ADRIEN DOUADY

# Prolongement de faisceaux analytiques cohérents

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. nº 366, p. 39-54

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__39_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 366 Novembre 1969

# PROLONGEMENT DE FAISCEAUX ANALYTIQUES COHÉRENTS

(Travaux de TRAUTMANN, FRISCH-GUENOT et SIU)

par Adrien DOUADY

## 1. Faisceaux prolongeables.

Soient $X$ un espace analytique complexe, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique et $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $X - Z$. Notons $i$ l'injection canonique de $X - Z$ dans $X$. On dit que $\underline{E}$ est prolongeable s'il existe un faisceau cohérent sur $X$ qui prolonge $\underline{E}$. C'est le cas notamment si le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.

Les problèmes de prolongeabilité sont propres à la géométrie analytique : en géométrie algébrique, tous les faisceaux cohérents sont prolongeables [2].

Exemples. 1) Le faisceau $\underline{O}_{X-Z}$ est prolongeable. Si $Z$ est de codimension $1$, le faisceau $i_*\underline{O}_{X-Z}$ n'est pas cohérent. Si $X$ est normal et $Z$ de codimension $\geq 2$, on a $i_*\underline{O}_{X-Z} = \underline{O}_X$, donc $i_*\underline{O}_{X-Z}$ est cohérent.

2) Pour tout point $a$, on note $\mathbf{C}_a$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en $a$ et $0$ ailleurs. Si $(a_n)$ est une suite de points de $X$ tendant vers un point de $Z$, le faisceau $\Sigma\, \mathbf{C}_{a_n}$ est cohérent mais non prolongeable.

3) Prenons $X = \mathbf{C}^2$ et $Z = \{0\}$. Posons $U_1 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : x \neq 0\}$ et $U_2 = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : y \neq 0\}$. Le faisceau localement libre $\underline{E}$ obtenu en recollant $\underline{O}_{U_1}$ et $\underline{O}_{U_2}$ par multiplication par $e^{\frac{1}{xy}}$ sur $U_1 \cap U_2$ n'est pas prolongeable. En effet,

supposons que $\underline{F}$ soit un faisceau cohérent prolongeant $\underline{E}$. Quitte à remplacer $\underline{F}$ par son bidual, on peut supposer $\underline{F}$ réflexif. Mais il résulte du théorème des syzygies que, sur $\mathbf{C}^2$, tout faisceau réflexif est localement libre, donc il existe un bidisque ouvert $V$ de centre $0$ dans $X$ tel que $\underline{E}_{V-Z}$ soit libre. D'autre part, l'élément défini par $\frac{1}{xy} \in \underline{O}(U_{1,2})$ dans $H^1(V - Z, (U_i)_{i=1,2}; \underline{O})$ n'est pas nul, donc son image par exp n'est pas triviale car dans la suite exacte

$H^1(V - Z; \mathbf{Z}) \xrightarrow{2i\pi} H^1(V - Z; \underline{O}) \xrightarrow{\exp} H^1(V - Z; \underline{O}^*)$ on a $H^1(V - Z; \mathbf{Z}) = 0$, d'où contradiction.

*4) Prenons $X = \mathbf{C}^3$ et $Z = \{0\}$. Il existe sur $X - Z$ un faisceau localement libre prolongeable qui n'admet aucun prolongement localement libre. En effet, soit $\mathbf{C}_o$ le faisceau dont la fibre est $\mathbf{C}$ en $0$ et $0$ ailleurs, soit $0 \to \underline{L}_3 \to \underline{L}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{L}_o \to \mathbf{C}_o \to 0$ une résolution de $\mathbf{C}_o$, soit $\underline{F}$ l'image de $\underline{L}_2$ dans $\underline{L}_1$ et posons $\underline{E} = \underline{F}|_{X-Z}$. Le faisceau $\underline{E}$ est localement libre et $\underline{F}$ est de profondeur $2$, donc $\underline{F} = i_*\underline{E}$ d'après le cor. de la prop. 3 ci-dessous. Si $\underline{E}$ admettait un prolongement localement libre $\underline{F}'$, on aurait $\underline{F}' = i_*\underline{E}$, d'où $\underline{F}' = \underline{F}$ et prof $\underline{F} = 3$, ce qui n'est pas.*

Dans [8], Serre donne un premier critère de prolongeabilité :

THÉORÈME 1.- Si $X$ est normal, $Z$ partout de codimension $\geq 2$ et $\underline{E}$ sans torsion, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Le faisceau $i_*\underline{E}$ est cohérent.

