

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE EYMARD

Algèbres A_p et convoluteurs de L^p

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 367, p. 55-72

http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__55_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES A_p ET CONVOLUTEURS DE L^p

par Pierre EYMARD

Soit G un groupe localement compact, et soit $A(G)$ l'ensemble des fonctions $u = f * \check{g}$, où $f \in L^2(G)$, $g \in L^2(G)$. Si G est abélien, de groupe dual \hat{G} , il résulte du théorème de Plancherel que $A(G)$ est une algèbre pour le produit ordinaire des fonctions, celle des transformées de Fourier de fonctions de $L^1(\hat{G})$. Si G n'est pas abélien, on peut encore montrer, par des méthodes hilbertiennes, que $A(G)$ est une algèbre : elle est étudiée dans [3] sous le nom d'algèbre de Fourier du groupe G .

Que se passe-t-il si l'on remplace $L^2(G) * L^2(G)$ par $L^p(G) * L^q(G)$, où $1 < p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$? On ignore si on obtient encore ainsi une algèbre, voire un espace vectoriel. Mais Carl S. Herz a montré, par des techniques de produit tensoriel topologique, que l'ensemble $A_p(G)$ des fonctions :

$$(1) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} f_k * \check{g}_k, \quad \text{où } f_k \in L^p(G), \quad g_k \in L^q(G), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \|g_k\|_q < +\infty,$$

est une algèbre pour le produit ordinaire des fonctions. Même pour $G = \mathbb{R}$, ce résultat est nouveau. Il ouvre la voie à des recherches inspirées de l'analyse harmonique : théorie des idéaux, synthèse harmonique, calcul symbolique, etc..., dans l'algèbre $A_p(G)$. D'autre part, par le biais de la dualité, $A_p(G)$ est liée aux convoluteurs de $L^p(G)$; on peut donc espérer que son étude éclairera la question des multiplicateurs de Fourier de L^p .

Nous décrivons ici les premiers résultats obtenus sur les $A_p(G)$, avec des indi-

cations succinctes sur les démonstrations. Les principaux d'entre eux, notamment ceux des paragraphes 3, 4 et 8.3, sont dûs à C. S. Herz, et non publiés actuellement. Aux paragraphes 6 et 7, le conférencier a généralisé des résultats connus quand $p = 2$. On consultera aussi [2] et [14]. A la fin de l'exposé, nous dresserons une liste de problèmes.

1. Notations.

G désigne un groupe localement compact et dx une mesure de Haar à gauche sur G . Pour $1 < p < +\infty$, on considère les espaces $L^p(G)$ relativement à dx ; on pose $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. L'espace $\mathcal{C}(G)$ est celui des fonctions complexes continues sur G ; $\mathcal{K}(G)$ l'espace de celles qui sont à support compact; $\mathcal{C}_0(G)$ de celles qui tendent vers 0 à l'infini; $\mathcal{M}^1(G)$ est l'ensemble des mesures de Radon bornées sur G . La masse-unité au point $a \in G$ est notée ε_a .

Si f est une fonction sur G , et si $b, x \in G$, on pose :

$$\check{f}(x) = f(x^{-1}) \quad ; \quad f_b(x) = f(xb).$$

Le dual de l'espace de Banach produit tensoriel projectif $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ s'identifie à l'espace de Banach $\mathcal{L}[L^q(G)]$ des opérateurs bornés sur $L^q(G)$, par la formule d'accouplement

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k, Tg_k)$$

si $T \in \mathcal{L}[L^q(G)]$ et $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \otimes g_k \in L^p \hat{\otimes} L^q$, où $f_k \in L^p$, $g_k \in L^q$ et

$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \|g_k\|_q < \infty$. Sur $\mathcal{L}[L^q]$ nous appellerons "ultrafaible" la topologie faible de cette dualité.

2. Rappel sur les groupes aménables.

Pour l'énoncé de certains théorèmes, nous supposons, le cas échéant, que le groupe localement compact G est aménable. Cela signifie (cf. par exemple [5], [12], [16]) qu'il possède les propriétés équivalentes qui suivent :

- (i) G a la propriété du point fixe ;
- (ii) il existe sur $L^\infty(G)$ une moyenne invariante ;
- (iii) la représentation triviale de G est faiblement contenue, au sens de J. M. G. Fell, dans la représentation régulière gauche de G ;
- (iv) pour tout compact $K \subset G$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact V de mesure > 0 tel que $\text{mes}(KV) \leq (1 + \varepsilon)\text{mes}(V)$.

Les groupes compacts, les groupes abéliens et, plus généralement, résolubles sont aménables. Les groupes discrets libres à $n \geq 2$ générateurs, les groupes de Lie connexes semi-simples non compacts ne sont pas aménables.

3. $A_p(G)$ est une algèbre.

