Pierre Cartier

Géométrie et analyse sur les arbres

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. nº 407, p. 123-140
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__123_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année , 1971/72, n° 407

GÉOMÉTRIE ET ANALYSE SUR LES ARBRES

par Pierre CARTIER

Bruhat et Tits [1] ont montré récemment comment associer des objets combinatoires ("immeubles") aux groupes algébriques semisimples sur un corps local K . L'immeuble associé à un groupe p-adique joue le même rôle que l'espace riemannien symétrique associé à un groupe réel . Il est donc naturel de chercher à étendre aux immeubles les méthodes qui ont fait leur preuve pour les espaces riemanniens symétriques : horocycles , compactification , fonctions harmoniques , fonctions sphériques ,etc... Ce programme n'a reçu un commencement de réalisation que dans le cas de rang 1 , où les immeubles sont des arbres homogènes . Serre [6] a pu ainsi unifier et généraliser des résultats de Nagao , Ihara , etc... sur les sous-groupes de $SL_2(K)$; Tits [8] a étudié les groupes d'automorphismes des arbres , et nous avons nous-même fait la théorie des fonctions harmoniques et des fonctions sphériques [2,3]. Nous nous proposons d'esquisser ici ces développements .

1. Compactification d'un arbre (Serre [6] , Cartier [2]) .

Soit X un arbre , d'ensemble de sommets S et d'ensemble d'arêtes A ; on suppose que X est infini (l'ensemble S est infini) et localement fini (un sommet n'appartient qu'à un nombre fini d'arêtes) . On dit que deux sommets s et t sont liés s'il existe une arête joignant s à t (c'est-à-dire si $\{s,t\}$ appartient à A) .

L'espace riemannien associé à $SL_2(\mathbb{R})$ peut se réaliser comme le disque-unité ouvert dans $\mathbb{R}^2$, défini par l'inégalité $x^2 + y^2 < 1$, avec la métrique riemannienne $\dfrac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$. La compactification naturelle est le disque-unité fermé , défini par l'inégalité $x^2 + y^2 \leq 1$, et la frontière est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Or les points de ce cercle sont en correspondance bijective avec les rayons , qui ne sont autres que les demi-géodésiques issues du centre.

Pour définir la compactification de X , choisissons donc un sommet o ; l'analogue des géodésiques est constitué par les chaînes infinies d'origine o : suites infinies $[s_o, s_1, \ldots, s_n, \ldots]$ de sommets deux à deux distincts , telles que $s_o = o$ et que s_n soit lié à s_{n+1} pour tout $n \geq 0$. Comme il est d'usage , la distance $d(s,t)$ du sommet s au sommet t est la borne inférieure des longueurs des chemins joignant s à t . Pour tout $n \geq 0$, notons alors S_n l'ensemble des sommets s tels que $d(o,s) = n$; pour $n \geq 1$ et $s \in S_n$, il existe un unique sommet $\pi_n(s)$ dans S_{n-1} qui soit lié à s . Les chaînes infinies d'origine o sont alors les éléments de la limite projective du système

$$S_o \xleftarrow{\pi_1} S_1 \xleftarrow{\pi_2} S_2 \longleftarrow \cdots\cdots \longleftarrow S_n \xleftarrow{\pi_{n+1}} S_{n+1} \longleftarrow \cdots$$

Cette limite projective est un espace compact Σ_o qui se prête parfaitement au rôle de frontière de l'arbre . Cependant , pour les applications éventuelles à la théorie des groupes p-adiques , il est maladroit de fixer un sommet de référence o . Pour éliminer o , on introduit une relation d'équivalence entre chaînes infinies d'origine variable : deux telles chaînes définissent le même bout si et seulement si elles ne diffèrent que par un nombre fini de sommets . Si s est un sommet et b un bout , il existe une unique chaîne infinie d'origine s dans la classe d'équivalence définissant le bout b ; on l'appelle la chaîne joignant s à b . On note B l'ensemble des bouts et $\hat{S}$ l'ensemble somme de S et B . On peut alors munir $\hat{S}$ d'une topologie d'espace compact avec les propriétés suivantes :

a) Muni de la topologie discrète , S est un sous-espace ouvert dense de $\hat{S}$.

b) Le sous-espace B de $\hat{S}$ est compact , et l'application qui associe à tout bout b la chaîne joignant o à b est un homéomorphisme de B sur Σ_o .

c) Soit b un bout ; pour tout entier $n \geq 0$, soit V_n l'ensemble des sommets s tels que la chaîne joignant s à b ait ses sommets à la distance $\geq n$ de o , et des bouts b' tels que les chaînes joignant respectivement o à b et à b' aient au moins n sommets en commun; alors $(V_n)_{n \geq 0}$ est une base de voisinages ouverts de b dans $\hat{S}$.

