PIERRE GRISVARD

Résolution locale d'une équation différentielle

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 391, p. 183-196

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1970-1971__13__183_0>

Séminaire BOURBAKI
23e année, 1970/71, n° 391 Février 1971

RÉSOLUTION LOCALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

selon Nirenberg et Trèves

par Pierre GRISVARD

On cherche des conditions sur un opérateur différentiel linéaire P pour que l'équation

$$\square \qquad Pu = f$$

soit localement résoluble au point x_o , c'est-à-dire pour qu'il existe un voisinage V de x_o tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(V)$, il existe au moins une distribution u dans V , solution de l'équation $\square$.

Dans le cas particulier où P est à coefficients constants, la résolubilité locale résulte de l'existence d'une solution élémentaire E (solution de $PE = \delta$) démontrée par Ehrenpreis [2] et Malgrange [6] sans aucune restriction sur P .

Un contre-exemple dû à H. Lewy [5] montre que par contre, dans le cas où P est à coefficients variables même analytiques (ou polynômes !), il n'y a aucun espoir d'obtenir la résolubilité locale sans restriction sur P .

La méthode qui consiste à considérer localement un opérateur à coefficients variables comme une petite perturbation d'un opérateur à coefficients constants (ou méthode de "l'artifice de Korn") a permis à Peetre [8] de prouver la résolubilité locale pour les "opérateurs à force constante" ; ceci fait apparaître l'intérêt des opérateurs à caractéristiques réelles simples ou opérateurs de "type principal" (cf. plus loin).

L'étape suivante a été la démonstration de la résolubilité locale pour les opérateurs à caractéristiques réelles simples et à coefficients réels (au moins pour la partie principale) par Hörmander [3].

Enfin, récemment Nirenberg et Trèves [7] ont trouvé une condition nécessaire (dans le cas où les coefficients sont différentiables) et suffisante (lorsque les coefficients sont analytiques) pour la résolubilité locale d'un opérateur de type principal ; ce sera l'objet essentiel de cet exposé. Des résultats très proches concernant l'hypoellipticité ont été annoncés par Egoroff [1]. Le cas à deux variables avait été précédemment résolu par Trèves [9].

1. Notations.

On utilisera les notations usuelles dans la théorie des équations aux dérivées partielles : Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions numériques différentiables et à support compact dans Ω , $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions dans Ω et enfin $L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans Ω . Soit

$$P(x\,;D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha , \qquad x \in \Omega$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients a_α différentiables dans Ω (α est un multi-entier $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$) ; on désigne par $p(x\,;\xi)$ son symbole :

$$p(x\,;\xi) = e^{-i\langle x\,;\,\xi\rangle}\, P(e^{i\langle x\,;\,\xi\rangle}) , \qquad x \in \Omega ,\ \xi \in \mathbb{R}^n .$$

On désigne par P_m la partie principale (homogène de degré m) de P et p_m le symbole correspondant.

On notera (R.L. x_o) la propriété de résolubilité locale au voisinage de x_o :

(R.L. x_o) Il existe un voisinage V de x_o tel que pour toute $f \in \mathcal{D}(V)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(V)$ solution de l'équation $\square$.

2. Opérateurs à force constante.

Au symbole p on associe un nouveau symbole $\tilde{p}$ en posant

$$\tilde{p}(x\,;\,\xi)^2 = \sum_\beta |D_\xi^\beta\, p(x\,;\,\xi)|^2$$

et P est dit à "force constante" si le quotient $\tilde{p}(x\,;\,\xi)[\tilde{p}(y\,;\,\xi)]^{-1}$ reste borné lorsque ξ décrit $\mathbb{R}^n$ et $(x\,,\,y)$ décrit $K \times K$ où K est un compact quelconque contenu dans Ω ; alors pour un tel opérateur on vérifie que si E_o est une solution élémentaire de $P(x_o\,;\,D)$, la norme dans $L^2(V)$ de l'opérateur

$$f \mapsto \{P(x\,;\,D) - P(x_o\,;\,D)\}E_o * f$$

peut être rendue arbitrairement petite en diminuant V ; ceci implique la propriété $(R.L.\ x_o)$.