3.1. L'espace vectoriel $A_p(G)$ défini au préambule est de Banach pour la norme

$$\|u\|_{A_p} = \inf_{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \|g_k\|_q .$$

$A_p(G)$ n'est autre que l'image de $L^p(G) \hat{\otimes} L^q(G)$ par l'application P , de norme 1, définie par :

$$P\varphi(x) = \int_G \varphi(xz, z) dz \quad (\varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q, x \in G) .$$

On a $A_p \subset \mathcal{C}_0$ et $\|u\|_{A_p} \geq \|u\|_\infty$.

Si u est une fonction sur G , la fonction Mu est définie sur $G \times G$ par

$$Mu(x, y) = u(xy^{-1}) .$$

Des applications analogues à P et M ont été utilisées systématiquement par N. Th. Varopoulos dans [21].

DÉFINITION.- $B_p(G)$ (resp. $\underline{B}_p(G)$) est l'algèbre de Banach des fonctions continues bornées sur G qui sont des multiplicateurs de $A_p(G)$ (resp. telles que Mu soit un multiplicateur de $L^p \hat{\otimes} L^q(G)$), avec la norme d'opérateur de multiplication.

On a évidemment $\underline{B}_p \subset B_p$ et $\|u\|_{\underline{B}_p} \leq \|u\|_{B_p}$, à cause de l'identité :

$$P[M(u).\varphi] = u.P\varphi \quad (u \in \underline{B}_p ; \varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q) .$$

THÉORÈME 1.- Soit σ une représentation continue d'un groupe localement compact H dans un groupe localement compact G . Alors l'application $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $\underline{B}_p(H)$, en abaissant les normes.

Par linéarité et densité, on se ramène à voir que, si $f, g \in \mathcal{K}(G)$ et $j, k \in \mathcal{K}(H)$, $\psi = M[(f * \check{g}) \circ \sigma](j \otimes k) \in L^p \hat{\otimes} L^q(H)$, et

$$\|\psi\|_{L^p \hat{\otimes} L^q(H)} \leq \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)} \|j\|_{L^p(H)} \|k\|_{L^q(H)} .$$

Or on constate que ψ peut s'écrire sous forme d'intégrale à valeurs vectorielles

$$\psi = \int_G [(f_z \circ \sigma)j \otimes (g_z \circ \sigma)k] dz$$

où la fonction sous le signe somme, à valeurs dans $L^p \hat{\otimes} L^q(H)$, est continue et intégrable, car, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} & \int_G \|[(f_z \circ \sigma)j] \otimes [(g_z \circ \sigma)k]\|_{L^p \hat{\otimes} L^q(H)} dz \leq \int_G \|[(f_z \circ \sigma)j]\|_{L^p(H)} \|[(g_z \circ \sigma)k]\|_{L^q(H)} dz \\ & \leq \left(\int_G \|[(f_v \circ \sigma)j]\|_{L^p(H)}^p dv \right)^{1/p} \left(\int_G \|[(g_w \circ \sigma)k]\|_{L^q(H)}^q dw \right)^{1/q} \\ & = \left(\int_G \int_H |f(\sigma x \cdot v)j(x)|^p dx dv \right)^{1/p} \left(\int_G \int_H |g(\sigma y \cdot w)k(y)|^q dy dw \right)^{1/q} \\ & = \|f\|_{L^p(G)} \|g\|_{L^q(G)} \|j\|_{L^p(H)} \|k\|_{L^q(H)} . \end{aligned}$$

COROLLAIRE.- Soit G un groupe localement compact, et soit $1 < p < +\infty$. Alors $A_p(G)$ est une ALGÈBRE de Banach pour le produit ordinaire des fonctions.

Il suffit d'appliquer le théorème 1, avec $H = G$ en prenant pour σ la représentation identique, et d'utiliser l'inclusion $\underline{B}_p \subset B_p$.

Remarques.- 1) L'algèbre de Banach $A_2(G)$ coïncide avec l'algèbre de Fourier $A(G)$ étudiée dans [3].

2) Supposons G aménable. En s'appuyant sur 2 (iv), il est facile de voir qu'alors $u \mapsto u \circ \sigma$ se prolonge en une application de $B_p(G)$ dans $B_p(H)$. De plus, dans ce cas, on montre que les algèbres normées $\underline{B}_p(G)$ et $B_p(G)$ coïncident, et que l'application identique de $A_p(G)$ dans $B_p(G)$ est isométrique.

3) Supposons H aménable et σ propre. Alors on déduit de 2 (iv) que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $A_p(H)$.

4) Soit à nouveau G quelconque, soit H un sous-groupe fermé de G , et prenons pour σ l'injection canonique de H dans G . Dans ce cas, on peut dire plus : l'application de restriction de $A_p(G)$ à H applique $A_p(G)$ sur $A_p(H)$. Pour la démonstration, on se ramène au cas où G est séparable et l'on utilise une section borélienne de G/H dans G .

