbf{M}_P$$

est un vecteur unitaire bien défini. Dans le plan des vecteurs $f^+(x)$ et $f^-(x)$, on considère la rotation d'angle φ , $0 \leq \varphi < \pi$, qui applique $f^+(x)$ sur $f^-(x)$. Soit $\exp 2t B$ la transformation orthogonale qui laisse invariant chaque vecteur orthogonal à ce plan et qui induit une rotation d'angle $t\varphi$ dans ce plan. Soit

$$b = \exp 2B, \quad \text{alors } b f^+(x) = f^-(x) ;$$

B est un élément de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal.

Introduisons les "coordonnées polaires" $(t, x) \in [0, 1] \times \mathbf{M}^0$ de $u \in (\mathbf{M}^+)$ (resp. \mathbf{M}^-) par les formules

$$u = \exp_p t \exp_p^{-1}(x)$$

$$\text{(resp. } u = \exp_q t \exp_q^{-1}(x) \text{)}.$$

On prolonge f sur \mathbf{M}^+ (resp. \mathbf{M}^-) en posant

$$f(u) = f((t, x)) = \begin{cases} \exp t B \cdot f^+(u) & u \in \mathbf{M}^+ \\ \exp(-tB) f^-(u) & u \in \mathbf{M}^- \end{cases}$$

Pour $t = 1$, on a bien

$$f(1, x) = \exp B \cdot f^+(x) = \exp(-B) \cdot f^-(x) .$$

Lemme 2.- (Voir § 6.d) Pour $\delta > 0,80$, les restrictions $f|_{M^+}$ et $f|_{M^-}$ sont
des immersions dans $S = S^n$ de même orientation.

Le théorème 2 de Ruh est une conséquence des lemmes 1 et 2 comme suit.

Soit $\delta > 0,80$; f est bien défini et $f|_{M^+}$ et $f|_{M^-}$ sont des immersions de mêmes orientations. On peut modifier f dans un double collier autour de M^0 de telle sorte que la nouvelle application f' soit une immersion différentiable $f' : M \rightarrow S$. Alors f' est un revêtement et par conséquent un difféomorphisme.

6.c. Sur la démonstration de $|a_x| < \pi$, lemme 1.

Soit $a = a_x$ la matrice orthogonale donnée par la formule

$$W_x^+ = a_x W_x^- \quad x \in M^0 .$$

Alors, la condition (11) s'exprime par :

$$(11') \quad ae \neq -e$$

ou par : $\text{angle}(e, ae) < \pi$.

Il suffit que

$$(12) \quad |a| \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{V \in \mathbb{R}^n} \text{angle}(V, aV) < \pi .$$

Définition des fonctions $R()$

Soit (ξ, x) un lacet ξ de source x dans une variété M , base d'un fibré $\eta(M)$ à fibres euclidiennes, muni d'une connexion ∇ qui préserve la structure euclidienne des fibres. Le transport ∇ -parallèle le long de (ξ, x) nous donne une transformation orthogonale notée $R(\xi, x)$ de la fibre E_x de $\eta(M)$. Sa norme (voir (12))

$$|R(\xi, x)| = \sup_V \text{angle}(V, R(\xi, x)(V)) \geq 0$$

est indépendante de $x \in \xi$.

Pour la connexion riemannienne d'une surface et ξ le bord d'un disque D :

$$|R(\xi, x)| = \left| \int \kappa \, d\omega \right| .$$

Plus généralement, la limite

$$R(\sigma) = \lim_{D \rightarrow x} R(\xi, x)/dA$$

(pour D un 2-disque orienté de bord ξ et d'aire dA plongé dans une surface différentiable $V^2 \ni x$ de M) est un élément de l'algèbre de Lie du groupe orthogonal. Il ne dépend que du 2-plan orienté σ tangent à V^2 en x . Pour la connexion d'une métrique riemannienne (M, g) , $R : \sigma \rightarrow R(\sigma)$ définit le tenseur de courbure. Pour le composé $(\xi, x) = (\xi_1, x) + (\xi_2, x)$ de deux lacets :

$$R(\xi, x) = R(\xi_2, x) \circ R(\xi_1, x) ,$$

d'où $|R(\xi, x)| \leq |R(\xi_1, x)| + |R(\xi_2, x)|$.