Exemples.- (i) Si P est elliptique (c'est-à-dire $p_m(x\,;\,\xi) \neq 0$ pour $\xi \neq 0$) alors il est à force constante.

(ii) Si P_m est à coefficients constants et

$$|\mathrm{grad}_\xi\, p_m(\xi)|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\partial p_m}{\partial \xi_k}(x\,;\,\xi)\right|^2 \neq 0\,, \qquad \xi \neq 0\,,$$

alors P est à force constante.

Ce second exemple amène à considérer les opérateurs de "type principal" :

DÉFINITION.- P est dit de "type principal" si $\mathrm{grad}_\xi\, p_m(x_o\,;\,\xi_o) \neq 0$ pour tout couple $x_o \in \Omega$ et $\xi_o \neq 0$ tel que $p_m(x_o\,;\,\xi_o) = 0$.

Il revient au même de supposer $\mathrm{grad}_\xi\, p_m(x_o\,;\,\xi_o) \neq 0$ pour tout couple $x_o \in \Omega$ et $\xi_o \neq 0$ car si $p_m \neq 0$ alors $\mathrm{grad}_\xi\, p_m \neq 0$ grâce à l'identité d'Euler. En d'autres termes les racines réelles de $p_m(x\,;\,\xi) = 0$ sont simples.

3. Le contre-exemple de H. Lewy.

Il est relatif à l'opérateur d'ordre $m = 1$ défini dans $\mathbf{R}^3$ par

$$P(x\,;D) = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3$$

et il existe $f \in C^{\infty}(\mathbf{R}^3)$ telle que l'équation $\square$ n'ait pas de solution distribution et ceci dans aucun ouvert de $\mathbf{R}^3$. L'opérateur P est de type principal car

$$\mathrm{grad}_{\xi}\, p_1(x\,;\xi) = \{-i\,;1\,;-2(x_1 + ix_2)\} \neq 0$$

pour tout x et tout ξ. Partant de cet exemple, Hörmander [3] a démontré qu'une condition nécessaire pour que P ait la propriété (R.L. x_0) est que $c_{2m-1}(x\,;\xi) = 0$ dès que $p_m(x\,;\xi) = 0$ pour $\xi \in \mathbf{R}^n$ et x dans un voisinage de x_0, où c_{2m-1} désigne la partie homogène de degré $2m-1$ du symbole c du commutateur

$$C(x\,;D) = [\bar{P}(x\,;D)\,;P(x\,;D)]$$

(avec $\bar{P}(x\,;D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a_{\alpha}(x)}\, D^{\alpha}$). En particulier, cette condition est évidemment vérifiée lorsque P est à coefficients réels, et réciproquement Hörmander [3] a démontré la propriété (R.L. x_0) pour tout opérateur à coefficients réels et de type principal. Enfin tous ces résultats sont généralisés par

4. Le théorème de Nirenberg et Trèves.

Dans toute la suite, on suppose que P est de type principal ; soit $z \in \mathbf{C}$, on appelle bande bicaractéristique de $\mathrm{Re}\, zp_m$ (au voisinage d'un point (x_0, ξ_0) tel que $\mathrm{grad}_{x,\xi} \mathrm{Re}\, zp_m(x_0, \xi_0) \neq 0$) une courbe Γ orientée dans $\Omega \times \mathbf{R}^n$, passant par le point (x_0, ξ_0) et définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{grad}_{\xi} \mathrm{Re}\, zp_m(x(t)\,;\xi(t)), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi'(t) = -\mathrm{grad}_{x} \mathrm{Re}\, zp_m(x(t)\,;\xi(t))\ ; \\ \xi(0) = \xi_0 . \end{cases}$$

La fonction $\mathrm{Re}\, zp_m$ est évidemment constante sur Γ. L'hypothèse fondamentale dans ce qui suit est la suivante :

(H) <u>Sur toute bicaractéristique</u> Γ <u>de</u> $\mathrm{Re}\, zp_m$, <u>sur laquelle</u> $\mathrm{Re}\, zp_m$ <u>est nulle, la fonction</u> $\mathrm{Im}\, zp_m$ <u>garde un signe constant</u>.