3.2. Signalons encore la

PROPOSITION.- La boule-unité de $B_p(G)$ est fermée dans l'espace $\mathcal{C}(G)$ muni de la topologie de la convergence compacte sur G .

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(L^q)$ engendré par les opérateurs T_{f_0, g_0} de rang 1 sur L^q définis par la formule

$$T_{f_0, g_0}(g) = \left[\int_G f_0(x)g(x)dx \right] g_0 \quad (f_0, g_0 \in \mathcal{K}(G)).$$

Le dual de l'espace normé E s'identifie à $L^p \hat{\otimes} L^q$, et, si $\varphi \in L^p \hat{\otimes} L^q$, on a :

$$(2) \quad \langle \varphi, T_{f_o, g_o} \rangle = \iint_{G \times G} f_o(y) g_o(x) \varphi(x, y) dx dy .$$

La boule-unité K de $L^p \hat{\otimes} L^q$ est compacte pour la topologie τ faible de dualité avec E . Soient alors des $u_\alpha \in \underline{B}_p$, $\|u_\alpha\|_{\underline{B}_p} \leq 1$, qui tendent vers une fonction u pour la convergence compacte sur G . Soit $\varphi \in K$. Les Mu_α tendent vers Mu uniformément sur tout compact de $G \times G$, d'où l'on déduit, d'après (2), que $(Mu)\varphi$ est une τ -valeur d'adhérence dans K des $(Mu_\alpha)\varphi$.

COROLLAIRE.- Soit $u \in \mathfrak{X}(G)$, et soient des $u_\alpha \in A_p(G)$, telles que $\|u_\alpha\|_{A_p} \leq 1$, et qui tendent vers u pour la convergence compacte sur G . Alors $u \in A_p(G)$.

4. Le dual de l'espace de Banach $A_p(G)$.

Notons $Cv_p(G)$ l'ensemble des convoluteurs de $L^p(G)$, i.e. des $T \in \mathfrak{L}[L^p(G)]$ tels que, pour tous $f, g \in \mathfrak{X}(G)$, on ait $T(f * g) = Tf * g$. Si $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$, on désignera par $\rho(\mu)$ le convoluteur $f \mapsto \mu * f$. On notera $PM_p(G)$ (PM pour "pseudo-mesures") l'adhérence ultrafaible dans $Cv_p(G)$ de l'ensemble des opérateurs $\rho(f)$, $f \in L^1(G)$.

THÉORÈME 2.- 1) L'espace de Banach dual de $A_p(G)$ s'identifie à l'espace de Banach $PM_q(G)$ par la formule d'accouplement

$$\langle T, u \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k, Tg_k) ,$$

où $T \in PM_q(G)$ et où $u \in A_p(G)$ est donnée sous la forme (1). La topologie faible de dualité $\sigma(A'_p, A_p)$ se transporte alors en la topologie ultrafaible des opérateurs.

De plus, si $\mu \in \mathfrak{M}^1(G)$, on a $\langle \rho(\mu), u \rangle = \int_G u(x) d\mu(x)$.

2) Supposons G quelconque, mais $p = 2$, ou supposons p quelconque, mais G

aménable. Alors on a $FM_p(G) = Cv_p(G)$ et, plus précisément, tout $T \in Cv_p(G)$ est limite ultrafaible d'opérateurs $\rho(f_i)$, où $f_i \in L^1(G)$ et où $\|\rho(f_i)\|_{Cv_p} \leq \|T\|_{Cv_p}$.

N'insistons pas sur le 1), facile à prouver (cf. par exemple [17]). Le cas $p = 2$ du 2) résulte du théorème de commutation et du théorème de densité de Kaplansky (cf. [3], p. 210). Donnons quelques détails sur le 2), pour p quelconque et G aménable.

Soit $h \in L^p(G)$. On dira que h est un élément "borné" de L^p , s'il existe une constante C_h telle que, pour tout $f \in \mathcal{X}(G)$, on ait $\|h * f\|_p \leq C_h \|f\|_p$. Alors h définit un convoluteur de L^p , que nous notons $\rho(h)$. Si $T \in Cv_p$, $T(h)$ est encore un élément "borné" de L^p , et $\rho(Th) = T \circ \rho(h)$.

Par des calculs analogues à la démonstration du théorème 1, on montre que, si h est "borné", et si f, g, j, k sont quatre fonctions mesurables bornées à support compact sur G , on a la formule :

$$(3) \quad \langle \rho[(j * \check{k})h], f \otimes g \rangle = \langle \rho(h), [M(j * \check{k})](f \otimes g) \rangle.$$

Soit alors $T \in Cv_p(G)$. Suivant une idée due à Figa-Talamanca [4] dans le cas abélien, on va procéder à une double régularisation de T .