On en déduit l'inégalité intégrale pour le bord ξ d'un 2-disque différentiable orienté D , d'élément d'aire dA :

$$(13) \quad |R(\xi, x)| \leq \int_D |R(\sigma)| \, dA \leq \sup_{\sigma} |R(\sigma)| \int_D dA$$

(σ varie dans l'ensemble des 2-plans tangents de D).

Notons $R'(\xi, x)$, $R'(\sigma)$ (resp. $R(\xi, x)$, $R(\sigma)$) les fonctions $R(\)$ pour la connexion ∇' (resp. ∇) du lemme 2. Soit (ξ, x) le lacet de source $x \in M^0$, qui est le composé des géodésiques (figure 3) :

$\{u = (t, x) \in M^+ : 1 \geq t \geq 0\}$ de x à p ; la géodésique fixe C de p à q ;
et $\{u = (t, x) \in M^- : 0 \leq t \leq 1\}$ de q à x .

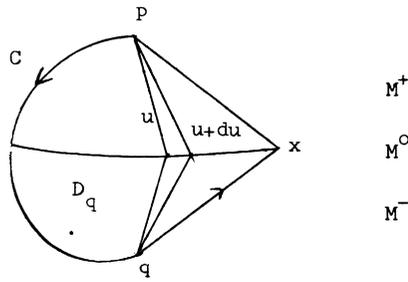


Figure 3

Soit $\alpha \subset M_p$ ($|\alpha| \leq \pi$) le plus petit des deux secteurs angulaires limités par les tangentes à C et à la géodésique de p à x . ξ est le bord de l'union $D = D_p \cup D_q$ des deux 2-disques (cônes) suivants :

$$D_p = \exp_p(\alpha \cap \exp_p^{-1} M^+)$$

et $D_q = \{ \exp_q t \exp_q^{-1} (D_p \cap M^0) : 0 \leq t \leq 1 \}$.

Posons

$$(14) \quad a_x = R'(\xi, x) .$$

Alors :

$$(15) \quad |a_x| = |R'(\xi, x)| \leq \int_D |R'(\sigma)| dA .$$

La définition (9) de V' entraîne que $R'(\sigma)$ est obtenu de $R''(\sigma)$ par le plongement naturel $\underline{so}(n) \hookrightarrow \underline{so}(n+1)$ ($R''(\sigma) = R(\sigma) - \frac{1}{2}(1 + \delta)R_0(\sigma)$,

$R_0(\sigma)$ est la valeur de R pour la n -sphère de rayon 1),

d'où $|R'(\sigma)| = |R''(\sigma)|$.

Comme (M, g) est δ -pincée, d'après Karcher [7] : $|R''(\sigma)| \leq \frac{2}{3}(1 - \delta)$.

Donc $|a_x| \leq \int_D |R'(\sigma)| dA \leq \frac{2}{3}(1 - \delta)$ (aire D_p + aire D_q). En appliquant § 4.a, (Toponogov) à des triangles $(p, u, u + du)$ et $(q, u, u + du)$ à côtés géodésiques [u et $u + du = \exp_u(du)$ dans $D_p \cap M^0$], on obtient

$$(16) \quad |a_x| \leq \frac{2}{3}(1 - \delta) \left[\frac{\pi}{\delta} + \frac{\pi}{\delta} L \right] \quad (L : \text{voir § 5}).$$

Pour $\delta \geq 0,62$, $|a_x| \leq 0,98\pi < \pi$; c'est le lemme 1.

Pour $\delta \geq 0,75$, $|a_x| \leq 0,485\pi < \frac{1}{2}\pi$.

