LIONEL BÉRARD-BERGERY

Laplacien et géodésiques fermées sur les formes d'espace hyperbolique compactes

Séminaire N. Bourbaki, 1973, exp. n° 406, p. 107-122

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1971-1972__14__107_0>

Séminaire BOURBAKI
24e année, 1971/72, n° 406 Février 1972

LAPLACIEN ET GÉODÉSIQUES FERMÉES SUR LES FORMES D'ESPACE HYPERBOLIQUE COMPACTES

par Lionel BÉRARD-BERGERY

1. Introduction et notations

Soient M une variété (toujours C^∞ connexe de dimension $d \geq 2$) et g une structure riemannienne sur M , c'est-à-dire une forme différentielle bilinéaire symétrique définie positive sur M . A l'aide de g , on définit une distance sur M , une dérivée covariante D , un transport parallèle, un élément de volume (une mesure) noté v_g ou simplement dx , une notion de longueur des courbes, etc...

a) Laplacien

Soit $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$ (resp. $C^\infty(M)$) l'espace des fonctions C^∞ sur M à valeurs réelles (resp. complexes). Si $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$, on appelle gradient de f et on note $\operatorname{grad}(f)$ l'unique champ de vecteurs X tel que $g(X,Y) = df(Y)$ pour tout champ de vecteurs Y . Si X est un champ de vecteurs sur M , on appelle divergence de X et on note $\operatorname{div}(X)$ la fonction dont la valeur en $x \in M$ est la trace de l'endomorphisme $v \longmapsto D_v X$ de $T_x M$.

DÉFINITION.- <u>On appelle laplacien et on note</u> Δ <u>l'opérateur défini sur</u> $C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$ <u>par</u>
$$\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) .$$

En coordonnées locales, on a $\Delta = -\left(\sqrt{|g|}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ où $|g| = |\det(g_{ij})|$. On étend Δ à $C^\infty(M)$. Δ est un opérateur différentiel elliptique du deuxième ordre sur M , dépendant de g . Si, de plus, M est compacte, on munit $C^\infty(M)$ du produit scalaire

$$\langle f,h\rangle = \int_M f\,\bar{h}\,v_g \quad ;$$

Δ est alors auto-adjoint, son spectre est réel et discret et peut s'écrire $\{0 = \lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots\}$, λ_n tendant vers l'infini si n tend vers l'infini, la multiplicité $m(\lambda_n)$ de λ_n est finie, $m(0) = 1$ et les fonctions propres associées à 0 sont les constantes, et enfin il existe une base hilbertienne orthonormée formée de fonctions propres C^∞ dans l'espace de Hilbert $L^2(M)$ complété de $C^\infty(M)$ pour $\langle\ ,\ \rangle$.

[Une référence générale pour le laplacien sur les variétés riemanniennes est [1].]

b) Géodésiques fermées

DÉFINITION.- On appelle géodésique fermée sur M toute application C^∞ $c : \mathbb{R} \to M$, non constante, périodique et de période 1 , vérifiant en tout point l'équation $D_{\dot c}\dot c = 0$, en convenant d'identifier les applications $t \to c(t)$ et $t \to c(t+u)$.

$\dot c = \dfrac{dc}{dt}$ est le "vecteur vitesse" de c en $x = c(t) \in M$ et l'équation $D_{\dot c}\dot c = 0$ signifie que c est une géodésique paramétrée proportionnellement à la longueur ; en particulier, $g(\dot c,\dot c)$ est constante en t et non nulle.

DÉFINITION.- Si c est une géodésique fermée, $\mu(c) = \sqrt{g(\dot c,\dot c)}$ est la longueur de c .

D'autre part, l'application $\tilde c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 \to M$ canoniquement associée à c définit un lacet de M .

Les géodésiques fermées sont particulièrement intéressantes sur les variétés riemanniennes compactes à courbure négative ou nulle ; on sait en effet que :

- Le revêtement universel riemannien d'une telle variété M est complet, simplement connexe et à courbure négative ou nulle, donc difféomorphe à $\mathbb{R}^d$ (Théorème de Hadamard-Cartan). En particulier, $\forall\ i \geq 2\ ,\ \pi_i(M) = 0$.