Classiquement , les horocycles associés à un point b du cercle-unité sont les courbes orthogonales du réseau des géodésiques d'extrémité b ; ces horocycles jouent le rôle de cercles de centre b et de rayon infini . Dans le cas d'un arbre , on montre ceci : si s et s' sont deux sommets et si le sommet t s'éloigne indéfiniment sur une chaîne infinie de bout b , la différence $d(s,t) - d(s',t)$ finit par garder une valeur constante $\delta_b(s,s')$. Si s ,s' et s" sont des sommets , on a évidemment $\delta_b(s,s") = \delta_b(s,s') + \delta_b(s',s")$; il existe alors une partition de S en ensembles H_n tels que l'on ait $\delta_b(s,s') = m - n$ pour s dans H_m et s' dans H_n . A une translation près sur l'indice n , cette partition est unique ; ses éléments sont les horocycles associés à b .

2. Structure du groupe des automorphismes d'un arbre (Tits [8]) .

Soit g un automorphisme d'un arbre X . On démontre élémentairement que l'on a les trois possibilités exclusives suivantes :

a) il existe un sommet s tel que $g(s) = s$;

b) il existe deux sommets liés s et t tels que $g(s) = t$ et $g(t) = s$;

c) il existe une suite $(s_n)_{-\infty < n < +\infty}$ de sommets distincts telle que s_n soit lié à s_{n+1} pour tout n , et un entier i tel que $g(s_n) = s_{n+i}$ pour tout n .

Dans les cas a) et b) , toutes les orbites de g sont finies ; elles sont toutes infinies dans le cas c) .

Soit G un groupe d'automorphismes de X ; on suppose qu'il n'existe dans G aucun élément du type c) . Alors G laisse invariant un sommet , ou une arête , ou bien il existe un bout b tel que tout horocycle associé à b soit invariant par G .

Soit Aut(X) le groupe de tous les automorphismes de X . Pour toute partie F de S , notons $\mathrm{Aut}_F(X)$ le groupe des automorphismes g de X tels que $g(s) = s$ pour tout s dans F. On peut alors munir $\mathrm{Aut}(X)$ d'une topologie de groupe localement compact totalement discontinu dans laquelle les sous-groupes $\mathrm{Aut}_F(X)$ pour F fini forment une base de voisinages de l'unité. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$; pour que G soit relativement compact, il faut et il suffit que toutes ses orbites dans S soient finies ; s'il en est ainsi, G laisse invariant un sommet ou une arête d'après le résultat mentionné plus haut. En particulier, pour que G soit un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Aut}(X)$, il faut et il suffit qu'il soit égal au stabilisateur d'un sommet ou d'une arête ([1]).

Le théorème de simplicité suivant est dû à Tits [8] ; la démonstration se fait par des raisonnements géométriques élémentaires.

THÉORÈME 1.- Soient X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X. On fait les hypothèses suivantes :

(i) Soit $(s_n)_{a<n<b}$ une chaîne ([2]) dans X ; pour tout entier n dans l'intervalle $]a,b[$, soit F_n l'ensemble des sommets s tels que $d(s,s_n) < d(s,s_m)$ pour tout $m \neq n$ dans $]a,b[$. Soit g une permutation de S ; on suppose que pour tout n dans $]a,b[$ on a $g(s_n) = s_n$ et qu'il existe un élément g_n de G dont l'action sur F_n coïncide avec celle de g. Alors on a $g \in G$.

(ii) Il n'existe aucun sous-arbre de X, distinct de $\emptyset$ et X, invariant par G.

(iii) Il n'existe pas de bout b tel que tout horocycle associé à b soit invariant par G.

Soit G^+ le sous-groupe de G engendré par les éléments g de G pour lesquels il existe deux sommets liés s et t avec $g(s) = s$ et $g(t) = t$.

Alors, tout sous-groupe de G normalisé par G^+ et non réduit à l'élément neutre contient G^+. En particulier, G^+ est réduit à l'élément neutre ou c'est un groupe simple.

([1]) Les propriétés de cet alinéa supposent X infini et localement fini.

([2]) Autrement dit, s_n est lié à s_{n+1} lorsque n et $n+1$ appartiennet à $]a,b[$.

Le théorème 1 prend toute sa valeur pour un arbre homogène (le nombre d'arêtes contenant un sommet est indépendant du sommet) . Il existe une partition $S = S' \cup S''$ telle que la distance de deux sommets appartenant tous deux à S' ou tous deux à S'' soit paire , et que soit impaire la distance d'un sommet de S' à un sommet de S'' . Le groupe $\mathrm{Aut}(X)^+$ se compose des automorphismes de X conservant S' et S'' ; il est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}(X)$. Les conditions (i) , (ii) et (iii) sont satisfaites lorsque $G = \mathrm{Aut}(X)$, et le théorème 1 prouve donc que $\mathrm{Aut}(X)^+$ est un groupe simple .

3. Groupes libres et produits amalgamés (Serre [6]) .

Soient G un groupe et P une partie de G ; le graphe $\Gamma(G,P)$ a G pour ensemble de sommets et les ensembles $\{g,gp\}$ (pour $g \in G$ et $p \in P$) pour arêtes . Le groupe G agit sur le graphe $\Gamma(G,P)$ par les translations à gauche .

