GÉRARD SCHIFFMANN

Un analogue du théorème de Borel-Weil-Bott dans le cas non compact

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 398, p. 323-336
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__323_0>

Séminaire BOURBAKI

23e année, 1970/71, n° 398 Juin 1971

UN ANALOGUE DU THÉORÈME DE BOREL-WEIL-BOTT DANS LE CAS NON COMPACT

Par Gérard SCHIFFMANN

En 1965 ,à l'occasion d'un exposé sur la dimension de certains espaces de formes automorphes ,Langlands [11] a conjecturé que le théorème de Borel Weil-Bott [9] devait pouvoir s'étendre au cas de la série discrète .Cette extension a été obtenue par M.S. Narasimhan et K. Okamoto [12] dans le cas hermitien symétrique ,puis par W.Schmid [19] dans le cas général .Toutefois dans ces deux mémoires ,les auteurs sont obligés de faire la même hypothèse restrictive : "λ assez régulier " .

§ 1. Rappels sur la série discrète .

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple ,non compact ,connexe ,à centre fini et K un sous-groupe compact maximal de G .On suppose que le rang de G est égal au rang de K .Soit H un sous-groupe de Cartan de K donc de G .Soient $\underline{g}$,$\underline{k}$,$\underline{h}$ les algèbres de Lie de G ,K ,H respectivement et $\underline{g}_{\mathbb{C}}$,$\underline{k}_{\mathbb{C}}$,$\underline{h}_{\mathbb{C}}$ leurs complexifiées .On note W le groupe de Weyl de $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ et W_K celui de $\underline{k}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\underline{h}_{\mathbb{C}}$ .Le groupe des caractères unitaires de H peut s'identifier à un réseau Λ dans $\underline{h}_R^* = i\underline{h}^*$.Un point de Λ est régulier si son stabilisateur dans W est trivial ;soit Λ' l'ensemble des points réguliers.

Pour tout $\lambda \in \Lambda'$,Harish-Chandra a défini une représentation unitaire irréductible π_λ de G ,de carré intégrable .On obtient ainsi toutes les représentations de carré intégrable :c'est la série discrète .De plus π_λ

est équivalente à $\pi_{\lambda'}$ si et seulement si λ et λ' sont conjugués par W_K . Tout ceci est démontré dans [6] .

§2 . La première conjecture de Langlands .

Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie complexe ,connexe ,simplement connexe ,d'algèbre de Lie $\underline{g}_{\mathbb{C}}$ .Pour simplifier ,on suppose que G est le sous-groupe analytique réel de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\underline{g}$ .Soit P un système de racines positives de $(\underline{g}_{\mathbb{C}},\underline{h}_{\mathbb{C}})$;avec les notations usuelles ,posons :

$$\underline{n} = \bigoplus_{\alpha>0} \underline{g}^{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \underline{b} = \underline{h}_{\mathbb{C}} \oplus \underline{n} \ .$$

Le sous-groupe B ,d'algèbre de Lie $\underline{b}$,est un sous-groupe complexe de $G_{\mathbb{C}}$ et $G_{\mathbb{C}}/B$ est une variété analytique complexe ,compacte .Comme $B \cap G = H$,on peut identifier G/H à une sous-variété analytique réelle de $G_{\mathbb{C}}/B$ .Comme $\dim_{\mathbb{R}} G/H = \dim_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{C}}/B$ cette sous-variété est ouverte .On munit G/H de la structure complexe induite ;on notera que cette structure dépend du choix de P .Soit $\lambda \in \Lambda$;le caractère correspondant e^{λ} de H se prolonge de façon unique en un caractère holomorphe de B donc définit un fibré holomorphe en droites de base $G_{\mathbb{C}}/B$,associé au fibré principal $B \longrightarrow G_{\mathbb{C}} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}/B$ .Par restric- -tion ,on obtient un fibré holomorphe en droites ,de base $D = G/H$;soit $\mathcal{L}_{\lambda}$ ce fibré ;il est homogène (G opère par translations à gauche) .Les sections C^{∞} de $\mathcal{L}_{\lambda}$ s'identifient aux applications $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$,de classe C^{∞} et telles que $f(gh) = e^{-\lambda(h)} f(g)$;elles sont holomorphes si $f * \underline{n} = 0$.