THÉORÈME.- <u>La condition</u> (H) <u>est nécessaire</u> (<u>si</u> P <u>est à coefficients différentiables</u>) <u>et suffisante</u> (<u>si</u> P <u>est à coefficients analytiques</u>) <u>pour que</u> P <u>ait la propriété</u> (R.L. x_o) (en réalité seule l'analyticité des coefficients de P_m intervient).

Ce résultat redonne comme cas particulier la propriété (R.L. x_o) citée plus haut pour les opérateurs de type principal à coefficients réels ; par contre il n'englobe pas tous les cas d'opérateurs à force constante.

5. <u>Un exemple simple</u>.

L'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels permet de réduire la démonstration du cas général au cas particulier d'un opérateur du premier ordre de la forme

$$P(x\,;D) = D_n - \Lambda(x\,;D_1,\dots,D_{n-1}) \quad \text{(ou plus simplement } D_2 + ix_2^k D_1)$$

où Λ est un opérateur pseudo-différentiel du premier ordre en $D_1,\dots,D_{n-1}$ dépendant différentiablement de x_n. Dans cette réduction, on est amené à modifier l'hypothèse (H) de façon à l'adapter aux symboles pseudo-différentiels :

(H') <u>Sur toute courbe bicaractéristique</u> Γ <u>de</u> $\mathrm{Re}\, p_m$, <u>sur laquelle</u> $\mathrm{Re}\, p_m$ <u>est nulle, si</u> $\mathrm{Im}\, p_m$ <u>est strictement négative en un point, elle demeure négative ou nulle sur</u> Γ <u>à partir de ce point</u> (en tenant compte de l'orientation de Γ). (Cette condition équivaut à k pair pour l'opérateur $D_2 + ix_2^k D_1$.)

On rappelle que l'opérateur pseudo-différentiel P est lié à son symbole

p par la relation

$$P(x\,;D)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} e^{i\langle x\,;\,\xi\rangle}\, p(x\,;\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi$$

pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\tilde{u}$ désigne la transformée de Fourier de u .

Dans le cas d'un symbole différentiel, les hypothèses (H) et (H') coïncident car $p_m(x\,;\xi)$ est homogène de degré m en ξ . On va illustrer la signification de l'hypothèse (H') en démontrant directement l'existence locale pour l'opérateur très particulier $P(x\,;D) = D_n - \Lambda(x_n\,;D_1,\dots,D_{n-1})$, c'est-à-dire lorsque Λ est à coefficients constants en $y = \{x_1,\dots,x_{n-1}\}$. On notera η la variable duale de y et t à la place de x_n ; en désignant par $\hat{u}$ (resp. $\hat{f}$) la transformée de Fourier partielle de u (resp. f) et par λ le symbole de Λ , l'équation $\square$ s'écrit alors $\frac{d\hat{u}}{dt} - i\lambda(t\,;\eta)\hat{u} = i\hat{f}$; une solution de cette équation s'écrit

$$\hat{u}(\eta\,;t) = i\int_{c(\eta)}^{t} e^{i\{A(t\,;\eta) - A(s\,;\eta)\}}\,\hat{f}(\eta\,;s)\,ds$$

avec $A(t\,;\eta)$ primitive en t de $\lambda(t\,;\eta)$ et $c(\eta)$ constante qui reste à déterminer de manière que l'intégrale soit une distribution tempérée en η .

Si on pose $\lambda(t\,;\eta) = a(t\,;\eta) + ib(t\,;\eta)$ avec a et b symboles réels, on voit facilement que l'hypothèse (H') signifie que si $b(t_o\,;\eta) > 0$ alors $b(t\,;\eta) \geq 0$ pour tout $t \geq t_o$.