THÉORÈME 2.- a) *Supposons que le groupe G soit libre et que P soit une famille basique de G ; alors le graphe $\Gamma(G,P)$ est un arbre .*

b) *Réciproquement , si l'on a $P \cap P^{-1} = \emptyset$ et si le graphe $\Gamma(G,P)$ est un arbre , alors le groupe G est libre , de famille basique P .*

La démonstration se fait immédiatement en mettant en relation les décompositions réduites d'un élément de G comme produit d'éléments de $P \cup P^{-1}$ avec les chemins sans aller-retour dans le graphe $\Gamma(G,P)$.

THÉORÈME 3.- *Soient X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X . On suppose que G opère librement sur l'ensemble S des sommets de X et sur l'ensemble A des arêtes de X . Alors le groupe G est libre .*

On choisit d'abord une partie connexe T de S rencontrant chaque orbite de G en au plus un point et maximale pour ces propriétés ; il est immédiat que tout sommet est de la forme gt avec $g \in G$ et $t \in T$. Comme G opère librement sur A , il existe une orientation de X invariante par G . Soit P l'ensemble des $g \in G$ pour lesquels il existe une arête positivement orientée joignant un sommet de T à un sommet de gT ; on a

$P \cap P^{-1} = \emptyset$. De plus , la famille $(gT)_{g\varepsilon G}$ est une partition de S en ensembles connexes ; deux éléments g et g' de G sont liés dans $\Gamma(G,P)$ si et seulement s'il existe dans X une arête joignant un sommet de gT à un sommet de g'T . Il en résulte immédiatement que $\Gamma(G,P)$ est un arbre , et le théorème 2 montre que G est libre , de famille basique P .

C.Q.F.D.

Les théorèmes 2 et 3 entraînent le théorème classique de Schreier selon lequel tout sous-groupe d'un groupe libre est libre .

Soient toujours X un arbre et G un groupe d'automorphismes de X . Un <u>domaine fondamental de</u> X mod G est un ensemble T de sommets avec les deux propriétés suivantes :

a) Toute orbite de G dans l'ensemble des sommets rencontre T en un point et un seul .

b) Soient $t \varepsilon T$ et G_t le stabilisateur de t dans G ; toute orbite de G_t dans l'ensemble des sommets liés à t rencontre T en un point et un seul .

Serre a démontré dans [6] le théorème de structure suivant .

THÉORÈME 4.- a) <u>Le groupe</u> G <u>est engendré par</u> $\bigcup_{t\varepsilon T} G_t$.

b) <u>Soient</u> H <u>un groupe</u> , <u>et pour tout</u> $t \varepsilon T$ <u>un homomorphisme</u> u_t <u>de</u> G_t <u>dans</u> H . <u>On suppose que, lorsque</u> t <u>et</u> t' <u>sont liés</u> , <u>les homomorphismes</u> u_t <u>et</u> $u_{t'}$ <u>coïncident sur</u> $G_t \cap G_{t'}$. <u>Il existe alors un homomorphisme</u> u <u>de</u> G <u>dans</u> H <u>induisant</u> u_t <u>sur</u> G_t <u>pour tout</u> $t \varepsilon T$.

Le cas le plus intéressant est celui où T a deux éléments t et t' , nécessairement liés . Alors G est le produit amalgamé de G_t et $G_{t'}$ par rapport à leur intersection .

4. <u>L'arbre associé à</u> SL_2 (Serre [6]) .

Soient K un corps local , $\underline{O}$ l'anneau de ses entiers , $\underline{p}$ l'idéal maximal de $\underline{O}$ et $v : K^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la valuation normalisée de K . On note V l'espace vectoriel K^2 sur le corps K . Un réseau dans V est un sous-$\underline{O}$-module de V qui est libre de rang 2 , donc engendre V sur K ; on dit que deux réseaux M et M' sont équivalents s'il existe λ dans $K^{\times}$ tel que $M' = \lambda M$.

On définit alors un arbre X dont les sommets sont les classes d'équivalence de réseaux ; deux sommets s et s' sont liés si et seulement si l'on peut trouver des représentants M pour s et M' pour s' tels que M' soit un sous-module maximal de M . Le groupe $SL_2(K)$ agit de manière naturelle sur l'arbre X ; le noyau de cette action est le sous-groupe $\{1,-1\}$ de $SL_2(K)$, et l'image de $SL_2(K)$ dans $\mathrm{Aut}(X)$ est contenue dans $\mathrm{Aut}(X)^+$.

Soit q le nombre d'éléments du corps résiduel $k = \underline{O}/\underline{p}$; l'arbre X est homogène de degré q+1 , c'est-à-dire que tout sommet appartient à q+1 arêtes . En particulier , X est infini et localement fini . On peut identifier les bouts aux droites de l'espace vectoriel V de manière à avoir la propriété suivante : soient s un sommet , b un bout , M un réseau représentant s et D la droite associée à b ; pour tout entier $n \geq 0$, soit s_n la classe du réseau $\underline{p}^n M + (D \cap M)$; alors $[s_o,s_1,\dots,s_n,\dots]$ est la chaîne infinie joignant s à b . L'interprétation des horocycles est laissée au lecteur .