Par analogie avec le cas compact ,on considère les espaces de cohomologie $H^j(D\ ,\ O_{\lambda})$ où O_{λ} est le faisceau des germes de sections holomorphes de $\mathcal{L}_{\lambda}$. Ce sont des G-modules .Si ρ désigne la demi-somme des racines positives , on peut espérer que ,pour $\lambda + \rho$ régulier ,ces G-modules sont tous nuls sauf un et que ce dernier ,muni d'une structure hilbertienne convenable ,est équivalent à $\pi_{\lambda+\rho}$ .La thèse de Schmid contient quelques résultats dans cette direction [17] , [18] .En fait Langlands propose de remplacer ces groupes de cohomologie par des groupes de L^2-cohomologie ,groupes qu'on va maintenant définir .

Soit $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$ l'espace des formes différentielles sur D ,de classe C^∞, à support compact ,à valeurs dans $\mathcal{L}_\lambda$ et de type (0,j) .Le fibré $\mathcal{L}_\lambda$ étant holomorphe ,on dispose de l'opérateur

$$\bar{\partial} : \ A^j(\mathcal{L}_\lambda) \longrightarrow A^{j+1}(\mathcal{L}_\lambda) \ .$$

Faisons opérer H dans $C_c^\infty(G)$ (fonctions C^∞ à support compact) par translations à droite et dans $\Lambda^j \underline{n}^*$ par la représentation coadjointe .Soit

$$(C_c^\infty(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda}$$

le sous-espace des éléments qui se transforment suivant le caractère $e^{-\lambda}$ de H. Comme $\underline{n}$ s'identifie à l'espace des vecteurs tangents antiholomorphes à D au point eH ,on a :

$$A^j(\mathcal{L}_\lambda) \approx (C_c^\infty(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda} \ ,$$

cet isomorphisme étant compatible avec les structures de G-modules .Munissons $\Lambda^j \underline{n}^*$ d'une structure d'espace de Hilbert ,invariante par H et $C_c^\infty(G)$ de la structure préhilbertienne induite par celle de $L^2(G)$ .Par rapport à la structure produit (et induite) sur $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$,l'opérateur $\bar{\partial}$ possède un adjoint formel $\bar{\partial}^*$;soit $\omega = \bar{\partial}\,\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$,l'opérateur de Laplace-Beltrami .On peut appli--quer ω ,au sens distributions ,à tout élément du complété

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = (L^2(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda}$$

de $A^j(\mathcal{L}_\lambda)$ .Comme ω est elliptique ,son noyau $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$ est un sous-espace fermé ,donc de Hilbert dont les éléments sont de classe C^∞.Enfin comme $\bar{\partial}$

donc ω commute aux translations à gauche par G ,on obtient ainsi une repré--sentation unitaire de G dans $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$.

Conjecture. (*Langlands*)

a) *Si* $\lambda + \rho$ *est singulier ,alors ,quel que soit* j *,on a* $K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0$.

b) *Si* $\lambda + \rho$ *est régulier ,alors il existe un entier* $j(\lambda + \rho)$ *tel que*

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad j \neq j(\lambda + \rho) .$$

c) *Si* $\lambda + \rho$ *est régulier ,alors la représentation unitaire de* G *dans* $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$ *est irréductible et équivalente à* $\pi_{\lambda+\rho}$.

§ 3. *Résultats* .

La partie a) de la conjecture reste ouverte .Pour b) et c) munissons $\underline{h}^*_{\mathbb{R}}$ du produit scalaire usuel et rappelons qu'une racine positive α est dite compacte si $\underline{g}^\alpha \subset \underline{k}_{\mathbb{C}}$,non compacte dans le cas contraire .Si λ est régulier soit

a_1 le nombre de racines positives compactes α telles que $\langle \lambda , \alpha \rangle < 0$,

a_2 le nombre de racines positives non compactes telles que $\langle \lambda , \alpha \rangle > 0$

et $j(\lambda) = a_1 + a_2$.