Si on se restreint à l'intervalle $|t| \leq \varepsilon$, alors pour chaque η fixé la fonction $B(t\,;\eta) = \mathrm{Im}\,A(t\,;\eta)$ atteint son minimum en un point $c'(\eta)$ où on a par conséquent $b(c'(\eta)\,;\eta) = 0$; il y a alors deux cas :

<u>1er cas</u> : $B(t\,;\eta)$ est constante pour $t \geq c'(\eta)$, on pose $c(\eta) = c'(\eta)$ et on a $B(t\,;\eta) - B(s\,;\eta) = 0$ pour tout $t \geq s \geq c(\eta)$.

<u>2nd cas</u> : $B(t\,;\eta)$ n'est pas constante pour $t \geq c'(\eta)$, on peut donc

trouver $c(\eta) > c'(\eta)$ tel que $b(c(\eta), \eta) > 0$; on a alors $b(t ; \eta) \geq 0$ pour tout $t \geq c(\eta)$ et par conséquent $B(t ; \eta) - B(s ; \eta) \geq 0$ pour tout $t \geq s \geq c(\eta)$.

Dans les deux cas on en déduit que

$$|e^{i\{A(t ; \eta) - A(s ; \eta)\}}| = e^{-\{B(t ; \eta) - B(s ; \eta)\}} \leq 1 ,$$

et il est facile de vérifier que $\hat{u}(t ; \eta)$ est la transformée de Fourier partielle en y d'une distribution u solution de l'équation $\square$ dans la bande $V = \{|t| \leq \varepsilon\}$ lorsque $f \in \mathcal{D}(V)$.

6. Schéma de la démonstration de la condition suffisante.

(i) Réduction à une "estimation a priori".

On déduit facilement du théorème de Hahn-Banach que la propriété (R.L. x_o) est vérifiée dès qu'il existe un voisinage V de x_o et une constante $C > 0$ tels que

$$\|u\|_o \leq C \, \|{}^tPu\|_{-m+1} , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V)$$

où $\|\cdot\|_s$ désigne la norme de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ (c'est-à-dire de l'espace des distributions dont les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ pour $s \geq 0$, et du dual de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ lorsque $s < 0$). Pour $f \in L^2(V)$ on trouvera $v \in H^{m-1}(V)$ solution de $Pv = f$.

Par dualité, il revient au même de prouver l'existence d'un voisinage V de x_o et d'une constante $C > 0$ tels que

$$\|u\|_{m-1} \leq C \, \|Pu\|_o , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V) .$$

Techniquement, il sera plus commode de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x_o tel que

$$* \qquad \|u\|_{m-1} \leq \varepsilon \, \|Pu\|_o , \qquad \text{pour } u \in \mathcal{D}(V) .$$

(On peut justifier partiellement l'introduction de cet ε en remarquant que cette propriété est stable lorsqu'on perturbe P par un opérateur d'ordre $\leq m-1$.)

(ii) Réduction au cas où P est du premier ordre.

L'utilisation des opérateurs pseudo-différentiels permet de "découper" le symbole p sur la sphère unité $|\xi| = 1$ pour x dans un voisinage de x_o ; ce découpage est rendu possible grâce à la remarque suivante : si les φ_j , $j = 1, \ldots, N$, forment une partition de l'unité différentiable sur la sphère $|\xi| = 1$, et si on prolonge les φ_j en fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$, homogènes de degré zéro pour $|\xi| \geq \frac{1}{2}$, alors les opérateurs pseudo-différentiels Φ_j de symboles φ_j forment une partition de l'identité dans le sens suivant :

$$\|u\|_{m-1} \leq \sum_{j=1}^{N} \|\Phi_j(D)u\|_{m-1} + C\,\|u\|_{m-2}$$

pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Il suffit donc de prouver l'inégalité $*$ avec u remplacée par $\Phi_j(D)u$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

On choisit les φ_j de manière que dans un voisinage $V \times U_j$ de $\{x_o\} \times K_j$ (K_j support de φ_j dans la sphère $|\xi| = 1$) on ait

(i) soit $p_m(x\,;\,\xi) \neq 0$ pour $x \in V$, $\xi \in U_j$;