Premier pas : T est limite forte, donc ultrafaible, d'opérateurs $\rho(h_i)$, où les h_i sont des éléments "bornés" de L^p , et où $\|\rho(h_i)\|_{Cv_p} \leq \|T\|_{Cv_p}$.

Pour le voir, il suffit de prendre des $e_i \in \mathcal{X}(G)$ tels que $\|e_i\|_1 \leq 1$ et qui soient une approximation de l'unité dans L^p , puis de poser $h_i = T(e_i)$.

Second pas : On est ainsi ramené au cas où $T = \rho(h)$, h élément "borné" de L^p . Puisque G est aménable, d'après 2 (iv), pour tout compact $K \subset G$ et tout $\varepsilon > 0$, soit V un compact de mesure > 0 tel que $mes(KV) \leq (1 + \varepsilon)^p mes(V)$. Alors, si l'on pose :

$$u_{\varepsilon, K} = [(1 + \varepsilon)\text{mes } V]^{-1} \chi_{KV} * \chi_V ,$$

où la notation χ est pour "fonction caractéristique", on a $\|u_{\varepsilon, K}\|_{A_p} = 1$. On déduit de (3) que, pour tout $\varphi \in L^p \otimes L^q$,

$$\langle \rho(u_{\varepsilon, K} h), \varphi \rangle = \langle \rho(h), M(u_{\varepsilon, K})\varphi \rangle .$$

Il en résulte que les $\|\rho(u_{\varepsilon, K} h)\|_{Cv_p}$ restent bornés par $\|\rho(h)\|_{Cv_p}$, et, comme $u_{\varepsilon, K} h \in L^1(G)$, il reste à voir que $\lim_{\varepsilon, K} \rho(u_{\varepsilon, K} h) = \rho(h)$ ultrafaiblement dans Cv_p , ce qui n'offre pas de difficulté.

5. Caractérisations des groupes G aménables, en termes de $A_p(G)$ et de $Cv_p(G)$.

Pour la démonstration du théorème suivant, nous renvoyons à [16], chapitre 8 ; [12] et [13].

THÉORÈME 3.- Soit G un groupe localement compact, et soit $1 < p < +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est aménable ;
- (2)_p dans l'algèbre de Banach $A_p(G)$ il existe une unité approchée (bornée par 1 en norme) ;
- (3)_p pour toute mesure μ positive bornée sur G , on a $\|\rho(\mu)\|_{Cv_p} = \|\mu\|_1$;
- (4)_p si une mesure positive convole $L^p(G)$ dans $L^p(G)$, c'est une mesure bornée.

Dans le cas du groupe non-aménable $G = SL(2, \mathbb{R})$, R. A. Kunze et E. M. Stein ont obtenu dans [10] le résultat suivant, plus fort que la négation de (4)₂ :

soit $G = SL(2, \mathbb{R})$ et $1 \leq r < 2$; alors, pour tout $k \in L^r(G)$, $f \mapsto k * f$ est un convoluteur de $L^2(G)$.

Leur démonstration utilise explicitement la formule de Plancherel pour $SL(2, \mathbb{R})$. Il

serait intéressant d'examiner si ce phénomène "d'hyper-non-aménabilité" a lieu pour une classe plus vaste de groupes, par exemple ceux qui sont semi-simples de centre fini.

6. Synthèse harmonique pour $A_p(G)$: généralités.

6.1. $A_p(G)$ est une algèbre de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini sur G . Son spectre de Gelfand s'identifie à G . Si G est abélien, ce fait découle simplement des inclusions $\mathcal{F}L^1(\hat{G}) = A_2(G) \subset A_p(G) \subset \mathcal{C}_0(G)$, qui résultent, via le théorème 2, du théorème de Riesz-Thorin. Si G est quelconque, on le voit en reprenant la démonstration faite dans [3], p. 220-222, pour le cas $p = 2$, c'est-à-dire en s'appuyant essentiellement sur le lemme suivant, dont l'origine remonte à H. Helson [6] :

LEMME (de contraction des supports).- Soit X l'espace vectoriel engendré par les fonctions $f * g$, où f et g sont fonctions caractéristiques de compacts dans G . Soit $T \in \mathcal{C}v_p(G)$ un convoluteur tel que, pour toute $u \in X$, le support de la fonction Tu soit contenu dans le support de u . Alors $T = \lambda I$, où λ est une constante et I l'opérateur identique.

Sur sa définition, on voit facilement que l'algèbre $A_p(G)$ est régulière au sens de Chilov.