- Il y a une géodésique fermée dans toute classe non triviale pour l'homotopie libre des lacets de M (il suffit de prendre le lacet rectifiable de longueur minimale dans la classe considérée).

- Deux géodésiques fermées librement homotopes sont de même longueur et l'homotopie peut être réalisée par un "cylindre" $S^1 \times [0,1]$ totalement géodésique et plat dans M , de bords c_1 et c_2 .

En particulier, si M est à courbure strictement négative, il y a une et une seule géodésique fermée dans toute classe non triviale d'homotopie libre.

[Pour des démonstrations, voir [2] ou [15].]

Les longueurs des géodésiques fermées peuvent se présenter comme un "spectre" $\{\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots\}$ qu'on appellera <u>spectre des longueurs</u>. On montre que

μ_n tend vers l'infini si n tend vers l'infini.

$\mu_1 = 2i(M)$ où $i(M)$ est le rayon d'injectivité de M (c'est-à-dire le plus grand t tel que l'exponentielle en x soit injective sur la boule de centre 0 et de rayon t dans T_xM , pour tout x dans M).

Le but de cet exposé est d'étudier le lien entre le laplacien et les géodésiques fermées (et en particulier entre les deux spectres) sur les "formes d'espace", à l'aide de la formule des traces de Selberg, [13], en suivant les calculs faits par H. Huber dans le cas des surfaces orientables [8].

2. Cas des tores plats ([1] p. 146 et suivantes)

DÉFINITION.- On appelle tores plats les variétés riemanniennes (T^d, g_Γ) compactes à courbure nulle quotients de l'espace euclidien ($\mathbf{R}^d$ muni de sa s.r. canonique) par un groupe discret Γ de translations, isomorphe à $\mathbf{Z}^d$.

On note $\Lambda = \{\gamma(0)\ ,\ \gamma \in \Gamma\}$ le réseau associé à Γ et $\Lambda^* = \{y \in \mathbf{R}^d\ ;\ \forall\ x \in \Lambda\ ,\ \langle x|y\rangle \in \mathbf{Z}\}$ le réseau dual. On montre que

- les longueurs des géodésiques fermées de (T^d, g_Γ) sont les $|x|$, $x \in \Lambda$.
- les valeurs propres du laplacien de (T^d, g_Γ) sont les $4\pi^2|y|^2$, $y \in \Lambda^*$.
- Λ et Λ^* sont liés par la formule sommatoire de Poisson :

Si f est une fonction numérique continue sur $\mathbf{R}^d$ à décroissance rapide et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier $\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\exp(-2\pi i\langle x|y\rangle)dx$, on a

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x) = (\mathrm{vol}\ \Lambda)^{-1} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y)$$

où $\mathrm{vol}\,\Lambda$ est le volume d'un domaine fondamental pour Γ , c'est-à-dire le volume riemannien de (T^d, g_Γ) .

On en déduit que le spectre du laplacien et le spectre des longueurs se déterminent mutuellement, bien qu'ils ne caractérisent pas le tore riemannien considéré.

3. Cas des formes d'espace hyperbolique

a) DÉFINITION.- Une forme d'espace hyperbolique compacte est une variété riemannienne compacte à courbure constante et égale à -1 .

C'est un quotient de l'espace hyperbolique H par un groupe Γ d'isométries, discret, uniforme et sans élément d'ordre fini. Rappelons que l'espace hyperbolique H (de dimension $d \geq 2$) est la variété riemannienne de dimension d complète, simplement connexe, à courbure -1. C'est aussi l'espace riemannien symétrique non compact de rang 1 : $G/K = SO_0(d,1)/O(d)$ (voir [7], [9] ou [20]).

Pour les espaces symétriques, on a une généralisation de la formule de Poisson, c'est

b) La formule des traces de Selberg

[Pour des exposés généraux sur cette formule, voir [4], [6], [13] ; nous nous contenterons ici d'une version élémentaire, adaptée à l'application envisagée.]