Par ce qui précède , les sous-groupes de Borel de $SL_2(K)$ sont les stabilisateurs des bouts de l'arbre X . Les sous-groupes compacts maximaux de $SL_2(K)$ (rappelons que le corps K est localement compact) sont les stabilisateurs des sommets de X ; il y a deux orbites de $SL_2(K)$ dans l'ensemble des sommets de X , d'où deux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux de $SL_2(K)$. De manière plus précise , soient s la classe du réseau $\underline{O} \oplus \underline{O}$ et s' la classe du réseau $\underline{O} \oplus \underline{p}$; le stabilisateur de s est le groupe $SL_2(\underline{O})$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$ et a,b,c,d dans $\underline{O}$; le stabilisateur de s' se compose des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$, a,d dans $\underline{O}$, c dans $\underline{p}$ et b dans $\underline{p}^{-1}$, c'est-à-dire le groupe $gSL_2(\underline{O})g^{-1}$ avec $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ et π dans $\underline{O} - \underline{p}$.

Par application des théorèmes 3 et 4 , on obtient les résultats suivants de Ihara :

a) Soit G un sous-groupe de $SL_2(K)$ n'ayant pas de sous-groupe relativement compact non trivial ; alors G est un groupe libre .

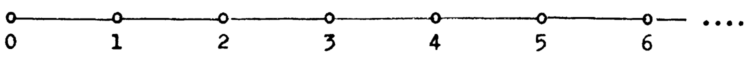
b) Le groupe $SL_2(K)$ est produit amalgamé des sous-groupes $SL_2(\underline{O})$ et $gSL_2(\underline{O})g^{-1}$ suivant leur intersection (composée des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc = 1$, a,b,d dans $\underline{O}$ et c dans $\underline{p}$) .

5. Applications à la géométrie algébrique (Serre [6] et [7]) .

Soit k un corps fini et soit C une courbe projective connexe et lisse définie sur k . Soient F le corps des fonctions rationnelles sur C (définies sur k) et soit P un point de C rationnel sur k . On note A l'anneau des fonctions rationnelles sur C n'ayant de pôle qu'en P , et v la valuation normalisée de F associée à P . On prend pour K le complété du corps F pour la valuation v . Alors le sous-groupe $\Gamma = SL_2(A)$ de $SL_2(K)$ est discret et agit proprement sur l'arbre X associé à $SL_2(K)$.

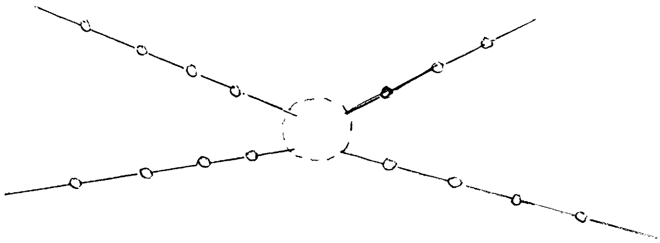
Soit L_P le fibré vectoriel de rang 1 sur C associé au diviseur P ; pour tout entier n , on note L_{nP} la puissance tensorielle n-ième de L_P . On peut alors identifier X/Γ à l'ensemble des classes de fibrés vectoriels E de rang 2 sur C tels que $\Lambda^2 E$ soit isomorphe à L_{nP} pour n convenable ; les fibrés E et E' sont équivalents s'il existe un entier n tel que E' soit isomorphe à $L_{nP} \otimes E$. La correspondance s'explicite comme suit : soient s un sommet de X , M un réseau représentant s ; soit $\underline{F}$ le sous-faisceau du faisceau constant $F \oplus F$ sur C , dont la fibre est $M \cap (F \oplus F)$ en P et $\underline{O}_{P'} \oplus \underline{O}_{P'}$ en tout point P' distinct de P (on note $\underline{O}_{P'}$ l'anneau local de C en P') . Comme le faisceau $\underline{F}$ est localement libre de rang 2 , il lui correspond un fibré vectoriel E de rang 2 sur C . Si s est un sommet de X , le stabilisateur de s dans Γ s'identifie au groupe des automorphismes d'un fibré vectoriel E de rang 2 associé à s .

Les constructions précédentes sont particulièrement simples lorsque C est la droite projective P^1_k et P le point à l'infini . On sait par Grothendieck que tout fibré vectoriel de rang 2 sur C est isomorphe à $L_{mP} \oplus L_{nP}$ pour des entiers m et n convenables . On en déduit facilement que le graphe quotient X/Γ est une chaîne infinie



Les théorèmes de structure du n° 3 montrent alors que le groupe $SL_2(k[T])$ est produit amalgamé de $SL_2(k)$ et du groupe de Borel $B(k[T])$ selon leur intersection $B(k)$ ([1]) .