Théorème 1 (*Griffiths*).*Il existe une constante* $b > 0$ *possédant la propriété suivante* : *si*

$$|\langle \lambda , \alpha \rangle| > b \qquad \underline{\text{pour toute racine}} \quad \alpha > 0 , \tag{1}$$

alors

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad j \neq j(\lambda + \rho) .$$

Ce résultat est déja signalé dans [11] et il est démontré dans [4] .Dans le cas où G/K est hermitien symétrique ,on peut attacher à toute représentation unitaire irréductible de K un fibré holomorphe de base G/K puis procéder comme au §2 .L'analogue du théorème 1 (λ étant le poids dominant) est démontré dans [12] .

Si la condition 1 est satisfaite ,on dit que λ est <u>assez</u> <u>régulier</u> (ou suffisament non singulier ...) .

<u>Théorème</u> 2 .<u>Si</u> λ <u>est assez régulier</u> ,<u>alors la représentation de</u> G <u>dans</u> $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$ <u>est unitaire</u> ,<u>irréductible et équivalente à</u> $\pi_{\lambda+\rho}$.

Ce théorème (ou plutot son équivalent pour les fibrés sur G/K) est démontré dans [12] pour le cas hermitien symétrique et dans[19] pour le cas général .

Si $j(\lambda+\rho)=0$,on retrouve exactement le cas étudié par Harish-Chandra [5] . Il ne peut se produire que si G/K est hermitien symétrique et la construction du §2 se réduit à celle de [5] .

Revenons un instant aux groupes de cohomologie usuels .Soit ρ_K la demi--somme des racines positives compactes et ,pour $\mu\in\Lambda$,soit $Q(\mu)$ le nombre de manières distinctes dont μ peut s'écrire comme somme de racines positives non compactes .Soit s le nombre de racines positives compactes .

<u>Théorème</u> 3 [18] .<u>Il existe une constante positive</u> b <u>possédant la propriété suivante</u> : <u>si</u> $\langle\lambda,\alpha\rangle<-b$ <u>pour toute racine</u> $\alpha>0$,<u>alors</u> $H^j(D,O_\lambda)=0$ <u>pour</u> $j\neq s$ <u>et on peut munir</u> $H^s(D,O_\lambda)$ <u>d'une structure d'espace de Fréchet sur lequel</u> G <u>opère continument</u> .<u>Si on restreint cette représentation à</u> K ,<u>alors le</u> K-<u>module irréductible de poids dominant</u> μ <u>intervient avec la multiplicité</u>

$$(-1)^s\sum_{w\in W_K}\varepsilon(w)\,Q(\lambda+\rho_K-w(\mu+\rho_K)) \tag{2}$$

Remarquons que ,sous les hypothèses du théorème 3 ,on a $j(\lambda+\rho)=s$ .D'autre part les multiplicités (2) sont celles qui ont été <u>conjecturées</u> <u>par</u> <u>Blattner</u> . Enfin ,toujours sous les hypothèses du théorème ,Schmid construit une applica--tion injective de $K^s(\mathcal{L}_\lambda)$ dans $H^s(D,O_\lambda)$ ...

§ 4. Bouts de démonstrations .

Pour le théorème 1 ,d'après un résultat d'Andreotti-Vesentini [1] ,il suffit de prouver l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$(\omega f \mid f) \geq c\,(f \mid f) \text{ pour } f \in A^j(\mathcal{L}_\lambda) \text{ et } j \neq j(\lambda + \rho)\ .$$

Or ,en se donnant un peu de peine ,on peut calculer explicitement ω ce qui permet d'évaluer $(\omega f \mid f)$ et d'obtenir l'inégalité ,sous l'hypothèse assez régulier .L'expression de ω tenant quatre lignes ,on ne peut que ren--voyer le lecteur à [4] .

Pour le théorème 2 ,considérons l'espace $L^2(G) \otimes \Lambda \underline{n}^*$.On le munit d'une structure de $\underline{n}$-module en faisant opérer $\underline{n}$ sur le premier facteur par dériva--tions à droite et sur le deuxième par la représentation coadjointe .L'opéra--teur de cobord pour la cohomologie de ce $\underline{n}$-module a pour restriction à

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = (L^2(G) \otimes \Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda}$$

précisément l'opérateur $\bar{\partial}$ .Bien entendu ces opérateurs sont non bornés ce qui est la source de pas mal d'ennuis .D'autre part ,si on fait opérer G par translations à gauche sur le premier facteur ,alors l'opérateur de cobord , donc aussi ω commute à G .En utilisant l'existence de la formule de Plancherel (mais non sa forme exacte) on peut donc espérer décomposer les groupes de L^2-cohomologie en somme continue de "groupes de cohomologie formels " associés à chaque représentation unitaire irréductible de G .C'est ce qu'on va essayer d'expliquer .