En posant $\langle uT, v \rangle = \langle T, uv \rangle$, pour $T \in \mathcal{P}M_p$ et $u, v \in A_q$, on fait de $\mathcal{P}M_p(G)$ un $A_q(G)$ -module. On appelle support d'un $T \in \mathcal{P}M_p(G)$ l'ensemble (fermé dans G) des $a \in G$ tels que l'opérateur $\rho(\epsilon_a)$ soit limite ultrafaible dans $\mathcal{L}(L^p)$ d'opérateurs $u_i T$, où $u_i \in A_q(G)$. Si c'est le cas, on peut même montrer que $\rho(\epsilon_a)$ est limite ultrafaible d'opérateurs $u_i T$, où $\|u_i T\|_{\mathcal{C}v_p} \leq 1$. Pour que $a \in \text{supp}(T)$, il faut et il suffit que, pour tout voisinage V de a , il existe une $u \in A_q(G)$ (resp. une

$u \in X$), à support dans V , et telle que $\langle T, u \rangle \neq 0$.

Soit E un fermé dans G . C'est, par définition, un ensemble de synthèse pour $A_q(G)$ si les hypothèses $T \in PM_p(G)$ et $\text{supp}(T) \subset E$ impliquent que T soit limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(\varepsilon_x)$, où $x \in E$. Par le lemme de contraction des supports, il est immédiat de voir que tout ensemble réduit à un point est de synthèse. De plus, en imitant les démonstrations faites pour $p = 2$ dans [3], chapitre 4, on obtient la formulation suivante du théorème de Ditkin-Chilov pour $A_q(G)$:

Soit $T \in PM_p(G)$ tel que la frontière de $\text{supp}(T)$ ne contienne pas d'ensemble parfait non vide.

- 1) Soit $u \in A_q(G)$. Si u est identiquement nulle sur $\text{supp}(T)$, alors $uT = 0$.
- 2) Si, de plus, G est aménable, T est limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(x)$, où $x \in \text{supp}(T)$.

6.2. Au passage, notons une application du théorème de synthèse ponctuelle à la détermination des convoluteurs isométriques de $L^p(G)$, pour $p \neq 2$. Dans ce cas, S. K. Parrott [15] et R. S. Strichartz [19] montrent qu'il n'y a pas d'autres convoluteurs isométriques que les $\lambda\rho(\varepsilon_a)$, où $a \in G$ et $|\lambda| = 1$. On peut simplifier leur démonstration comme suit, tout au moins si le convoluteur isométrique T est dans $PM_p(G)$. Un lemme de Banach (cf. [11]) énonce que, si $u, v \in L^p$ et si $p \neq 2$, on a l'égalité de la "médiane" :

$$\|u + v\|_p^p + \|u - v\|_p^p = 2\|u\|_p^p + 2\|v\|_p^p$$

si et seulement si $u(x)v(x) = 0$ presque partout. Par synthèse ponctuelle on est ramené à voir que, dans le support de T , il n'y a pas deux points distincts a

et b . Si c'était le cas, il existerait un voisinage V_1 de a et un voisinage V_2 de b , d'intersection vide. Soit \check{u} (resp. \check{v}) une fonction appartenant à X , à support dans V_1 (resp. V_2), telle que $\langle T, \check{u} \rangle = Tu(e) \neq 0$ (resp. telle que $Tv(e) \neq 0$). On aurait $uv = 0$, donc $(Tu)(Tv) = 0$ d'après le lemme de Banach, d'où contradiction.

7. Synthèse harmonique pour $A_p(G)$: cas de $G = \mathbb{R}^n$.

7.1. Pour énoncer des résultats plus précis, nous supposons maintenant que $G = \mathbb{R}^n$. Alors, d'après Riesz-Thorin, on a $Cv_p = Cv_q \subset Cv_2$. La cotransformation de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$ applique bijectivement Cv_p sur l'espace M_p des multiplicateurs de \mathcal{FL}^p . On a $M_p \subset M_2 = L^\infty$. Sur M_p nous utilisons les deux topologies transférées par $\overline{\mathcal{F}}$ de Cv_p : celle de la norme, et l'ultrafaible.

Soit $T \in Cv_p$ et $f = \overline{\mathcal{F}}T$. Le support de T coïncide avec le support de la distribution T , et n'est autre que le spectre de f au sens usuel, i.e. l'ensemble $sp(f)$ des $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\exp(2\pi i a \cdot x)$ soit limite faible dans L^∞ de combinaisons linéaires de translatées de f . Dire qu'un fermé E de \mathbb{R}^n est de synthèse revient à dire que toute $f \in M_p$ dont le spectre soit inclus dans E est limite ultrafaible de combinaisons linéaires des $\exp(2\pi i \lambda \cdot x)$, où $\lambda \in E$. Ainsi tout théorème de synthèse pour A_p conduit à un théorème d'approximation de multiplicateurs de \mathcal{FL}^p par des polynômes trigonométriques.