Revenons au cas général . On peut montrer que le groupe Γ a un nombre fini d'orbites dans l'espace des bouts de l'arbre X , en correspondance naturelle avec les classes d'idéaux de l'anneau de Dedekind A . Le graphe quotient X/Γ est alors réunion d'un sous-graphe fini et d'un nombre fini de chaînes infinies , correspondant aux classes d'idéaux de A . Serre a déduit de là dans [7] la structure du groupe Γ rendu abélien et il a appliqué ces résultats à l'étude des sous-groupes de congruence de $\Gamma = SL_2(A)$.



6. <u>Théorie du potentiel sur un arbre</u> (Cartier [2] , Kemeny-Snell-Knapp [5]) .

Soit X un arbre , d'ensemble de sommets S (le contenu de ce numéro est valable pour un graphe orienté quelconque) . On suppose associé à tout chemin c de longueur finie dans X un nombre $p(c) > 0$ de sorte que l'on ait $p(cc') = p(c)p(c')$ lorsque le chemin composé cc' est défini . On suppose aussi que , pour deux sommets quelconques s et t , la somme $G(s,t)$ des nombres $p(c)$ pour tous les chemins c joignant s à t est finie . On dit que la fonction G sur $S \times S$ est le <u>noyau de Green</u> .

Soit h une fonction sur S ; on définit la fonction Ph sur S par $Ph(s) = \Sigma\, p(\overrightarrow{st})h(t)$ avec une sommation sur tous les sommets t liés à s (on note $\overrightarrow{st}$ l'arête $\{s,t\}$ orientée de s vers t) ; on pose aussi $\Delta h = Ph - h$. L'opérateur Δ est l'analogue de l'opérateur

([1]) Pour tout anneau A , on note B(A) l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & a' \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ (a,a' dans A) .

de Laplace-Beltrami en géométrie riemannienne . Par analogie , on dit que la fonction h est harmonique si l'on a $\Delta h = 0$ et qu'elle est surharmonique si l'on a $\Delta h \leq 0$. Enfin , le potentiel d'une fonction positive v sur S est la fonction Gv finie ou non , définie sur S par $Gv(s) = \sum_{t\in S} G(s,t)v(t)$.

Par un raisonnement élémentaire dû à Doob [4] , on montre que toute fonction surharmonique positive h s'écrit de manière unique sous la forme h' + Gv avec h' harmonique positive et v positive . On a $v = -\Delta h$. Par suite , pour toute fonction positive v , l'équation de Poisson $\Delta h = -v$ a une solution positive (finie) si et seulement le potentiel Gv est fini ; ce potentiel est alors la solution positive minimale de l'équation de Poisson .

On a alors les corollaires usuels . Par exemple , la borne inférieure de deux fonctions surharmoniques positives est surharmonique positive ; toute fonction surharmonique positive majorée par un potentiel fini est un potentiel fini ; toute fonction surharmonique positive est limite d'une suite croissante de potentiels finis .

On peut aussi développer la théorie du balayage . Soient T une partie de S et h une fonction surharmonique positive . Il existe alors une fonction surharmonique positive $H_T h$, la réduite de h sur T , caractérisée par les propriétés suivantes :

a) On a $H_T h \leq h$, avec égalité sur T .

b) Toute fonction surharmonique positive q qui majore h sur T majore $H_T h$ partout .

c) La fonction $H_T h$ est harmonique en dehors de T .

d) Si h est le potentiel d'une fonction positive nulle hors de T , on a $H_T h = h$.

On déduit de là le principe du maximum : si une fonction surharmonique h majore un potentiel fini Gv en tout point où v ne s'annule pas , on a $h \geq Gv$ partout .

Tout ce qui précède est un cas particulier de la théorie du potentiel associée à une chaîne de Markov ; cette théorie est maintenant bien connue , et l'on en trouvera un excellent exposé dans le traité de Kemeny-Snell-Knapp . Cependant ces auteurs font l'hypothèse markovienne , c'est-à-dire supposent que la constante 1 est harmonique . Pour éviter cette restriction (plus apparente que réelle) , nous associons à chaque ensemble C de chemins une fonction U_C sur $S \times S$: la valeur $U_C(s,t)$ est la somme des nombres p(c) pour tous les chemins c joignant s à t et appartenant à C . Par exemple , on a $G = U_\Gamma$ où Γ est l'ensemble de tous les chemins , et $P = U_{\Gamma(1)}$ où $\Gamma(1)$ est l'ensemble des chemins de longueur 1 . Si C , C' et C" sont trois ensembles de chemins , et si C se compose des chemins de la forme c'c" avec $c' \in C'$ et $c'' \in C''$ (décomposition unique) , on a $U_C = U_{C'} U_{C''}$ (c'est-à-dire plus explicitement $U_C(s,u) = \sum_{t \in S} U_{C'}(s,t) U_{C''}(t,u)$) . Cette formule fournit des démonstrations combinatoires simples d'un grand nombre de relations . Par ailleurs , on peut fonder la théorie du balayage sur la seule inégalité $U_C h \leq h$ (c'est-à-dire explicitement $\sum_{t \in S} U_C(s,t) h(t) \leq h(s)$) valable pour toute fonction surharmonique $h \geq 0$.