Première étape.Soit π une représentation unitaire irréductible de G ,d'espace E et E_o le sous-espace des vecteurs K-finis .Soit δ l'opérateur de cobord pour la cohomologie du $\underline{n}$-module E_o et δ^* son adjoint formel .Soit Ω_K l'opérateur de Casimir de K et $C = (1 + \pi(\Omega_K))^{-1/2} \otimes 1$ .On constate aisément que C est un opérateur borné ,compact et auto-adjoint .D'autre part $\delta + \delta^*$

possède un unique prolongement fermé et le domaine de ce prolongement coincide avec celui de C^{-1} .Ce point n'est pas trivial .Il en résulte que $\delta + \delta^*$ est essentiellement auto-adjoint ,son unique prolongement fermé étant aussi son unique prolongement auto-adjoint .Enfin un calcul simple montre que $C(\delta + \delta^*)$ et $(\delta + \delta^*)C$ sont bornés et que $C(\delta + \delta^*)^2 C$ est somme d'un opérateur compact et d'un opérateur inversible ,*donc est à indice* .On en déduit que le *noyau* $K(\pi)$ *de* $\delta + \delta^*$ *est de dimension finie* .Soit alors

$$K^j(\pi) = K(\pi) \cap (E \otimes \Lambda^j \underline{n}^*) .$$

$K(\pi)$ est la somme directe des $K^j(\pi)$ .Comme Ad(H) commute à δ ,chaque $K^j(\pi)$ est un H-module .

Soit q la dimension de $\underline{n}$ et posons :

$$\Delta_+ = \prod (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \qquad \text{pour } \alpha \text{ positive non compacte ,}$$

$$\Delta_K = \prod (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}) \qquad \text{pour } \alpha \text{ positive compacte .}$$

D'après Harish-Chandra ,pour $f \in C^\infty(K)$,l'opérateur

$$\int_K f(k)\,\pi(k)\,dk$$

est à trace et cette trace définit une distribution τ_π sur K .

Proposition 1.*Les espaces* $H^j(\pi)$ *sont des* H-*modules de dimension finie et si* g *désigne la somme alternée de leurs caractères ,alors* $(-1)^q e^{-\rho} \Delta_K^{-1} g$ *se prolonge en une fonction analytique sur* K *qui est centrale et qui coincide avec la distribution* $\Delta_+ \tau_\pi$.

Remarque.G' dénotant les points réguliers de G ,la restriction de τ_π à l'ou--vert $K \cap G'$ de K coïncide avec la restriction du caractère usuel de π (Harish-Chandra) .En particulier si π appartient à la série discrète ,on peut ,grace à la formule d'Harish-Chandra ,qui donne la valeur du caractère sur les points elliptiques ,calculer explicitement g .Enfin dans le cas général la distribution τ_π sur K n'appartient pas à $L^1(K)$ .La proposition précédente montre que $\Delta_+\tau_\pi$ est une fonction analytique sur K .

Pour démontrer la proposition ,on remarque d'abord que $K(\pi)$ est aussi le noyau de $C(\delta+\delta^*)$ qui est borné .Le coefficient de e^λ dans g n'est autre que l'indice de

$$C(\delta+\delta^*) : (E\otimes\Lambda^+ \underline{n}^*)_\lambda \longrightarrow (E\otimes\Lambda^- \underline{n}^*)_\lambda .$$

A l'aide d'une homotopie ,on peut remplacer δ par δ_o opérateur de cobord associé à la sous-algèbre $\underline{n}\cap\underline{k}_{\mathbb{C}}$ de $\underline{n}$ .Ceci permet de décomposer E suivant les composantes isotypiques de $\pi|_K$ et la démonstration s'achève aisément .