(ii) soit $\operatorname{grad}_\xi p_m(x\,;\,\xi) \neq 0$ pour $x \in V$, $\xi \in U_j$;

ce qui est possible puisqu'on a supposé que P est de type principal ; alors en négligeant quelques détails techniques, on a respectivement

(i) soit $P\Phi_j u = P_j\Phi_j u$ où P_j est un opérateur elliptique d'ordre m et par conséquent on a

$$\|\Phi_j(D)u\|_{m-1} \leq \varepsilon\,\|P\Phi_j u\|_o + C_j\,\|\Phi_j u\|_{m-2}$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$ (quitte à diminuer V) ;

(ii) soit $P\Phi_j u = Q_j L_j \Phi_j u$ où Q_j est un opérateur elliptique d'ordre $m-1$ et L_j un opérateur du premier ordre et par conséquent on a

$$\|L_j \Phi_j u\|_{m-2} \leq C_j \|P\Phi_j u\|_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$, et on est ainsi réduit à prouver une inégalité de la forme $*$ pour les opérateurs L_j.

Dans ce qui suit on peut omettre l'indice j. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $x_0 = 0$ et que $\frac{\partial}{\partial \xi_n} p_m(0 ; \xi) \neq 0$ pour $\xi \in U$. On a alors

$$p(x ; \xi) = q(x ; \xi)(\xi_n - \lambda(x ; \xi_1, \dots, \xi_{n-1}))$$

pour $(x ; \xi) \in V \times U$, avec λ homogène de degré un en $\eta = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$; on a donc

$$L(x ; D) = D_n - \Lambda(x ; D_1, \dots, D_{n-1})$$

et l'opérateur L vérifie l'hypothèse (H') grâce au

<u>Lemme</u> 1.- <u>L'hypothèse</u> (H') <u>reste vérifiée lorsqu'on multiplie</u> p_m <u>par une fonction différentiable</u> q <u>qui ne s'annule pas.</u>

(iii) <u>Etude de l'opérateur</u> L.

Comme L est d'ordre 1, l'inégalité $*$ devient

$$\|u\|_0 \leq \varepsilon \|Lu\|_0$$

pour $u \in \mathcal{D}(V)$, V voisinage de zéro.

On écrit $\lambda = a + ib$ avec des symboles a et b réels ; on a alors

$$Lu = \frac{1}{i}\frac{du}{dt} - A(t)u - iB(t)u$$

en notant t à la place de x_n et $A(t)$ (resp. $B(t)$) les opérateurs pseudo-différentiels de symboles $a(x;\eta)$ (resp. $b(x;\eta)$) et en considérant u comme fonction de la seule variable t à valeurs vectorielles. Les opérateurs $A(t)$ et $B(t)$ sont auto-adjoints dans $H = L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ à un opérateur d'ordre zéro (donc borné dans H) près ; on ne change pas la nature de l'inégalité à démontrer en les remplaçant par leurs parties auto-adjointes $A_o(t)$ et $B_o(t)$ respectivement ; on notera

$$L_o u = \frac{1}{i}\frac{du}{dt} - A_o(t)u - iB_o(t)u .$$

Soit $U(t)$ l'opérateur unitaire dans H, solution de l'équation opérationnelle $\frac{dU(t)}{dt} - iA_o(t)\,U(t) = 0$ avec $U(0) = 1$; si on pose $v(t) = U(t)^{-1}\,u(t)$, on a alors

$$L_o u(t) = U(t)\left(\frac{1}{i}\frac{dv}{dt} - i\tilde{B}_o(t)v\right)$$

en posant $\tilde{B}_o(t) = U(t)^{-1}\,B_o(t)\,U(t)$; puisque $U(t)$ est unitaire, on est ramené à démontrer l'inégalité $*$ avec L remplacé par $L_1 = \frac{d}{dt} + \tilde{B}_o(t)$, et u fonction à support dans une bande $|t| \leq \delta$ (car $U(t)$ n'a aucune raison de conserver le support par rapport à y). De plus $U(t)$ conserve l'espace $H^1(\mathbb{R}^{n-1})$ mais n'y est pas isométrique.