Soit $H = G/K$ un espace riemannien symétrique. On considère un opérateur linéaire T sur les fonctions numériques sur H, à "noyau", c'est-à-dire de la forme
$$(Tf)(x) = \int_H k(x,y)f(y)dy \ .$$
On montre que, si k est bi-invariant pour l'action naturelle de G sur $H = G/K$ (c'est-à-dire $\forall\, g \in G$, $k(gx,gy) = k(x,y)$), l'opérateur T commute à tous les opérateurs différentiels invariants sur H, et opère scalairement sur les espaces de fonctions propres
$$E_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r} = \{f \in C^\infty(H) \ ; \ D_i f = \lambda_i f \ , \ i = 1,\ldots,r\}$$
où r est le rang de H et $D_1 = \Delta$, $D_2,\ldots,D_r$ sont r opérateurs fondamentaux, engendrant l'algèbre des opérateurs différentiels invariants sur H. Si on note $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$, et si $\varphi_\lambda \in E_\lambda$, on a donc
$$(T\varphi_\lambda)(x) = \int_H k(x,y)\varphi_\lambda(y)dy = h(\lambda)\varphi_\lambda(x) \ ,$$
et $h(\lambda)$ ne dépend que de λ et k.

Soit maintenant Γ un sous-groupe discret de G tel que le quotient $M = \Gamma\backslash H = \Gamma\backslash G/K$ soit compact. Grâce à la bi-invariance, T opère sur les fonctions sur M, identifiées aux fonctions sur H invariantes par Γ ($\forall\, \gamma \in \Gamma$, $f(\gamma x) = f(x)$). Sur $C^\infty(M)$, T peut s'écrire

$$(Tf)(x) = \int_D K(x,y)f(y)dy ,$$

où $K(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma y)$, (si toutefois cette expression converge uniformément) et D est un domaine fondamental pour Γ dans H .

D'autre part, les espaces $F_\lambda = E_\lambda \cap C^\infty(M)$ sont de dimension finie $m(\lambda)$ et $L^2(M)$ (l'espace de Hilbert associé à $C^\infty(M)$ pour le produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_D f\bar{g}\,dx$) possède une base hilbertienne orthonormée B formée de $\varphi_\lambda \in F_\lambda$. On montre alors que, moyennant certaines conditions sur k , l'opérateur T restreint à $C^\infty(M)$ est à trace. On peut calculer cette trace de deux façons et en égalant les deux résultats, on a la formule des traces de Selberg

(1) $$\sum_\lambda m(\lambda)h(\lambda) = \int_D K(x,x)dx = \int_D \sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma x)\,dx .$$

On peut aussi écrire pour le noyau

(2) $$\sum_{\varphi_\lambda\in B} h(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(y) = K(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(x,\gamma y)$$

(si toutefois ces deux séries convergent).

Il ne nous reste plus qu'à exploiter ces deux formules pour H l'espace hyperbolique.

4. Etude du premier membre de (1) et de (2)

a) Les coefficients $h(\lambda)$ se calculent de la façon suivante :

Soit $\omega_\lambda(x,y)$ la fonction sphérique élémentaire sur H associée à λ (ω_λ bi-invariante, $\forall\, y \in H$, $\omega_\lambda(\cdot,y) \in E_\lambda$, $\omega_\lambda(x,x) = 1$) . Alors :

$$h(\lambda) = \int_H k(x,y)\,\omega_\lambda(y,x)\,dy .$$

(C'est en fait la transformation de Fourier sur $G/K = H$; voir [5] pour plus de détails).

L'espace hyperbolique H est de rang 1 , donc Δ est l'unique opérateur fondamental, les espaces F_λ sont les espaces propres de la variété $M = \Gamma\backslash H$ et $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ pour M. Pour simplifier les calculs, nous allons désormais nous limiter à des noyaux particulièrement simples, introduits par H. Huber [8].