7.2. On a d'abord un résultat du type de Beurling-Pollard :

THÉORÈME 4.- Si S est un fermé de \mathbb{R}^n et si $\varepsilon > 0$, soit S_ε l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$, $x \notin S$, tels que $\text{dist}(x, S) \leq \varepsilon$. Si u est une fonction, posons

$$\omega_\varepsilon(u) = \sup_{x \in S_\varepsilon} |u(x)|.$$

Soit $f \in M_p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{sp}(f) \subset S$. Soit $u \in A_p(\mathbb{R}^n)$ telle que :

$$\begin{cases} u(x) = 0 & \text{si } x \in S ; \\ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\omega_\varepsilon(u)]^q}{\varepsilon^n} \text{mes}[S_\varepsilon \cap \text{supp}(u)] = 0 . \end{cases}$$

Alors la distribution $u(\mathcal{F}f)$ est nulle.

Grâce à l'unité approchée de A_p , on peut supposer u à support compact. Si χ_ε est la fonction caractéristique du cube $|t_k| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$; $k = 1, \dots, n$, on pose :

$$\Delta_\varepsilon = \frac{n}{\varepsilon^{2n}} \chi_\varepsilon * \chi_\varepsilon \quad \text{et} \quad \hat{\Delta}_\varepsilon = \mathcal{F}\Delta_\varepsilon .$$

Alors $\hat{\Delta}_\varepsilon \in L^1 \cap L^\infty$ et $\|\Delta_\varepsilon\|_p \leq C \varepsilon^{-\frac{n}{q}}$, où C est une constante indépendante de ε .

De plus, les $\hat{\Delta}_\varepsilon(x)$ tendant vers 1 uniformément sur tout compact, on a :

$$(5) \quad \langle \mathcal{F}f, u \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x) f(x) \hat{\Delta}_\varepsilon(x) dx .$$

On a $\text{supp}[\mathcal{F}(\hat{\Delta}_\varepsilon)] \subset S \cup S_\varepsilon$, donc, d'après la formule de Plancherel et l'inégalité de Hölder, on a, en posant $T = \mathcal{F}f$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}u(x) f(x) \hat{\Delta}_\varepsilon(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(t) \mathcal{F}(\hat{\Delta}_\varepsilon)(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{S_\varepsilon \cap \text{supp}(u)} u(t) \mathcal{F}(\hat{\Delta}_\varepsilon)(t) dt \right| = \left| \int_{S_\varepsilon \cap \text{supp}(u)} u(t) [T(\Delta_\varepsilon)](t) dt \right| \\ &\leq \left(\int_{S_\varepsilon \cap \text{supp}(u)} |u(t)|^q dt \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |[T(\Delta_\varepsilon)](t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq \|T\|_{C_{V_p}} \|\Delta_\varepsilon\|_p \omega_u(\varepsilon) [\text{mes}(S_\varepsilon \cap \text{supp } u)]^{1/q} , \end{aligned}$$

et la conclusion du théorème 4 découle alors de (5) et des hypothèses.

7.3. Nous allons maintenant généraliser le théorème de synthèse de C. S. Herz pour le cercle ($n = 2$, $p = 2$), et le contre-exemple de L. Schwartz ($n \geq 3$, $p = 2$). Mais nous ne savons pas ce qui se passe dans le cas critique $n > 3$, $p = \frac{n-1}{n-2}$.

THÉORÈME 5.- Soit S^{n-1} la sphère-unité $t_1^2 + \dots + t_n^2 = 1$ dans \mathbb{R}^n . Soit $1 < p \leq 2$.

1) Si $n = 3$, $p = 2$ ou si $n > 3$, $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$, la sphère S^{n-1} n'est pas un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$.

2) Si $n = 1$ ou 2 pour tout p , ou si $n \geq 3$ pour $1 < p < \frac{n-1}{n-2}$, la sphère S^{n-1} est un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$.

Pour démontrer le 2), on utilise la méthode de Herz pour le cercle et $A_2(\mathbb{R}^2)$ (cf. [7]) avec quelques complications dues à la dimension n . Pour le 1) on reprend l'idée de Schwartz [18] avec quelques complications dues au fait qu'on doit travailler avec un multiplicateur de \mathcal{FL}^p , et plus seulement avec une fonction bornée.

1) Soit s la mesure superficielle invariante par rotations sur S^{n-1} . Il s'agit de voir que $\varphi = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\partial s}{\partial x_1}\right) \in M_p$. C'est ce qu'on prouve, pour $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$, en appliquant un théorème d'interpolation de E. M. Stein [20] sur les familles analytiques d'opérateurs. Pour z complexe, on pose $\varphi_z(t) = (1 + 4\pi^2|t|^2)^{z/2}\varphi(t)$, et l'on définit un opérateur T_z par $T_z(f) = \mathcal{F}(\varphi_z \cdot \overline{\mathcal{F}}f)$. On constate que :

(6) pour $\operatorname{Re} z = \frac{n-3}{2}$, on a $T_z \in \operatorname{Cv}_2(\mathbb{R}^n)$,

car dans ce cas φ_z est bornée, puisque $\varphi(t) = O(|t|^{-\frac{n-3}{2}})$ quand $|t| \rightarrow +\infty$;

(7) pour $\operatorname{Re} z = -1$, on a $T_z \in \operatorname{Cv}_p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < +\infty$,

car alors $T_z = \frac{\partial V_{-z}}{\partial x_1} * s$, où V_{-z} est le potentiel de Bessel d'ordre $-z$.