Toute la suite repose sur l'étude de l'opérateur $\tilde{B}_o(t)$.

(iv) Approximation explicite de l'opérateur $U(t)$.

L'opérateur $\frac{d}{dt} - iA_o(t)$ est de nature hyperbolique ; on peut donc approcher $U(t)$ à l'aide d'un opérateur intégral de Fourier $K(t)$ construit comme dans Hörmander [4]. Précisément, on cherche K sous la forme

$$K(t)u(y) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} k(y,t,\eta)\, e^{i\varphi(y,t,\eta)}\,\hat{u}(\eta)\,d\eta$$

où φ est homogène de degré un en η et sans point critique pour $\eta \neq 0$, avec $K(0) = 1$ et $\frac{dK(t)}{dt} - iA_o(t)\,K(t)$ opérateur régularisant. On note a_o le symbole de A_o ; son symbole principal est nécessairement a et à des termes de degré

≤ 0 en η près on a

$$e^{-i\langle y\,;\,\eta\rangle} A_o(t)(e^{i\langle y\,;\,\eta\rangle}\theta(y)) = a(y\,,\,t\,,\,\eta)\,, \qquad y \in \omega$$

avec $\theta \in \mathcal{D}$ et $\theta \equiv 1$ dans un voisinage de $\bar{\omega}$; on en déduit

$$e^{-i\varphi(y\,,\,t\,,\,\eta)} A_o(t)(e^{i\varphi(y\,,\,t\,,\,\eta)}\theta(y)) = a(y\,,\,t\,,\,\mathrm{grad}_y\,\varphi)\,, \qquad y \in \omega$$

et dans le calcul de $\{\frac{d}{dt} - iA_o(t)\}(ke^{i\varphi})$ apparaît le terme

$$i\{\frac{d\varphi}{dt} - a(y\,,\,t\,,\,\mathrm{grad}_y\,\varphi)\}(ke^{i\varphi}) + \ldots$$

c'est pourquoi la fonction de phase φ est construite comme solution du problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = a(y\,,\,t\,,\,\mathrm{grad}_y\,\varphi) \\ \varphi(y\,,\,0\,,\,\eta) = \langle y\,;\,\eta\rangle\,. \end{cases}$$

(La condition initiale est imposée par la condition $K(0) = 1$, on imposera aussi $k(y\,,\,0\,,\,\eta) = 1$.) Il n'est pas utile pour la suite de la description de la méthode d'insister sur la construction de la fonction d'amplitude k : c'est un symbole qu'on obtient comme solution d'une équation différentielle linéaire.

(v) Etude de l'opérateur $\widetilde{B}_o(t)$.

Le calcul symbolique sur les opérateurs intégraux de Fourier, montre que si Q (resp. $Q^{\#}$) est un opérateur pseudo-différentiel de symbole principal q (resp. $q^{\#}$) on a à des termes de degré inférieur près

$$QK(t)u(y) = (2\pi)^{-n}\int_{R^{n-1}} e^{i\varphi(y\,,\,t\,,\,\eta)}\, k(y\,,\,t\,,\,\eta)q(y\,,\,t\,,\,\mathrm{grad}_y\,\varphi)\,\hat{u}(y)\,dy$$

$$K(t)Q^{\#}u(y) = (2\pi)^{-n}\int_{R^{n-1}} e^{i\varphi(y\,,\,t\,,\,\eta)}\, k(y\,,\,t\,,\,\eta)\,q^{\#}(\mathrm{grad}_\eta\,\varphi\,,\,t\,,\,\eta)\,\hat{u}(y)\,dy$$

donc on aura $Q^{\#}(t) = K(t)^{-1}QK(t)$ si les symboles principaux q et $q^{\#}$ sont liés par la relation

$$(2) \qquad q^{\#}(\mathrm{grad}_\eta\,\varphi\,,\,t\,,\,\eta) = q(y\,,\,t\,,\,\mathrm{grad}_y\,\varphi)\,.$$