7. <u>Représentations intégrales des fonctions harmoniques</u> (Cartier [2]) .

Les hypothèses sont celles des nos 1 et 6. Conformément à la méthode classique de Martin, normalisons le noyau de Green en un sommet de référence o par

$$K(s,t) = G(s,t)/G(o,t) \quad . \tag{1}$$

Par un argument combinatoire utilisant les méthodes du n° 6 , on établit la formule $K(s,t) = K(s,s')$ où s' est le point de la géodésique de s à o le plus rapproché de t . La compactification de S étant définie comme au n° 1 , on montre alors que K s'étend en une fonction continue (notée encore K) sur $S \times \hat{S}$. Cette fonction K est le <u>noyau de Martin</u> .

Le problème de Dirichlet est aisé à résoudre au niveau "fini" . Pour tout entier $n \geq 0$, soit S_n l'ensemble des sommets à la distance n de o , et soit $S(n) = \bigcup_{j=0}^{n} S_j$.

Pour tout $n \geq 1$, toute fonction sur S_n s'étend de manière unique en une fonction sur $S(n)$ harmonique dans l' "intérieur" $S(n-1)$ de $S(n)$; de plus , ce prolongement est le potentiel d'une fonction nulle hors de S_n .

Soit alors h une fonction harmonique positive . Pour tout entier $n \geq 0$, il existe d'après ce qui précède une unique fonction v_n nulle hors de S_n telle que

$$h(s) = \sum_{t \varepsilon S} K(s,t) v_n(t) \qquad (s \varepsilon S(n)) . \tag{2}$$

Le point non évident est la positivité de v_n , qui résulte de la théorie du balayage . Ceci acquis , notons μ_n la mesure positive sur $\hat{S}$, portée par S_n et qui attribue la masse $v_n(t)$ à tout point t de S_n . On montre facilement que les mesures μ_n convergent vaguement vers une mesure positive μ sur $\hat{S}$, portée par l'ensemble B des bouts . Par passage à la limite , on déduit de (2) la formule de représentation intégrale

$$h(s) = \int_B K(s,b) \mu(db) \qquad (s \varepsilon S) . \tag{3}$$

La mesure μ sur B est caractérisée par cette formule .

La théorie des ensembles convexes compacts due à Choquet permet de prouver a <u>priori</u> l'existence d'une représentation intégrale du type (3) , mais reste inefficiente sans l'explicitation de l'espace compact B . De plus , on a ici deux particularités intéressantes :

a) La compactification de Martin $\hat{S}$ de S ne dépend que de la "topologie" de l'arbre X , et non des coefficients $p(\overrightarrow{st})$ attribués aux arêtes orientées .

b) Pour <u>tout</u> point b de B , la fonction $s \longmapsto K(s,b)$ est un point extrémal de l'ensemble convexe compact formé des fonctions harmoniques positives h telles que $h(o) = 1$.

On peut généraliser le théorème de représentation intégrale . L'espace compact $\hat{S}$ est totalement discontinu et sa topologie est engendrée par l'algèbre de Boole $\underline{B}$ des parties ouvertes et fermées . Une mesure additive sur cette algèbre de Boole s'appelle une <u>distribution</u> sur $\hat{S}$. Pour tout s dans S , la fonction $t \longmapsto K(s,t)$ sur $\hat{S}$ est localement constante , donc étagée par rapport à $\underline{B}$. Si λ est une distribution sur $\hat{S}$, on peut donc définir l'intégrale $K\lambda(s) = \int_{\hat{S}} K(s,t)\lambda(dt)$.

THÉORÈME 5.- <u>L'application</u> $\lambda \longmapsto K\lambda$ <u>est une bijection de l'ensemble des distributions sur</u> $\hat{S}$ <u>sur l'ensemble des fonctions sur</u> S . <u>La fonction</u> $K\lambda$ <u>est surharmonique positive si et seulement si la distribution</u> λ <u>est une mesure positive sur</u> $\hat{S}$. <u>La fonction</u> $K\lambda$ <u>est harmonique si et seulement si la distribution</u> λ <u>est portée par</u> B .

8. <u>Théorème de Fatou</u> (Cartier [2]) .

On fait maintenant l'<u>hypothèse markovienne</u> : la fonction constante 1 est harmonique . D'après le théorème de représentation intégrale du n° 7 , il existe donc une mesure positive de masse 1 sur B , soit ν , caractérisée par la relation

$$\int_B K(s,b)\nu(db) = 1 \qquad \text{pour tout } s \in S . \tag{4}$$

On dit que ν est la <u>mesure de Poisson</u> .