Par interpolation, on obtient que $T_0 = \mathfrak{F}\varphi \in C_v_p(\mathbb{R}^n)$ si $\frac{n-1}{n-2} < p \leq 2$.

2) Soit $f \in M_p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{sp}(f) \subset S^{n-1}$. Supposons $1 < p < \frac{n-1}{n-2}$, c'est-à-dire $q > n-1$. En appliquant le théorème 4 à f et à une fonction u indéfiniment dérivable à support compact telle que $u(t) = 1 - |t|^2$ au voisinage de S^{n-1} , on obtient que

$$(8) \quad \Delta f + 4\pi^2 f = 0,$$

où Δ est le laplacien. On est alors ramené à prouver que toute solution f de (8) qui appartient à M_p est limite ultrafaible de combinaisons linéaires d'exponentielles-solutions. Ce dernier point s'obtient en passant en coordonnées sphériques :

$$t = ru, \quad r = \sqrt{t_1^2 + \dots + t_n^2}, \quad u \in S^{n-1},$$

et en développant $f(ru)$, à r fixé, en séries d'harmoniques sphériques, lesquelles convergent ultrafaiblement vers f au sens des moyennes de Cesaro $(C, n-1)$; on s'appuie de plus sur le fait que ces moyennes sont des transformées de Fourier de mesures à support dans S^{n-1} et qu'elles restent bornées en norme M_p .

8. Résultats divers.

8.1. Dans [2], S. W. Drury montre que l'ensemble triadique de Cantor est de synthèse pour $A_p(\mathbb{R})$. De plus il prouve que seules les fonctions analytiques "opèrent" sur $A_p(\mathbb{T})$. Il généralise en outre un théorème de Beurling et Helson [1] :

si $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que, pour toute $u \in A_p(\mathbb{R})$, on ait $u \circ \sigma \in A_p(\mathbb{R})$, alors $\sigma(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

8.2. La construction de Malliavin, sous la forme générale, valable pour une algèbre de Banach commutative régulière semi-simple, que lui a donnée Katznelson ([9], p. 231), s'applique au cas de l'algèbre $A_p(G)$ d'un groupe G compact abélien ; on

obtient qu'il y a alors dans $A_p(G)$ des ensembles de non-synthèse. On voit en effet que la condition suffisante (7.2) de l'énoncé de Katznelson vaut pour Cv_p , en interpolant cette condition entre Cv_2 et $Cv_1 = \mathcal{M}^1$.

8.3. C. S. Herz obtient un résultat (non publié) plus général que le théorème 1, à savoir que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $A_p(G)$ dans $B_r(H)$ pour $r \leq p \leq 2$ ou $2 \leq p \leq r$. Ceci entraîne que, si G est aménable, on a les inclusions $A_2(G) \subset A_p(G) \subset A_r(G)$. Ces inclusions sont évidentes quand G est abélien, d'après Riesz-Thorin.

9. Quelques problèmes.

9.1. En remplaçant $L^p(G)$ et $L^q(G)$ par d'autres espaces E et F de fonctions (ou distributions) sur lesquels G opère convenablement, par une construction du type $P(E \hat{\otimes} F)$ obtenir, puis étudier, des algèbres nouvelles.

9.2. Soit $u \in A_p(G)$. Existe-t-il $f \in L^p(G)$ et $g \in L^q(G)$ tels que $u = f * \check{g}$?

9.3. Soit $u \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Si la fonction u est radiale, peut-on choisir, dans la définition (1) de u , les f_k et g_k radiales ?

9.4. Soit G_d le groupe G rendu discret. A-t-on $B_p(G) = B_p(G_d) \cap \mathcal{C}(G)$?

9.5. Dans le théorème 1, on suppose que $\sigma(H)$ est dense dans G . Alors est-ce que $u \mapsto u \circ \sigma$ est une isométrie de $B_p(G)$ dans $B_p(H)$?

9.6. Soit \bar{H} le compactifié de Bohr de H et soit σ l'application canonique de H dans \bar{H} . Est-ce que $u \mapsto u \circ \sigma$ applique $B_p(\bar{H})$ sur $B_p(H) \cap PP(H)$?

9.7. Les inclusions des $A_p(G)$ signalées en 8.3 sont-elles valables pour tout groupe G ?

9.8. Si G n'est pas abélien, a-t-on $A_p(G) = A_q(G)$?

9.9. Le 2) du théorème 2 vaut-il sans l'hypothèse que G est aménable ?

9.10. Soit T dans la boule-unité de $PM_p(G)$. Est-ce que T est limite ultra-faible de combinaisons linéaires d'opérateurs $\rho(x)$ situées dans la boule-unité de $PM_p(G)$?