On applique ce qui précède avec Q remplacé par $B_o(t)$; on en déduit que $\tilde{B}_o(t)$ est approché par l'opérateur pseudo-différentiel $B_o^{\#}(t)$ donc le symbole est donné par

$$b_o^{\#}(x_o , t , \xi_o) = b(x(x_o , t , \xi_o) , t , \xi(x_o , t , \xi_o))$$

où $x(x_o , t , \xi_o) = x(t)$, $\xi(x_o , t , \xi_o) = \xi(t)$ est la courbe intégrale du système

$$(3) \qquad \begin{cases} x'(t) = -\operatorname{grad}_\xi a(x , t , \xi) , & x(0) = x_o \\ \xi'(t) = \operatorname{grad}_x a(x , t , \xi) , & \xi(0) = \xi_o , \end{cases}$$

(ceci est obtenu en résolvant le système (1), (2) avec q remplacé par b).

(vi) Factorisation de l'opérateur $B_o^{\#}(t)$.

L'hypothèse (H') appliquée à l'opérateur $L = D_n - \Lambda$ montre que $b(x , t , \xi)$ ne change pas de signe sur chaque courbe intégrale de (3) ; par conséquent le signe de $b_o^{\#}$ ne dépend pas de t , ceci permet d'appliquer le

Lemme 2.- *Soit* $y , t \longmapsto f(y , t)$ *une fonction analytique réelle dans un voisinage* V *de l'origine dans* $\mathbb{R}^{N+1}$ *(de point courant noté* (y , t) , $y \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$) ; *on suppose que le signe de* $f(y , t)$ *est indépendant de* t ; *alors quitte à restreindre* V *on peut écrire*

$$f(y , t) = g(y)\, \pi(y , t)$$

où g *et* π *sont analytiques réelles et* $\pi \geq 0$.

On en déduit qu'on peut approcher $B_o^{\#}(t)$ par un opérateur de la forme $GJ(t)$ où G est un opérateur auto-adjoint indépendant de t dans H et $J(t)$ un opérateur continu hermitien positif dans H dépendant régulièrement de t , tel que $[G , J(t)]$ et $[[G ; J(t)] ; G]$ soient bornés.

La dernière étape consiste à prouver une inégalité de la forme * pour une équation abstraite relative à l'opérateur

$$\frac{d}{dt} - GJ(t) ,$$

ceci utilise les techniques usuelles pour l'étude des équations opérationnelles abstraites, avec cependant une difficulté supplémentaire provenant du fait que $J(0)$ peut être nul (exemple : $G = i \frac{d}{dx}$ et $J(t) = t^k$).

N.B. - Cette description de la démonstration a passé sous silence de nombreux détails techniques très astucieux et elle ne peut en aucun cas dispenser de la lecture des cinquante pages de L. Nirenberg et F. Trèves.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ju. V. EGOROFF - On subelliptic pseudodifferential operators [en russe], Dokl. Akad. Nauk CCCP, 1969, n° 1, tome 188, p. 20-22. [Trad. anglaise : Soviet Math. Dokl., 10 (1969), n° 5, p. 1056-1059.]

[2] L. EHRENPREIS - Solutions of some problems of division, Amer. J. of Math., 76 (1954), p. 883.

[3] L. HÖRMANDER - Linear partial differential operators, Die Grundlehren der math., Band 116, Springer-Verlag.

[4] L. HÖRMANDER - The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., vol. 121, 1968, p. 193.

[5] H. LEWY - An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math., (2) 66, 1957, p. 155.

[6] B. MALGRANGE - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier 6, 1955/56, p. 271.

[7] L. NIRENBERG - F. TRÈVES - On local solvability of linear partial differential equations, Part I and Part II, Comm. Pure and Applied Math., vol. 23, p. 1 and p. 459, 1970.

[8] J. PEETRE - Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, Thèse à Lund, 1959.

[9] F. TRÈVES - On the local solvability of linear partial differential equations in two independant variables, Amer. J. of Math., vol. XCII, n° 1, 1970.