(ii) Le faisceau $\underline{E}$ est prolongeable.

(iii) Pour tout $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert $U$ de $z$ dans $X$ tel que la restriction de $\underline{E}$ à $U - (Z \cap U)$ soit engendrée par ses sections.

L'inconvénient de ce critère est que la condition (iii) n'est pas locale sur

$X - Z$ . Dans [8], Serre posait la question de trouver des critères de prolongeabilité plus utilisables.

## 2. Profondeur.

Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $U$ . Pour tout $x \in U$ , on note $\mathrm{Tordim}_x \underline{F}$ le plus petit $k$ tel qu'il existe une résolution libre $0 \to \underline{L}_k \to \dots \to \underline{L}_o \to \underline{F} \to 0$ de $\underline{F}$ au voisinage de $x$ . C'est aussi le plus grand $k$ tel que $\mathrm{Tor}_k^{\underline{O}_x}(\underline{F}_x, \mathbb{C}) \neq 0$ .

Soient $X$ un espace $\mathbb{C}$-analytique, $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$ et $x \in X$ . Soit $\varphi$ un plongement d'un voisinage de $x$ dans $X$ dans un ouvert $U$ d'un espace affine $\mathbb{C}^n$ ; l'entier $n - \mathrm{Tordim}_{\varphi(x)} \varphi_* \underline{F}$ ne dépend pas du choix de $\varphi$, on l'appelle <u>profondeur</u> de $\underline{F}$ en $x$ et on le note $\mathrm{prof}_x \underline{F}$ . C'est aussi le plus grand entier $p$ tel qu'il existe un morphisme $\pi$ d'un voisinage de $x$ dans $X$ dans $\mathbb{C}^p$ tel que $\underline{F}$ soit $\pi$-plat. On pose $\mathrm{prof}\, \underline{F} = \inf_{x \in X} \mathrm{prof}_x \underline{F}$ .

Pour tout $k$ , notons $S_k(\underline{F})$ l'ensemble des $x \in X$ tels que $\mathrm{prof}_x \underline{F} \leq k$ . C'est un sous-ensemble analytique de $X$ , de dimension $\leq k$ . On dit que $\underline{F}$ vérifie la condition $(s_k)$ si l'on a

$(s_k)$ $$\dim S_k(\underline{F}) \leq k - 2 .$$

## 3. Enoncé des résultats.

Frisch-Guenot [6] et Siu [9] ont obtenu indépendamment et simultanément le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Soient</u> $X$ <u>un espace analytique complexe,</u> $Z \subset X$ <u>un sous-ensemble analytique de dimension</u> $\leq p$ <u>et</u> $\underline{E}$ <u>un faisceau cohérent sur</u> $X - Z$ . <u>Supposons que</u> $\underline{E}$

vérifie $(s_k)$ pour $k \leq p+2$ . Alors $i_*\underline{E}$ est cohérent et vérifie $(s_k)$ pour $k \leq p+2$ .

En particulier, on voit que tout faisceau de profondeur $\geq \dim Z + 3$ est prolongeable.

Trautmann avait démontré ce résultat dans le cas particulier où $Z$ est de dimension $0$ . Les deux démonstrations du Théorème 2 utilisent ce cas particulier.

Nous allons indiquer la démonstration du résultat de Trautmann, puis, très sommairement, celle du Théorème 2 par la méthode de Frisch-Guenot.

## 4. Cohomologie d'une couronne.

Si $E$ est un espace vectoriel topologique, notons ${}^tE$ son dual. Si $X$ est un espace analytique séparé à base dénombrable, pour tout faisceau analytique cohérent $\underline{F}$ sur $X$ , on définit sur $H^i(X ; \underline{F})$ une topologie (non nécessairement séparée) en identifiant $H^i(X ; \underline{F})$ à $H^i(X , \underline{U} ; \underline{F})$ , où $\underline{U}$ est un recouvrement ouvert de Stein dénombrable ; cette topologie ne dépend pas du choix de $\underline{U}$ . C'est aussi la topologie que l'on obtient en prenant une résolution fine $\underline{R}^\bullet$ de $\underline{F}$ telle que, pour tout ouvert $U$ de $X$ , les espaces $\underline{R}^i(U)$ soient des Fréchets. Nous noterons $\hat{H}^i(X ; \underline{F})$ le séparé de $H^i(X ; \underline{F})$ ; c'est un Fréchet. Si $H^i(X ; \underline{F})$ est de dimension finie, il est séparé.