Remarquons tout d'abord que les espaces symétriques de rang 1 sont homogènes à deux points (c'est-à-dire si les couples (x,y) et (z,t) de $H\times H$ vérifient $\rho(x,y) = \rho(z,t)$, où $\rho(.,.)$ est la distance sur H, il existe $g \in G$ tel que $gx = z$ et $gy = t$). Les noyaux bi-invariants ne sont donc fonctions que de la distance des deux variables. Nous prendrons les noyaux

$$k_s(x,y) = \mathrm{ch}^{-s}\, \rho(x,y) \qquad s \in \mathbf{C} .$$

On montre que ces noyaux vérifient toutes les conditions nécessaires pour les formules (1) et (2) dès que $\mathrm{Re}(s)$, la partie réelle de s, est supérieure à $d-1$. On peut alors éviter l'emploi des fonctions sphériques en remarquant, avec H. Huber, que les noyaux k_s vérifient l'équation fonctionnelle

$$\Delta_1 k_s = s(s+1)\, k_{s+2} + s(d-1-s)\, k_s$$

où Δ_1 est le laplacien pour la première variable.

Comme T commute à Δ_1, on obtient une équation fonctionnelle en s pour les $h_s(\lambda)$ associés aux k_s

$$s(s+1)\, h_{s+2}(\lambda) = (s^2 - (d-1)s + \lambda)\, h_s(\lambda) ,$$

qui se résoud en montrant que $h_s(\lambda)$ est analytique en s pour $\mathrm{Re}(s) > d-1$ et en étudiant la limite de h_s lorsque $\mathrm{Re}(s)$ tend vers l'infini. On trouve :

$$h_s(\lambda) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})}\, \Gamma\left(\frac{s-s^+(\lambda)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s^-(\lambda)}{2}\right) \tag{3}$$

où $s^+(\lambda)$ et $s^-(\lambda)$ sont les racines de l'équation $s^2 - s(d-1) + \lambda = 0$. ($\Gamma(.)$ est la fonction gamma d'Euler.) La convergence du premier terme de (2) est alors assurée par les résultats de [11].

b) Une première conséquence

DÉFINITION.- On appelle réseau hyperbolique sur H associé à Γ l'ensemble de points discret $\Lambda_x = \{\gamma x \, , \, \gamma \in \Gamma\}$ pour $x \in H$ fixé.

On note $N(x,y,t)$ le nombre de points de Λ_x dans la boule riemannienne de centre y et de rayon t sur H. On peut utiliser la formule (2) pour calculer un équivalent de $N(x,y,t)$ si t tend vers l'infini. Par exemple, $\sum_{\gamma \in \Gamma} k_s(x,y)$ peut s'interpréter comme une série de Dirichlet en s, et le premier membre $\sum_B h_s(\lambda)\, \varphi_\lambda(x)\, \varphi_\lambda(y)$ est une série de fonctions méromorphes, convergente, dont l'unique pôle de partie réelle maximum est $s = d-1$. On peut donc appliquer le théorème tauberien de Wiener-Ikehara [19]. On obtient

$$N(x,y,t) \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})(d-1)\mathrm{Vol}(M)} \; \frac{e^{(d-1)t}}{2^{d-1}} \, . \tag{4}$$

5. Etude du deuxième membre de (1)

Il s'agit de calculer

$$\int_D K(x,x)\, dx = \int_D \sum_{\gamma \in \Gamma} k(x,\gamma x)\, dx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_D k(x,\gamma x)\, dx \, .$$

Suivant Selberg, on peut transformer cette expression en regroupant certains termes. On note : (Γ) l'ensemble des classes de conjugaison du groupe Γ, (γ) la classe de γ, Γ_γ le centralisateur de γ dans Γ et D_γ un domaine fondamental dans H pour Γ_γ. On obtient, en mettant à part l'identité :

$$\int_D K(x,x)\, dx = \mathrm{Vol}(M) + \sum_{(\gamma) \in (\Gamma) - (\mathrm{Id})} I_k(\gamma) \quad \text{où} \quad I_k(\gamma) = \int_{D_\gamma} k(x,\gamma x)\, dx \, .$$

Lorsque $M = \Gamma \backslash H$ est une variété compacte, on sait que, $\forall\, \gamma \in \Gamma - \{\mathrm{Id}\}$, γ laisse globalement invariante une géodésique et une seule a_γ de H, appelée son axe, sur laquelle elle réalise le minimum $\mu(\gamma)$ de sa fonction de déplacement $\rho(q,\gamma q)$, c'est-à-dire $\mu(\gamma) = \inf_{q \in H} \rho(q,\gamma q)$ et $\mu(\gamma) = \rho(p,\gamma p) \Leftrightarrow p \in a_\gamma$.