<u>Deuxième</u> <u>étape</u>.Soit $\hat{G}$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G .Pour chaque classe ,choisissons un représentant π_a ,d'espace E_a .Soit π_a^* la représentation contragrédiente dans l'espace E_a^* .La formule de Plancherel peut s'écrire

$$L^2(G) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes E_a^* \, da$$

où da est la mesure de Plancherel .On en déduit que

$$L^j(\mathcal{L}_\lambda) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes (E_a^*\otimes\Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda} \, da .$$

Par définition $K^j(\mathcal{L}_\lambda) = \mathrm{Ker}(\delta+\delta^*)^2$;en fait c'est aussi le noyau de $\delta+\delta^*$ et on établit sans trop de mal la proposition suivante :

<u>Proposition</u> 2.<u>La</u> <u>famille</u> <u>de</u> <u>sous-espaces</u> $E_a\otimes(K^j(\pi_a^*))_{-\lambda}$ <u>dépend</u> <u>mesurablement</u> <u>de</u> a <u>et</u>

$$K^j(\mathcal{L}_\lambda) = \int_{\hat{G}} E_a \otimes (K^j(\pi_a^*))_{-\lambda} \, da .$$

__Corollaire__. __Si__ $j \neq j(\lambda+\rho)$ __et si__ λ __est assez régulier__ ,__alors__ $K^j(\pi_a^*)_{-\lambda} = 0$ __pour presque tout__ a .

Remarquons aussi que la multiplicité de π dans $K^j(\mathcal{L}_\lambda)$ est égale à la dimension de $K^j(\pi^*)_{-\lambda}$.

Si $\pi = \pi_{\mu+\rho}$ appartient à la série discrète alors $\pi^* = \pi_{-\mu-\rho}$ est de mesure de Plancherel strictement positive .Pour λ assez régulier ,on a donc $K^j(\pi^*)_{-\lambda} = 0$ si $j \neq j(\lambda+\rho)$ et par suite le coefficient de $e^{-\lambda}$ dans la fonction g de la proposition 1 (pour $\pi_{-\mu-\rho}$) est au signe près la dimension de $K^{j(\lambda+\rho)}(\pi_{-\mu-\rho})$ c'est-a-dire la multiplicité de $\pi_{\mu+\rho}$ dans $K^{j(\lambda+\rho)}(\mathcal{L}_\lambda)$.

D'après la formule des caractères d'Harish-chandra ,on a

$$\Delta_K \, \Delta_+ \, e^\rho \, \tau_{\pi^*_{\mu+\rho}} = \sum_{w \in W_K} \varepsilon(w)\, e^{-w(\mu+\rho)} \quad .$$

Par suite la multiplicité cherchée est 1 ou 0 suivant que $\lambda+\rho$ et $\mu+\rho$ sont ou ne sont pas conjugués par W_K .Si on se rappelle que la série discrète est paramétrée par Λ' modulo W_K ,on voit que la démonstration du théorème sera terminée si on démontre que le spectre continu est vide .Ce dernier point résulte des deux remarques suivantes :

-si une représentation unitaire irréductible π de G est elle que $K^j(\pi)_{-\lambda} \neq 0$ pour un seul j ,alors $\pi(\Omega) = \|\lambda+\rho\|^2 - \|\rho\|^2$ où Ω est le Casimir de G ;c'est une conséquence de la proposition 1 .

-l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G telles que $\pi(\Omega)$soit la multiplication par une constante donnée est de mesure de Plancherel nulle (résultat provisoirement inédit d'Harish-Chandra) .

§ 5. __Une deuxième conjecture de Langlands__ .

Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe discret à quotient compact .Soient toujours $D = G/H$ et $\mathcal{L}_\lambda$ un fibré holomorphe de base D . Soit $\mathcal{F}_\lambda$ le faisceau sur

$\Gamma\backslash G/H = \Gamma\backslash D$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à tout ouvert U de $\Gamma\backslash D$ l'espace vectoriel des sections holomorphes Γ-invariantes de $\mathcal{L}_\lambda$ au-dessus de l'image réciproque de U dans D. D'autre part, rappelons que la représentation évidente de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ se décompose discrètement avec multiplicités finies. Soit $n(\pi)$ la multiplicité d'une représentation unitaire irréductible .

Théorème 4. (Griffiths-Schmid [4], [19]). *Il existe une constante* $b>0$ *ayant la propriété suivante : si* $|\langle\lambda,\alpha\rangle|>b$ *pour toute racine* $\alpha>0$, *alors*

$$H^j(\Gamma\backslash D,\mathcal{F}_\lambda) = 0 \text{ pour } j \neq j(\lambda+\rho)$$

et

$$\dim. H^{j(\lambda+\rho)}(\Gamma\backslash D,\mathcal{F}_\lambda) = n(\pi_{\lambda+\rho}) .$$

Ce résultat avait été conjecturé par Langlands, avec seulement l'hypothèse $\lambda+\rho$ régulier .