En utilisant la méthode de Doob [4] , on introduit un cheminement aléatoire $X_o, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sur l'arbre X régi par les conventions suivantes : on a $X_o = o$; sous l'hypothèse $X_n = s$, les valeurs permises pour X_{n+1} sont les sommets t liés à s , et la probabilité de passer de s à t est $p(\overrightarrow{st})$. Comme le noyau de Green est fini , le lemme de Borel-Cantelli montre que X_n tend presque-sûrement vers un point aléatoire X_∞ de B ; la loi de probabilité de X_∞ est la mesure de Poisson ν sur B .

Soit h une fonction harmonique <u>bornée</u> . Le théorème des martingales montre que la suite des variables aléatoires $h \circ X_n$ tend presque sûrement vers une variable aléatoire Y . On montre ensuite qu'il existe une fonction borélienne et bornée φ sur B telle que $Y = \varphi \circ X_\infty$. On a alors l'analogue de la formule intégrale de Poisson

$$h(s) = \int_B K(s,b)\,\varphi(b)\,\nu(db) \qquad (s \in S) \quad , \tag{5}$$

et l'analogue du théorème de convergence radiale de Fatou

(6) $$\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} h(s_n) \qquad \text{pour } \nu\text{-presque tout } b \in B ,$$

où l'on a noté $[s_o, s_1, \ldots, s_n, \ldots]$ la chaîne infinie joignant o à b .

L'existence de X_∞ et φ repose sur le lemme topologique suivant : tout chemin infini issu de o , qui ne passe qu'un nombre fini de fois en chaque sommet , tend vers un point de B , et passe par chacun des points de la chaîne infinie joignant o à b . Cette propriété très particulière des arbres permet donc de déduire le théorème de convergence radiale du théorème probabiliste de Fatou . Ceci est d'autant plus remarquable que la probabilité est nulle que le cheminement aléatoire suive une chaîne infinie .

9. Arbres homogènes (Serre [6] , Cartier [3]) .

On note q un entier ≥ 1 et X un arbre homogène de degré q + 1 ; autrement dit , tout sommet de X appartient à q + 1 arêtes . Voici quelques exemples d'arbres homogènes :

a) Le graphe $\Gamma(G,P)$ où G est le groupe libre à n générateurs $x_1,\ldots,x_n$ et où $P = \{x_1,\ldots,x_n\}$ (cf. n° 3) ; on a ici $q = 2n - 1$.

b) Le graphe $\Gamma(G,P)$ où G est défini par les générateurs $x_1,\ldots,x_n$ et les relations $x_1^2 = \ldots = x_n^2 = 1$, et où $P = \{x_1,\ldots,x_n\}$; on a ici $q = n - 1$.

c) Le graphe associé à un corps local K comme au n° 4 ; q est alors le nombre d'éléments du corps résiduel de K .

On note S l'ensemble des sommets de X , et $\underline{K}$ l'espace des fonctions complexes sur S , qui sont nulles hors d'une partie finie de S . Le groupe Aut(X) agit de manière évidente sur l'espace $\underline{K}$. L'algèbre $\underline{H}$ de tous les endomorphismes de l'espace vectoriel $\underline{K}$ qui commutent à Aut(X) s'appelle l'algèbre de Hecke de l'arbre X . Pour tout entier $n \geq 0$, l'opérateur Θ_n est défini ainsi : pour toute fonction $f \in \underline{K}$ et tout sommet s , la valeur de $\Theta_n f$ en s est la somme des valeurs de f aux points à la distance n de s . Alors la suite $\Theta_o, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n, \ldots$ est une base de l'espace vectoriel

$\underline{H}$; la table de multiplication est la suivante :

(7) $$\Theta_m \cdot \Theta_n = \sum_{i=0}^{\infty} c(m,n|i)\,\Theta_i \quad ,$$

avec les valeurs suivantes des coefficients :

(8) $$c(m,n|i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i > \inf(m,n) \\ 1 & \text{si} \quad i = 0 \\ (q-1)q^{i-1} & \text{si} \quad 0 < i < \inf(m,n) \\ q^{i} & \text{si} \quad i = \inf(m,n) \text{ et } m \neq n \\ (q+1)q^{i-1} & \text{si} \quad i = m = n \quad . \end{cases}$$

On pose $T = \Theta_1$. On obtient par spécialisation des formules précédentes les valeurs suivantes

(9) $$\begin{cases} T.\Theta_o = \Theta_1 \\ T.\Theta_1 = \Theta_2 + (q+1)\Theta_o \\ T.\Theta_m = \Theta_{m+1} + q\,\Theta_{m-1} \qquad \text{si} \quad m \geq 2\ . \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que les monômes T^n pour $n \geq 0$ forment une base de l'algèbre de Hecke , qui est donc l'algèbre de polynômes $\underset{\sim}{C}[T]$. La formule (9) s'exprime plus commodémment sous la forme

(10) $$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n u^n = \frac{1-u^2}{1-uT+qu^2} \quad .$$