PROPOSITION 1 (Dualité de Serre).- Soient $X$ une variété analytique de dimension $n$ séparée à base dénombrable et $\underline{M}$ un faisceau localement libre sur $X$ . Si $H^{i+1}(X ; \underline{M})$ est séparé, on a $H^{n-i}_{comp}(X ; \underline{M}') = {}^tH^i(X ; \underline{M})$ , où $\underline{M}' = \underline{Hom}(\underline{M} ; \underline{K})$ , où $\underline{K}$ est le faisceau des formes différentielles analytiques de degré $n$ .

Démonstration. Notons $\underline{R}^i$ le faisceau sur $X$ des formes différentielles de type $(0,1)$ de classe $C^\infty$ à valeurs dans le fibré $M$ associé à $\underline{M}$ , et $\underline{S}^j$ le faisceau

des courants de type $(0,j)$ à valeurs dans $\underline{M}'$. On a des résolutions fines $\underline{R}^{\cdot}$ de $\underline{M}$ et $\underline{S}^{\cdot}$ de $\underline{M}'$, les $\underline{R}^{i}(X)$ sont des Fréchets et $H^{o}_{comp}(X\,;\underline{S}^{n-i}) = {}^{t}\underline{R}^{i}(X)$.
Si $H^{i+1}(X\,;\underline{M})$ est séparé, $d^{i} : \underline{R}^{i}(X) \rightarrow \underline{R}^{i+1}(X)$ est un morphisme strict et $H^{n-i}_{comp}(X\,;\underline{M}') = H_{i}({}^{t}\mathbf{R}^{\cdot}(X)) = {}^{t}H^{i}(R^{\cdot}(X)) = {}^{t}H^{i}(X\,;\underline{M})$, cqfd.

Une norme ayant été choisie sur $\mathbf{C}^{n}$, notons $D_{a}$ la boule fermée de rayon $a$ dans $\mathbf{C}^{n}$. Pour $0 \leq a < b$, posons $R_{a,b} = \mathring{D}_{b} - D_{a}$. Si $K$ est un compact de $\mathbf{C}^{n}$, on pose $H^{i}_{K}(\underline{F}) = H^{i}_{K}(U\,;\underline{F})$ (cohomologie à support dans $K$), où $U$ est un voisinage quelconque de $K$.

PROPOSITION 2.- <u>On a</u>

$$H^{i}_{D_{a}}(\underline{O}) = \begin{cases} {}^{t}\underline{O}(D_{a}) & \underline{\text{pour}}\ \ i = n \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ \ i < n\,. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u>. Pour $b > a$, on a $H^{i}_{comp}(\mathring{D}_{b}\,;\underline{O}) = {}^{t}\underline{O}(\mathring{D}_{b})$ pour $i = n$ et $0$ pour $i \neq n$ par dualité de Serre. Le résultat s'en déduit par passage à la limite projective. Pour justifier ce passage, il suffit de montrer que
$H^{i}(\mathbf{C}^{n} - D_{a}\,;\underline{O}) = \varprojlim_{b>a} H^{i}(\mathbf{C}^{n} - \mathring{D}_{b}\,;\underline{O})$, ce qui résulte du lemme suivant :

LEMME 1.- <u>Soient</u> $X$ <u>un espace paracompact</u>, $(X_{n})$ <u>une suite de fermés de</u> $X$ <u>telle que</u> $X_{n} \subset \mathring{X}_{n+1}$ <u>pour tout</u> $n$ <u>et</u> $X = \bigcup X_{n}$ <u>et soit</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau sur</u> $X$. <u>L'application canonique</u> $H^{i}(X\,;\underline{F}) \rightarrow \varprojlim H^{i}(X_{n}\,;\underline{F})$ <u>est surjective. Elle est bijective si</u> $H^{i-1}(X_{n+1}\,;\underline{F}) \rightarrow H^{i-1}(X_{n}\,;\underline{F})$ <u>est surjective pour tout</u> $n$.