DÉFINITION.- Une isométrie δ sera dite primitive si elle ne s'écrit pas $\delta = \gamma^p$, $\gamma \in \Gamma$, $p > 1$.

Alors, toute isométrie $\gamma \in \Gamma - \{Id\}$ peut s'écrire d'une façon et d'une seule $\gamma = \delta^p$, $p \geq 1$, δ primitive ; p s'appelle la multiplicité de γ ; on la note $\nu(\gamma)$. Et $\mu(\gamma) = \nu(\gamma)\mu(\delta)$; $\mu(\gamma)$ et $\nu(\gamma)$ ne dépendent que de la classe (γ) de γ . De plus, d'après le théorème de Preissmann [12], Γ_γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$; plus précisément, $\Gamma_\gamma = \{\delta^p , p \in \mathbb{Z}\}$ et les δ^p ont toutes même axe, pour tout $p \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Enfin D_γ peut se décrire ainsi : $\forall\, q \in a_\delta$, on note $L_q \subset T_q(M)$ l'hyperplan tangent orthogonal à a_δ en q et $H_q = \exp_q(L_q)$ l'hyperplan de H engendré par les géodésiques issues de q parallèlement à L_q ; $H_{\delta q} = \delta H_q$ et pour q fixé, D_γ est la " partie de H entre H_q et $H_{\delta q}$ ". On peut alors "paramétrer" D ainsi : on repère $p \in D_\gamma$ par $t = \rho(q,p')$ où p' est tel que $p \in H_{p'}$, $0 \leq t \leq \mu(\delta)$, et par $v_p \in L_{p'}$ tel que $\exp_{p'}(v_p) = p$; on peut aussi remplacer v_p par $w_p \in L_q$ tel que v_p soit l'image de w_p dans le transport parallèle de longueur t le long de a_δ . On remarque alors que $k(x,\gamma x)$ ne dépend que de w_p . (Figure 1)

Pour achever le calcul, le plus simple est de prendre une présentation de H , (Figure 2), par exemple le demi-espace $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1,\ldots,x_d) \in \mathbb{R}^d \; ; \; x_d > 0\}$, muni de la métrique $g = \dfrac{1}{(x_d)^2} \sum_{i=1}^{d} dx_i \otimes dx_i$, dont les géodésiques sont les demi-droites et demi-cercles $(x_d > 0)$ euclidiens de $\mathbb{R}^d$, orthogonaux à $x_d = 0$. Par l'homogénéité à deux points, on peut choisir pour a_δ la demi-droite $x_1 = \ldots = x_{d-1} = 0$. Alors γ peut s'écrire :
$\gamma(x_1,\ldots,x_d) = (e^{\mu(\gamma)} A_\gamma(x_1,\ldots,x_{d-1}) , e^{\mu(\gamma)} x_d)$, où A_γ est une transforma-