La démonstration est très voisine de celle des théorèmes 1 et 2. Tout d'abord, d'après un théorème de Borel [3], il existe un sous-groupe Γ' de Γ normal et d'indice fini qui opère dans D sans points fixes. Utilisant ce fait et des arguments standarts (la base $\Gamma\backslash D$ est maintenant compacte), on montre que $H^j(\Gamma\backslash D,\mathcal{F}_\lambda)$ est isomorphe au noyau de

$$\bar\partial+\bar\partial^* : (C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\Lambda^j \underline{n}^*)_{-\lambda} \longrightarrow (C^\infty(\Gamma\backslash G)\otimes\Lambda\, \underline{n}^*)_{-\lambda} .$$

En utilisant une forme explicite de $\omega = (\bar\partial+\bar\partial^*)^2$, on peut prouver que, pour λ assez régulier, la condition $\omega f = 0$ implique $f = 0$ pour $j \neq j(\lambda+\rho)$. Formellement c'est le même calcul que pour le théorème 1 .

Pour la deuxième partie du théorème (Schmid) on procède comme pour le théorème 2. On montre tout d'abord que

$$H^j(\Gamma\backslash D,\mathcal{F}_\lambda) \simeq \bigoplus_{a\in\hat G}\ \bigoplus_{1\leq k\leq n(a)} (K^j(\pi_a))_{-\lambda}$$

ce qui donne :

$$\dim . H^j(\Gamma \backslash D, \mathcal{F}_\lambda) = \sum n(a) \dim . (K^j(\pi_a))_{-\lambda} .$$

Si λ est assez régulier et si $n(\pi) \neq 0$,on a donc

$$K^j(\pi)_{-\lambda} = 0 \quad \text{pour } j \neq j(\lambda + \rho) .$$

Dans ces conditions supposons d'abord que $\pi = \pi_{\mu+\rho}$ appartienne à la série discrète .On avu que la dimension de $K^{j(\lambda+\rho)}(\pi_{\mu+\rho})_{-\lambda}$ était 1 ou 0 suivant que que $-(\mu+\rho)$ et $\lambda+\rho$ étaient ou non conjugués par W_K .La contribution de la série discrète à la dimension de $H^j(\Gamma \backslash D, \mathcal{F}_\lambda)$ est donc égale à $n(\pi_{-\lambda-\rho})$ mais comme $\pi_{-\lambda-\rho} = \pi^*_{\lambda+\rho}$,on a $n(\pi_{-\lambda-\rho}) = n(\pi_{\lambda+\rho})$ .Il reste à vérifier que si π n'appartient pas à la série discrète alors

$$n(\pi) \dim . (K^{j(\lambda+\rho)}(\pi))_{-\lambda} = 0 .$$

Supposons $n(\pi) \neq 0$;on a $K^j(\pi)_{-\lambda} = 0$ pour $j \neq j(\lambda+\rho)$ .Soit

$$\chi = \Delta_K^{-1} \sum_{w \in W_K} \varepsilon(w)\, e^{w(\lambda+\rho)}$$

c'est le caractère d'un K-module irréductible .Les hypothèses faites sur et la proposition 1 montrent alors aisément que $\tau_\pi(\Delta_+\chi) \neq 0$ (regarder le coefficient de $e^{-\lambda-\rho}$ dans $\Delta_+ \Delta_K \tau_\pi$ et utiliser les propriétés de symétrie par rapport à W_K) .Comme on peut exprimer $\Delta_+\chi$ comme combinaison linéaire de caractères de K-modules irréductibles ,les relations d'orthogonalité entre les caractères de K permettent d'obtenir des informations sur la décomposition de $\pi|_K$ .Par un raisonnement non trivial ,on prouve que π possède un poids dominant (relativement aux K-modules)et Schmid promet de démontrer [20] que ceci entraine l'appartenance de π à la série discrète . Chemin faisant ,on est obligé de supposer λ très régulier c'est-à-dire de remplacer la constante b qui donne la nullité des groupes de cohomologie par une constante plus grande .