COROLLAIRE (Frenkel [4]).- <u>Supposons</u> $n \geq 2$. <u>On a</u> :

$$H^{i}(R_{a,b}\,;\underline{O}) = \begin{cases} {}^{t}\underline{O}(D_{a}) & \underline{\text{pour}}\ \ i = n-1 \\ \underline{O}(\mathring{D}_{b}) & \underline{\text{pour}}\ \ i = 0 \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ \ 0 < i < n-1\,. \end{cases}$$

Démonstration : résulte de la suite exacte

$$H^i_{D_a}(\underline{O}) \to H^i(\overset{\circ}{D}_b ; \underline{O}) \to H^i(R_{a,b} ; \underline{O}) \to H^{i+1} \quad \dots .$$

PROPOSITION 3.- Soient $z \in \mathbf{C}^n$ et $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de $z$ . Posons $Z = \{z\}$ . On a

$$H^i_Z(\underline{F}) \begin{cases} = 0 & \text{pour } i < \operatorname{prof}_z \underline{F} \\ \neq 0 & \text{pour } i = \operatorname{prof}_z \underline{F} . \end{cases}$$

Démonstration. Posons $p = \operatorname{prof}_z \underline{F}$ .

(a) Cas $p = \infty$ ; on a $\underline{F}_z = 0$ , c'est trivial.

(b) Cas $p = n$ ; on a $\underline{F} \approx \underline{O}^r$ au voisinage de $z$ , avec $r \neq 0$ , d'où $H^i_Z(\underline{F}) \approx {}^t\underline{O}^r_z$ pour $i = n$ et $= 0$ pour $i < n$ d'après la prop. 2.

(c) Cas $p = n - 1$ . Soit $0 \to \underline{O}^r \xrightarrow{d} \underline{O}^s \to \underline{F} \to 0$ une résolution de $\underline{F}$ minimale en $z$ , i. e. telle que les coefficients de la matrice $d$ appartiennent à $\underline{m}_z$ . Pour $i < n - 1$ , la suite exacte $H^i_Z(\underline{O}^s) \to H^i_Z(\underline{F}) \to H^{i+1}_Z(\underline{O}^r)$ donne $H^i_Z(\underline{F}) = 0$ . L'application $H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ définie par $d$ n'est pas injective. En effet, c'est l'application ${}^t\underline{O}^r_z \to {}^t\underline{O}^s_z$ définie par la matrice $d$ , et son noyau contient les éléments de la forme $(a_1\delta,\dots,a_r\delta)$ , où $\delta \in {}^t\underline{O}_z$ est la mesure de Dirac, et $r \neq 0$ car sinon $\operatorname{prof}_z \underline{F} = n$ . La suite exacte $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \to H^n_Z(\underline{O}^r) \to H^n_Z(\underline{O}^s)$ montre que $H^{n-1}_Z(\underline{F}) \neq 0$ .

(d) Cas $p < n - 1$ . Soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte au voisinage de $z$ , où $\underline{L}$ est libre. On a $H^i_Z(\underline{F}) = H^{i+1}_Z(\underline{F}_1)$ pour $i < n - 1$ , d'où le résultat par récurrence descendante sur $p$ .

COROLLAIRE.- Soient $X$ un espace analytique, $z \in \dot{X}$ , notons $i$ l'injection canonique de $X - \{z\}$ dans $X$ et soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$ . Pour que

$\underline{F} = i_* i^* \underline{F}$ , <u>il faut et il suffit que</u> $\mathrm{prof}_z\, \underline{F} \geq 2$ .

<u>Démonstration</u>. Pour $U$ voisinage ouvert de Stein de $z$ dans $X$ , on a une suite exacte : $0 \to H^0_Z(\underline{F}) \to H^0(U\,;\underline{F}) \to H^0(U-Z\,;\underline{F}) \to H^1_Z(\underline{F}) \to 0$ , où $Z = \{z\}$ , qui montre que $\underline{F}(U) \to \underline{F}(U-Z)$ est un isomorphisme si et seulement si la profondeur de $\underline{F}$ n'est ni $0$ ni $1$ .

PROPOSITION 4 (Andreotti-Grauert [1]).- <u>Soient</u> $a$ , $b$ , $a'$ , $b'$ <u>tels que</u> $0 \leq a < a' < b' < b$ <u>et</u> $\underline{F}$ <u>un faisceau analytique cohérent sur</u> $R_{a,b}$ .