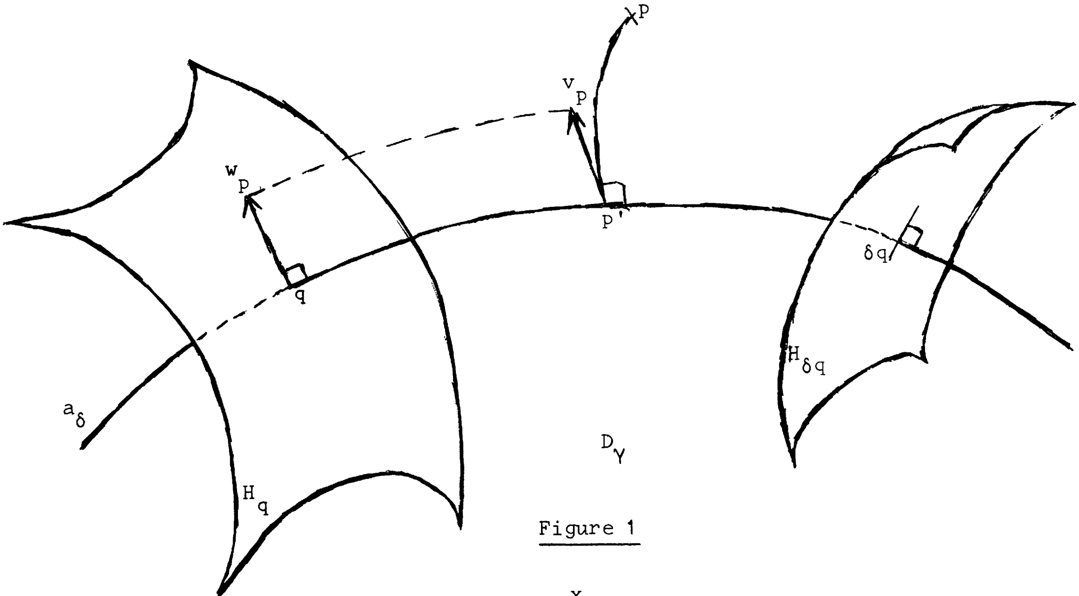

Figure 1

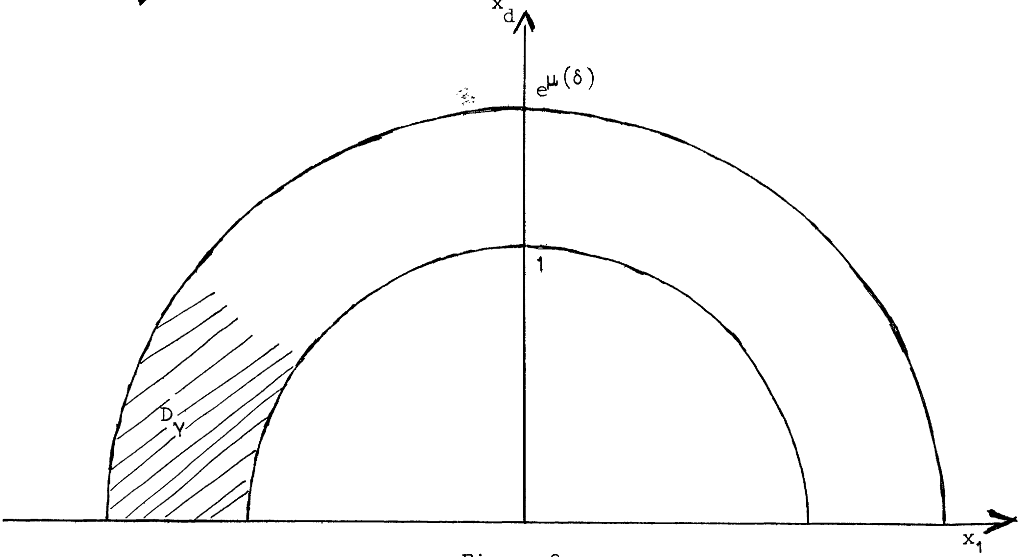

Figure 2

tion linéaire orthogonale de $\mathbb{R}^{d-1}$. Et D_γ est la partie de H entre les deux hémisphères euclidiennes $x_1^2 + \ldots + x_d^2 = 1$ et $x_1^2 + \ldots + x_d^2 = e^{2\mu(\delta)}$, $(x_d > 0)$. On a

$$\operatorname{ch} \rho(x,y) = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2}{2x_d y_d} \quad \text{et} \quad dx = (x_d)^{-d}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d .$$

On pose $Q(\gamma) = \left| \det\left(Id - \frac{A_\gamma + \tilde{A}_\gamma}{2\operatorname{ch}\mu(\gamma)}\right) \right|^{-\frac{1}{2}}$ où $\tilde{A}_\gamma$ est la transposée de A_γ .