9.11. Quels sont les points extrémaux de la boule-unité de $PM_p(G)$? Remarque (communiquée au conférencier par G. Kerkycharian) : Si $p \neq 1$, il y en a d'autres que les $\lambda \rho(\varepsilon_a)$, $|\lambda| = 1$, sinon, d'après le théorème 2 et la formulation barycentrique du théorème de Krein-Milman, on obtiendrait que $PM_p = \mathcal{M}^1$.

9.12. Comparer $B_p(G)$ à l'espace de Banach $C_p(G)$ (resp. $D_p(G)$) des fonctions $u \in \mathcal{C}(G)$ telles que $\|u\|_{C_p} = \sup_{f \in L^1, \|\rho(f)\|_{CV_p} \leq 1} \left| \int_G f(x)u(x)dx \right| < +\infty$ (resp. telles

que $\|u\|_{D_p} = \left\| \sum_{\text{finie}} c_n \rho(\varepsilon_{x_n}) \right\|_{CV_p} \leq 1 \quad \left| \sum c_n u(x_n) \right| < +\infty$). Pour $p = 2$ et G aména-

ble, il est connu que ces trois espaces de Banach coïncident.

9.13. Un ensemble de synthèse pour $A_2(G)$ l'est-il nécessairement pour $A_p(G)$?

9.14. La sphère-unité S^{n-1} est-elle un ensemble de synthèse pour $A_p(\mathbb{R}^n)$, où $p = \frac{n-1}{n-2}$, $n > 3$? Sous-problème : $\frac{\partial s}{\partial x_1}$ est-il un convoluteur de $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p = \frac{n-1}{n-2}$, $n > 3$?

Si $p = 2$, on sait que les problèmes 2, 3, 9 et 10 ont tous une réponse affirmative, ainsi que les problèmes 4, 5, 6 si l'on suppose de plus les groupes aménables. Par contre, si $p \neq 2$, le conférencier ignore la réponse aux problèmes 2, 4, 5, 6, 10, 11, 12, 13, même dans le cas où $G = \mathbb{R}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEURLING and H. HELSON - Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers, Math. Scand., 1, 1953, p. 120-126.
- [2] S. W. DRURY - Studies in regular algebras, Dissertation at the Univ. of Cambridge, 1969.
- [3] P. EYMARD - L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France, 92, 1964, p. 181-236.
- [4] A. FIGA-TALAMANCA - Translation invariant operators in L^p , Duke Math. Journ., 32, 1965, p. 495-501.
- [5] F. P. GREENLEAF - Invariant means on topological groups, Van Nostrand, N. Y., 1969.
- [6] H. HELSON - Spectral synthesis of bounded functions, Ark. för Mat., 1, 1952, p. 497-502.
- [7] C. S. HERZ - Spectral synthesis for the circle, Ann. of Math., 68, 1958, p. 709-712.
- [8] C. S. HERZ - Remarques sur la Note précédente de M. Varopoulos, C. R. Acad. Sc. Paris, 260, 1965, p. 6001-6004.
- [9] Y. KATZNELSON - An introduction to harmonic analysis, John Wiley and Sons, 1968.
- [10] R. A. KUNZE and E. M. STEIN - Uniformly bounded representations and harmonic analysis of the 2×2 real unimodular group, Amer. J. of Math., 82, 1960, p. 1-62.
- [11] J. LAMPERTI - On the isometries of certain function spaces, Pacific J. Math., 8, 1958, p. 459-466.
- [12] H. LEPTIN - On locally compact groups with invariant means, Proc. of the A. M. S., 19, 1968, p. 489-494.

- [13] H. LEPTIN - Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, C. R. Acad. Sc. Paris, 266, 1968, p. 1180-1182.
- [14] N. LOHOUÉ - Analyse harmonique dans les espaces de multiplicateurs, Thèse de 3e Cycle, Grenoble, 1969.
- [15] S. K. PARROTT - Isometric multipliers, Pacific J. of Math., 25, 1968, p. 159-166.
- [16] H. REITER - Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford at the Clarendon Press, 1968.
- [17] M. A. RIEFFEL - Multipliers and tensor products of L^p spaces of locally compact groups, Studia Mathematica, 38, 1969, p. 71-82.
- [18] L. SCHWARTZ - Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C. R. Acad. Sc. Paris, 227, 1948, p. 424-426.
- [19] R. S. STRICHARTZ - Isomorphisms of convolution algebras, Proc. A. M. S., 17, p. 858-862.
- [20] E. M. STEIN - Interpolation of linear operators, Trans. A. M. S., 83, 1956, p. 482-492.
- [21] N. T. VAROPOULOS - Tensor algebras and harmonic analysis, Acta Math., 119, 1967, p. 51-112.