(a) <u>L'application</u> $H^1(R_{a,b}\,;\underline{F}) \to H^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>est surjective</u> ; <u>on a</u> $\hat{H}^1(R_{a,b}\,;\underline{F}) = \hat{H}^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>et</u> $H^i(R_{a,b}\,;\underline{F}) = H^i(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>pour</u> $i > 1$ .

(b) <u>L'application</u> $H^i(R_{a,b}\,;\underline{F}) \to H^i(R_{a',b}\,;\underline{F})$ <u>est bijective pour</u> $i < \mathrm{prof}\,\underline{F} - 1$ <u>et injective pour</u> $i = \mathrm{prof}\,\underline{F} - 1$ .

(c) <u>L'espace</u> $H^i(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ <u>est de dimension finie pour</u> $1 \leq i \leq \mathrm{prof}\,\underline{F} - 2$ .

LEMME 2 (I. Furoncoli).- <u>Soient</u> $a$ , $c$ , $c'$ <u>tels que</u> $0 \leq a < c \leq c'$ . <u>Il existe une suite finie</u> $(C_0,\ldots,C_N)$ <u>d'ouverts convexes telle que</u> $\mathring{D}_c = C_0 \subset \ldots \subset C_N = \mathring{D}_{c'}$, <u>et que</u> $\overline{C_k - C_{k-1}}$ <u>puisse être séparé de</u> $D_a$ <u>par un hyperplan réel</u>.

(En termes imagés : "suffisamment de piqûres de moustiques provoquent un oedème".)

<u>Démonstration du lemme dans le cas euclidien</u>. On peut supposer $c' < \frac{4c-a}{3}$ . Pour $A \subset \mathbb{C}^n$ , notons $\mathrm{Conv}(A)$ l'enveloppe convexe de $A$ . Soient $x_1,\ldots,x_N$ des points de norme $\frac{4c-a}{3}$ tels que $\bigcup \mathrm{Conv}(\mathring{D}_c \cup \{x_k\}) \supset D_{c'}$ . Définissant les $C_k$ par $C_k = \mathring{D}_{c'} \cap \mathrm{Conv}(C_{k-1} \cup \{x_k\})$ , ça marche.

<u>Démonstration de la proposition 4</u>. (a) Soient $C_0,\ldots,C_N$ comme dans le lemme avec $c = b'$ , $c' = b$ , posons $G_k = \mathring{C}_k - D_a$ . Soit $S$ un demi-espace ouvert conte-

nant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ et ne rencontrant pas $D_a$ , soit $(U_m)$ un recouvrement de $G_k$ par des ouverts convexes tel que $U_o = S \cap G_k$ et $U_m \subset G_{k-1}$ pour $m \neq 0$ , et posons $V_m = U_m \cap G_{k-1}$ . On a $U_{m,m'} = V_{m,m'}$ pour $m \neq m'$ , d'où $C^i(G_k,(U_m);\underline{F}) = C^i(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$ pour $i > 0$ , en notant $C^i$ l'espace des cochaînes alternées. Comme $V_o$ est convexe, l'application $\underline{F}(U_o) \to \underline{F}(V_o)$ est d'image dense, et il en est de même de $C^o(G_k,(U_m);\underline{F}) \to C^o(G_{k-1},(V_m);\underline{F})$ . Par suite $H^1(G_k ; \underline{F}) \to H^1(G_{k-1} ; \underline{F})$ est surjective et devient bijective quand on sépare, et $H^i(G_k ; \underline{F}) = H^i(G_{k-1} ; \underline{F})$ pour $i > 1$ , d'où (a).