On obtient :

$$I_s(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{\nu(\gamma)}\, Q(\gamma)\, \operatorname{ch}^{-s}\mu(\gamma)\, \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}\,\Gamma(s - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(s)} ,$$

et, pour $\operatorname{Re}(s) > d-1$:

$$(5) \qquad \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec} M} m(\lambda)\Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda)}{2}\right) =$$

$$\operatorname{Vol}(M)\pi^{-\frac{d}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) + 2^{1-s}\,\Gamma\left(s - \frac{d-1}{2}\right) \sum_{(\gamma) \in (\Gamma) - (Id)} \frac{\mu(\gamma)}{\nu(\gamma)}\, Q(\gamma) \operatorname{ch}^{-s}\mu(\gamma) .$$

6. Interprétation en termes de géodésiques fermées

On sait qu'on a une bijection canonique entre les classes de conjugaison de Γ et les classes d'homotopie libre de lacets de M , donc à toute classe $(\gamma) \in (\Gamma) - (Id)$ correspond une et une seule géodésique fermée, définie ainsi :

Soient a_γ l'axe de γ et $t \to a_\gamma(t)$ un paramétrage de a_γ proportionnel à la longueur tel que $a_\gamma(1) = \gamma a_\gamma(0)$. Si $p : H \to M$ est la projection canonique, $c_\gamma : \mathbb{R} \to M$ définie par $c_\gamma(t) = p(a_\gamma(t))$ est la géodésique fermée associée à (γ) . En particulier $\mu(\gamma)$ est la longueur de la géodésique fermée associée à c_γ , et A_γ est l'holonomie induite par le transport parallèle le long du lacet associé à c_γ . Pour décrire $\nu(\gamma)$, on introduit les définitions :

DÉFINITION.- On dit que la géodésique fermée c est la n-ième itérée de la géodésique fermée c' si $c(t) = c'(\frac{t}{n})$.

DÉFINITION.- Une géodésique fermée est dite primitive si elle n'est pas la n-ième itérée d'une autre géodésique fermée avec $n > 1$.

Alors toute géodésique fermée c est la n-ième itérée d'une géodésique fermée primitive, $n \geq 1$, et n ne dépend que de c ; on appelle n multiplicité de c et on le note $\nu(c)$.

On a γ primitive $\Leftrightarrow$ c_γ primitive ; et $\nu(\gamma) = \nu(c_\gamma)$.

La formule (5) relie donc le laplacien et les géodésiques fermées sur M . On a

$$(6) \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, M} m(\lambda)\Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda)}{2}\right) =$$

$$\mathrm{Vol}(M)\pi^{-\frac{d}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) + 2^{1-s}\,\Gamma\left(s - \frac{d-1}{2}\right)\sum_c \frac{\mu(c)}{\nu(c)}\, Q(c)\, \mathrm{ch}^{-s}\mu(c)$$

où c décrit l'ensemble des géodésiques fermées de M .

En particulier, elle montre que le spectre du laplacien détermine le spectre des longueurs. On remarque aussi que :

$$\left(\frac{\mathrm{ch}\,\mu(c) + 1}{\mathrm{ch}\,\mu(c)}\right)^{-\frac{d-1}{2}} \leq Q(c) \leq \left(\frac{\mathrm{ch}\,\mu(c) - 1}{\mathrm{ch}\,\mu(c)}\right)^{-\frac{d-1}{2}}$$

et donc $Q(c)$ tend vers 1 si $\mu(c)$ tend vers l'infini.

Si on note $\omega_M(t)$ le nombre de géodésiques fermées de longueur inférieure à t et $\pi_M(t)$ le nombre de géodésiques fermées primitives de longueur inférieure à t , on obtient (toujours par le théorème de Wiener-Ikehara) :

$$(7) \qquad \pi_M(t) \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{e^{(d-1)t}}{(d-1)t} \quad \text{et} \quad \omega_M(t) \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{e^{(d-1)t}}{(d-1)t} .$$

[Remarque.- Si on considère les sous-variétés de dimension 1 images des géodésiques fermées, à chacune d'entre elles il correspond une infinité dénombrable de géodésiques fermées, mais seulement deux géodésiques fermées primitives, une pour chaque sens de parcours.]

7. Quelques remarques

a) Ce dernier résultat précise pour le cas hyperbolique un résultat plus général.