6.d. Sur la démonstration du lemme 2.

Il suffit de démontrer que la dérivée de $f|_{M^+}$ est de rang maximal en $u = (t, x) \in M^+$ (et de même pour $f|_{M^-}$). On a

$$f = \exp tB \cdot f^+(u) = \exp tB \langle e, W^+ \rangle .$$

Le deuxième terme de

$$df = (d \exp tB) \cdot f^+(u) + \exp tB \cdot \langle \nabla' e, W^+ \rangle + \exp tB \cdot \langle e, \nabla' W^+ \rangle$$

est le composé de $\exp tB \in SO(n+1)$ et de $\langle \nabla' e, W^+ \rangle$ et d'après (9) est une similitude de dilatation $c = \sqrt{(1+\delta)/2}$: pour $du \in M_u^+$, on a

$$du \mapsto \langle c du, W^+ \rangle .$$

Pour $\delta \geq 0,80$, l'image est de longueur

$$(17) \quad c|du| \geq 0,95|du| .$$

Ce terme est bien de rang maximal. E. Ruh montre que les autres termes sont trop petits pour détruire cette propriété.

Par un calcul qui n'utilise que les méthodes du § 6.c, on obtient que la norme du dernier terme de df est

$$(18) \quad \|\langle e, \nabla' W^+ \rangle\| \leq 0,10 .$$

Majorer le premier terme est plus difficile et la démonstration n'a pas encore été rédigée (30 janvier 1972). D'après Ruh, la projection du premier terme (appliquée à du) sur le deuxième est de longueur $< 0,80|du|$. Le lemme en résulte, d'après (17) et (18).

Remarque.- Le fait que la démonstration précédente fournisse une constante δ indépendante de n , est lié au fait que B est toujours essentiellement bidimensionnel.

RÉFÉRENCES

- [1] M. BERGER - An extension of Rauch's metric comparison theorem and some applications, Illinois J. Math. 6, (1962), p. 700-712.
- [2] M. BERGER - Les variétés riemanniennes $\frac{1}{4}$ -pincées, Ann. Scuola Normale Superiore, Pisa (3), Vol. 14 (1960), p. 161-170.
- [3] M. BROWN - A proof of the generalized Schoenflies theorem, Bull. A.M.S., 66 (1960), p. 74-76. [Voir aussi Sém. Bourbaki, exposé 205, vol. 1960/61, W. A. Benjamin, N.Y.]
- [4] P. E. EBERLEIN - Manifolds admitting no metric of constant negative curvature, Journal of Diff. Geom., 5 (1971), p. 59-60.
- [5] D. GROMOLL, W. KLINGENBERG und W. MEYER - Riemannsche Geometrie im Grossen, Lecture Notes in Maths. n° 55 (1968), Springer.
- [6] D. GROMOLL - Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären, Math. Ann., 164 (1966), p. 353-371.
- [7] H. KARCHER - Pinching implies strong pinching, Comment. Math. Helv., 46, p. 124-126.
- [8] W. KLINGENBERG - Über kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., 137 (1959), p. 351-361.
- [9] W. KLINGENBERG - Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung, Comment. Math. Helv., 34 (1961), p. 35-54.
- [10] M. RAUCH - A contribution to differential geometry in the large, Ann. of Math., 54 (1951), p. 38-55.
- [11] E. RUH - Curvature and differentiable structures on spheres, Comment. Math. Helv., 46 (1971), p. 127-136.
- [12] E. RUH - (à paraître).

- [13] Y. SHIKATA - On the differentiable pinching problem, Osaka Math. J., 4 (1967), p. 279-287.
- [14] M. SUGIMOTO, K. SHIOHAMA, H. KARCHER - On the differentiable pinching problem, Math. Ann., (à paraître).
- [15] V. A. TOPONOGOV - Riemannian spaces having their curvature bounded, A.M.S. Transl., 37 (1964), p. 291-336.