(b) Soient $c$ et $c'$ tels que $a < c \leq c' < b$ , et soient $C_o,\ldots,C_N$ comme dans le lemme. Posons $G_k = D_b - C_k$ . Soit $S$ un demi-espace ouvert contenant $\overline{C_k - C_{k-1}}$ tel que $\bar{S} \cap D_a = \emptyset$ , posons $U = S \cap C_k$ et $V = S \cap C_{k-1}$ . Par dualité de Serre, on a $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) = H^i_{comp}(V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$ , et, l'application $\underline{O}(U) \to \underline{O}(V)$ étant d'image dense, $H^n_{comp}(V) \to H^n_{comp}(U)$ est injective. La suite exacte $H^i_{comp}(U ; \underline{O}) \to H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(V ; \underline{O}) \to H^{i+1}_{comp}(U ; \underline{O})$ montre que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{O}) = 0$ pour $i < n$ . D'après le Théorème A de H. Cartan, $\underline{F}$ admet sur $\bar{U}$ une résolution de longueur $n - p$ , où $p = \text{prof}\ \underline{F}$ . Il en résulte par récurrence descendante sur $p$ que $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) = 0$ pour $i < p$ . La suite exacte $H^i_{comp}(U - V ; \underline{F}) \to H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F}) \to H^{i+1} \ldots$ montre que $H^i(G_{k-1} ; \underline{F}) \to H^i(G_k ; \underline{F})$ est bijective pour $i < p - 1$ et injective pour $i = p - 1$ , et il en est de même de $H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_{c'} ; \underline{F}) \to H^i(\mathring{D}_b - \mathring{D}_c ; \underline{F})$ . On conclut par passage à la limite projective en faisant tendre $c$ vers $a$ ou vers $a'$ , grâce au lemme 1.

(c) résulte de (a) et (b) par la méthode qui donne le théorème de finitude de Cartan-Serre.

5. Résultats de Trautmann [10].

PROPOSITION 5.- Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $R_{a,b}$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, il existe un faisceau analytique cohérent prolongeant $\underline{F}$ à $\mathring{D}_b$.

LEMME 3.- Soit $b'$ tel que $a < b' < b$. Si prof $\underline{F} \geq 3$, l'espace $H^o(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ engendre $\underline{F}_x$ pour tout $x \in R_{a,b'}$.

Démonstration. Considérons la suite exacte $0 \to \underline{m}_x\underline{F} \to \underline{F} \to \mathbf{C}_x \otimes \underline{F} \to 0$. L'espace $H^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). La suite exacte $\mathbf{C} \otimes \underline{F}_x \to H^1(R_{a,b'}\,;\underline{m}_x\underline{F}) \to H^1(R_{a,b'}\,;\underline{F})$ montre que $H^1(R_{a,b'}\,;\underline{m}_x\underline{F})$ est de dimension finie, donc séparé. Soit $b''$ tel que $a < b'' < \|x\| < b'$. Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} H^o(R_{a,b'}\,;\underline{F}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{C} \otimes \underline{F}_x & \to & H^1(R_{a,b'}\,;\underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{u} & H^1(R_{a,b'}\,;\underline{F}) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & H^1(R_{a,b''}\,;\underline{m}_x\underline{F}) & \xrightarrow{=} & H^1(R_{a,b''}\,;\underline{F}) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes d'après la prop. 4 (a) puisqu'elles partent d'espaces séparés, donc $u$ est un isomorphisme, $\varepsilon$ est surjectif, d'où le lemme par Nakayama.

Démonstration de la prop. 5. On peut supposer $n \geq 3$. Soient $a'$, $b'$, $b''$ tels que $a < a' < b' < b'' < b$. Il résulte du lemme qu'il existe un faisceau libre $\underline{L}_o$ et un morphisme $d_o : \underline{L}_o \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b''}$ surjectif sur $Q = \overline{R_{a',b'}}$. Posons $\underline{F}_1 = \operatorname{Ker} d_o$. On a prof $\underline{F}_1 \geq 3$ sur $Q$, donc il existe un faisceau libre $\underline{L}_1$ et un morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{F}_1$ défini surjectif au voisinage de $Q$. Le morphisme $d_1 : \underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ se prolonge à $D_{b'}$, et on a $d_o \circ d_1 = 0$ sur $R_{a,b'}$. Posons $\underline{G} = \operatorname{Coker} d_1$. On a un morphisme $f : \underline{G} \to \underline{F}$ défini sur $R_{a,b'}$ qui est un isomorphisme sur $R_{a',b'}$. Posons $S = S_1(\underline{G})$ et soit $T$ l'ensemble des $x \in R_{a,b'}$ tels que $f_x$ ne soit pas un isomorphisme. Les ensembles $S$ et $T$ sont des ensembles analytiques qui ne rencontrent pas $R_{a',b'}$, donc sont de dimension $0$. Par suite $S$ est fini. Mais il résulte du corollaire de la prop. 3 que $T \subset S$, car, si $x \notin S$, on a $\underline{G} = j_* j^* \underline{G} = j_* j^* \underline{F} = \underline{F}$ au voisinage de $x$, où $j : R - \{x\} \to R$ est l'injection canonique. Par suite, $T$ est fini, donc fermé dans $\mathring{D}_{b'}$. On obtient un prolongement de $\underline{F}$ en recollant $\underline{F}$ et $\underline{G}|_{\mathring{D}_{b'} - T}$ suivant $f$.