THÉORÈME (Y. Sinai [16]).- *Si* M *est une variété riemannienne compacte à courbures comprises entre* $-b^2$ *et* $-a^2$, $0 < a < b$, *alors* :

$$e^{(d-1)a} \leq \underline{\lim}\, (\omega_M(t))^{\frac{1}{t}} \leq \overline{\lim}\, (\omega_M(t))^{\frac{1}{t}} \leq e^{(d-1)b} .$$

G. A. Margulis a, d'autre part, annoncé dans [10] des généralisations des formules (4) et (7) pour ce même cas. Ces deux résultats utilisent la théorie ergodique.

b) On a essentiellement utilisé la propriété de H d'être de rang 1 . On peut faire les mêmes calculs pour les autres espaces symétriques non compacts de rang 1 , mais le calcul final de $I_k(\gamma)$ se complique.

c) Cas des surfaces orientables

Ce cas est spécialement intéressant à plus d'un titre :

- il n'y a pas d'holonomie $A_\gamma = \mathrm{Id}$, donc le spectre du laplacien et le spectre des longueurs se déterminent mutuellement. Ils déterminent aussi la topologie de la surface M , via l'égalité $\mathrm{Vol}(M) = 4\pi(g_M - 1)$ où g_M est le genre de M (Gauss-Bonnet).
- le cas de la dimension 2 est le seul où l'on puisse faire varier le sous-groupe Γ [18]. On a alors le :

THÉORÈME (Gelfand [3 , 4], Tanaka [17]).- <u>Toute déformation de</u> Γ <u>à spectre constant est triviale</u>.

En effet, une déformation à spectre constant est à spectre des longueurs constant et on applique le lemme 4, page 150, de [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET - Le spectre d'une variété riemannienne, Lecture Notes in Math. 194, Springer, 1971.

[2] R. L. BISHOP, B. O'NEILL - Manifolds of negative curvature, Trans. A.M.S., 145 (1969), p. 1-48.

[3] I. M. GEL'FAND - Automorphic functions and the theory of representations, Pro. Int. Congress of Math., Stockholm, 1962.

[4] I. M. GEL'FAND, M. I. GRAEV, I. I. PYATETSKII-SHAPIRO - Representation theory and automorphic functions, W. B. Saunders Company, 1969.

[5] R. GODEMENT - Introduction aux travaux de Selberg, Sém. Bourbaki, 9e année, Vol. 1956/57, exposé 144, W. A. Benjamin, N.Y.

[6] R. GODEMENT - La formule des traces de Selberg, Sém. Bourbaki, 15e année, vol. 1962/63, exposé 244, W. A. Benjamin, N.Y.

[7] S. HELGASON - Differential geometry and symmetric spaces, Acad. Press, 1962.

[8] H. HUBER - Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen, I) Math. Annalen, 138 (1959), p. 1-26 ;
II) Math. Annalen, 142 (1961), p. 385-398 ;
III) Math. Annalen, 143 (1961), p. 463-464.

[9] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU - Foundations of dif. geometry II, Intersc., 1969.

[10] G. A. MARGULIS - Applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature, Functional Analysis, 3 (1969), p. 335-336.

[11] S. MINAKSHISUNDARAM, A. PLEIJEL - Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds, Canad. J. Math., 1 (1949), p. 242-256.

[12] A. PREISSMANN - Quelques propriétés globales des espaces de Riemann, Comment. Math. Helv., 15 (1943), p. 175-216.

[13] A. SELBERG - Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), p. 47-87.

[14] A. SELBERG - On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960, p. 147-164.

[15] SÉMINAIRE BERGER - Variétés à courbure négative, 1970/1971, Université Paris VII.

[16] Y. SINAI - The asymptotic behavior of the number of closed geodesics on a compact manifold of negative curvature, Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., 30 (1966), p. 1275-1296.

[17] S. TANAKA - Selberg's trace formula and spectrum, Osaka J. Math., 3 (1966), p. 205-216.

[18] A. WEIL - On discrete subgroups of Lie groups,
I) Ann. Math., 72 (1960), p. 369-384 ;
II) Ann. Math., 75 (1962), p. 578-602.

[19] N. WIENER - Tauberian theorems, Ann. Math., 33 (1932), p. 1-100.

[20] J. WOLF -Spaces of constant curvature, McGraw-Hill, 1967.