Le cheminement aléatoire le plus naturel sur l'arbre X est celui où la probabilité de passer d'un sommet s à un sommet t lié à s est indépendante de t , donc égale à $1/(q+1)$. On a alors $Ph = Th/(q+1)$ pour toute fonction $h \in \underline{K}$; comme on a $G = \sum_{n=0}^{\infty} P^n = \lim_{u \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} u^n P^n$, on peut déduire des formules précédentes la valeur du noyau de Green

(11) $$G(s,t) = \frac{q^{1-d(s,t)}}{q-1} \quad ;$$

dans cette formule , $d(s,t)$ est la distance du sommet s au sommet t . Le calcul du noyau de Martin est alors facile . Choisissons un sommet o de référence . Soit b un bout ; nous numéroterons les horocycles associés à b (cf. n° 1) de telle sorte qu'on ait $o \in H_o$. On a alors $K(s,b) = q^{-n}$ pour tout sommet $s \in H_n$.

10. Fonctions sphériques (Cartier [3]) .

Les notations sont celles du n° 9 . On appelle fonction sphérique sur X toute fonction F sur $S \times S$ avec les deux propriétés suivantes :

a) On a $F(gs,gs') = F(s,s')$ quels que soient les sommets s et s' et l'automorphisme g de X ; autrement dit , $F(s,s')$ ne dépend que de la distance $d(s,s')$.

b) Pour tout sommet s' , la fonction $s \mapsto F(s,s')$ est une fonction propre pour chaque élément de l'algèbre de Hecke $\underline{H}$.

On normalise les fonctions sphériques par $F(s,s) = 1$ pour tout sommet s .

Les formules (9) donnent facilement la forme des fonctions sphériques ; pour tout nombre complexe $v \neq 0$, on a une fonction sphérique F_v définie par

$$F_v(s,s') = \frac{v^{n+1}q^{1-n} - v^{n-1}q^{1-n} + v^{1-n} - q^2v^{-1-n}}{(q+1)(v - qv^{-1})} . \tag{12}$$

Toute fonction sphérique est de la forme F_v et l'on a $F_v = F_{v'}$ si et seulement si l'on a $v = v'$ ou $vv' = q$. Comme fonction de s , la fonction sphérique $F_v(s,s')$ est associée à la valeur propre $v + qv^{-1}$ de T .

On montre ensuite que la fonction sphérique F_v est de type positif si et seulement si l'on a $|v + qv^{-1}| \leq q+1$, autrement dit si v est complexe de module $q^{1/2}$ ou bien réel de module compris entre 1 et q . Ceci se démontre en traduisant la condition que F_v est de type positif de manière géométrique : il existe une application Φ de S dans l'ensemble des vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert , telle que

$$\sum_{t \text{ lié à } s} \Phi(t) = (v + qv^{-1})\, \Phi(s) \tag{13}$$

pour tout sommet s . La condition $|v + qv^{-1}| \leqslant q+1$ est donc nécessaire ; inversement , si elle est remplie , on construit de proche en proche Φ sur l'ensemble des sommets à la distance n d'un sommet o de référence .

Supposons pour terminer que X soit l'arbre associé à $SL_2(K)$ (cf. n° 4) , où K est un corps local . La formule (12) pour les fonctions sphériques est en accord avec les formules de Mautner . On peut montrer que le cercle $|v| = q^{1/2}$ correspond à la série principale de représentations de $SL_2(K)$, et les intervalles $1 \leq v \leq q$ et $-q \leq v \leq -1$ à la série complémentaire . Ce qui précède fournit une construction unifiée de ces deux séries de représentations par des méthodes combinatoires . On peut même réaliser les représentations de la série discrète de $SL_2(K)$ dans l'espace des fonctions de deux sommets de l'arbre associé à $SL_2(K)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes réductifs sur un corps local , à paraître aux Publ. Math. I.H.E.S. (voir un résumé dans 4 Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris , t. 263 (1966) , p. 598-601 , 766-768 , 822-825 , 867-869) .

[2] P.CARTIER - Fonctions harmoniques sur un arbre , à paraître aux Atti del Convegno della Probabilita , Roma (mars 1971) .

[3] P.CARTIER - Homogeneous trees , à paraître.

[4] J.L. DOOB - Discrete potential theory and boundaries , J. Math. and Mech. 8 (1959), p. 433-458 .

[5] J.G. KEMENY , J.L. SNELL and A.W. KNAPP - Denumerable Markov chains , Van Nostrand, New-York , 1966 .

[6] J.-P. SERRE - Arbres , amalgames et SL_2 , Collège de France 1968/69 (notes polycopiées , rédigées avec la collaboration de H. BASS) .

[7] J.-P. SERRE - Le problème des groupes de congruence pour SL_2 , Ann. of Maths , 92 (1970) , p. 489-527 .

[8] J. TITS - Sur le groupe des automorphismes d'un arbre , dans "Mémoires dédiés à Georges de Rham " , p. 188-211 , Springer Verlag , Berlin , 1970 .