La dernière partie du mémoire de Schmid contient un calcul explicite des multiplicités $n(\pi_{\lambda+\rho})$,pour λ assez régulier .La méthode utilisée généralise celle employée par Hirzebruch [7] et s'appuie sur le théorème de Lefschetz holomorphe d'Attiyah-Singer [2] .Une approche complètement diffé--rente (Langlands [10] [11]) utilise un cas particulier de la formule des traces de Selberg .On doit alors supposer $\pi_{\lambda+\rho}$ intégrable .Bien que ce soit très probable on ignore si λ assez régulier implique $\pi_{\lambda+\rho}$ intégrable .

Pour terminer signalons que ,dans le cas hermitien symétrique ,les démonstrations de [12] sont sensiblement différentes de celles de Schmid . Enfin le problème de la construction de la série discrète peut être abordé d'un point de vue voisin mais distinct :on part de certaines représentatiions de dimension finie de K et on considère le fibré C^{∞} correspondant ,de base G/K ;dans l'espace des sections de carré intégrable on introduit un opérateur différentiel elliptique du premier ordre ,qui commute à G .Le noyau de cet opérateur est un G-module unitaire qui ,au moins dans certains cas ,appartient à la série discrète .Un certain nombre d'exemples sont traités dans [17] .De plus on vient de recevoir ,trop tard pour pouvoir en tenir sérieusement compte ,deux "preprints " de Parthasarathy [15] [16] où ce point de vue est systématiquement utilisé .

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.ANDREOTTI et E.VESENTINI ,Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds , Inst. Hautes Etudes Sci. Publ.Math. 25 (1965) ,313-362 .

[2] M.F. ATIYAH et I.M. SINGER - The index of elliptic operators III, Ann.of Math. 87 ,(1968) ,546-604 .

[3] A.BOREL ,Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces ,Topology 2 (1963) ,111-122 .

[4] P.GRIFFITHS et W.SCHMID ,Locally homogeneous complex manifolds ,Acta Math.

[5] HARISH-CHANDRA ,Representations of semi-simple Lie groups IV ,V ,VI Amer. J. Math. 77 (1955) ,743-777 , 78 (1956) ,1-41 et 564-628 .

[6] HARISH-CHANDRA ,Discrete series II ,Acta .Math. 116 (1966) ,1-111 .

[7] HIRZEBRUCH F. ,Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch ,in Symp. Intern. Top. Alg. 1956 ,129-144 ,Universidad de Mexico 1958 .

[8] R.HOTTA. , on a realization of the discrete series for semi-simple Lie groups ,à paraitre .

[9] B.KOSTANT ,Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Ann. of Math. ,74 (1961) ,329-387 .

[10] R.P.LANGLANDS ,The dimension of spaces of automorphic forms ,Amer.J.Math. 85 (1963) ,99-125 .

[11] R.P.LANGLANDS ,Dimension of spaces of automorphic forms ,in algebraic groups and discontinuous subgroups ,Proc. of Symposia in Pure Math. vol IX ,Amer. Math. Soc. Providence R.I. (1966) .

[12] M.S.NARASIMHAN et K.OKAMOTO ,An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of the non compact type ,Ann. of Math.

[13] K.OKAMOTO ,on induced representations , Osaka J.Math. 4 (1967) ,85-94

[14] K.OKAMOTO et H.OZEKI ,on square integrable -cohomology spaces attached to hermitian symmetric spaces ,Osaka J.Math. (1967) 95-110 .

[15] R.PARTHASARATHY ,Dirac operators and the discrete series ,à paraitre

[16] R.PARTHASARATHY ,A note on the vanishing of certain L^2-cohomologies ,

[17] W.SCHMID ,Homogeneous complex manifolds and representations of semi-simple groups , non publié (thèse ,Berkeley 1967).

[18] W.SCHMID ,Homogeneous complex manifolds and representations of semi-simple Lie groups ,Proc. Nat.Acad. Sci. U.S.A. 59 (1968) ,56-59 .

[19] W.SCHMID ,On a conjecture of Langlands ,Annals of Math. 1971 .

[20] W.SCHMID ,Some properties of square integrable representations of semi-simple Lie groups ,à paraitre .