COROLLAIRE.- *Si $Z$ est de dimension $0$, tout faisceau de profondeur $\geq 3$ sur $X - Z$ est prolongeable.*

PROPOSITION 6.- *Supposons $Z$ de dimension $0$ et soit $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent de profondeur $\geq 2$ sur $X - Z$. Si $\underline{E}$ est prolongeable, $i_* \underline{E}$ est cohérent de profondeur $\geq 2$.*

LEMME 4.- *Soient $n \geq 3$ et $0 < b' < b$. Posons $X = \mathring{D}_b$, $X' = \mathring{D}_{b'}$, $Z = \{0\}$ et $W = X' - Z$. Soit $\underline{E}$ un faisceau cohérent sur $X - Z$ de profondeur $\geq 2$ prolongeable. Il existe alors une suite exacte $0 \to \underline{E}_1 \to \underline{L}_o \to \underline{E} \to 0$ sur $W$ où $\underline{L}$ libre et* $H^1(W ; \underline{E}_1) = 0$.

*Démonstration*. Soient $\underline{F}$ un prolongement de $\underline{E}$ et $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{X}'$, où $\underline{L}$ est libre. Dans la suite exacte $H^o(W ; \underline{L}) \to H^o(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{F}_1)$, le faisceau $\underline{F}_1$ est de profondeur $\geq 3$ sur $\bar{X}' - Z$, donc $H^1(W ; \underline{F}_1)$ est de dimension finie d'après la prop. 4 (c). Il existe donc des sections $f_1, \ldots, f_s \in H^o(W ; \underline{E})$ telles que $H^o(W ; \underline{E})$ soit engendré par $H^o(W ; \underline{L}) \cup \{f_1, \ldots, f_s\}$, d'où, en posant $\underline{L}_o = \underline{L} \oplus \underline{O}_W^s$, un morphisme $\underline{L}_o \to \underline{E}$ tel que $H^o(W ; \underline{L}_o) \to H^o(W ; \underline{E})$ soit surjectif. En notant $\underline{E}_1$ le noyau de ce morphisme, la suite exacte $H^o(W ; \underline{L}_o) \to H^o(W ; \underline{E}) \to H^1(W ; \underline{E}_1) \to H^1(W ; \underline{L}_o)$, où $H^1(W ; \underline{L}_o) = 0$

d'après le cor. de la prop. 2, donne $H^1(W\,;\underline{E}_1) = 0$ .

Démonstration de la prop. 6. On peut supposer qu'on est dans les conditions du lemme. Le faisceau $\underline{E}_1$ est alors de profondeur $\geq 3$ , donc prolongeable d'après la prop. 5, ce qui permet d'itérer la construction. On obtient une suite exacte $0 \to \underline{E}_2 \to \underline{L}_1 \to \underline{E}_1 \to 0$ sur $W' = X'' - Z$ , où $X'' = \overset{\circ}{D}_{b''}$ , $0 < b'' < b'$ . Le morphisme $\underline{L}_1 \to \underline{L}_o$ se prolonge à $X''$ . Notons $\bar{\underline{E}}$ le conoyau de ce morphisme prolongé. Pour $U = \overset{\circ}{D}_a$ , $a \leq b''$ , on a des suites exactes

$\underline{E}_2(U-Z) \to \underline{L}_1(U-Z) \to \underline{E}_1(U-Z) \to 0$ , $0 \to \underline{E}_1(U-Z) \to \underline{L}_o(U-Z) \to \underline{E}(U-Z) \to 0$ ,

d'où $\underline{E}(U-Z) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U-Z) \to \underline{L}_o(U-Z)) = \mathrm{Coker}(\underline{L}_1(U) \to \underline{L}_o(U)) = \bar{\underline{E}}(U)$ . Par suite $\bar{\underline{E}} = i_*\underline{E} = i_*i^*\bar{\underline{E}}$ , et $\bar{\underline{E}}$ est de profondeur $\geq 2$ à l'origine d'après le cor. de la prop. 3.

## 6. Introduction de paramètres.

Le corollaire de la prop. 3 admet la généralisation suivante :

PROPOSITION 7 [7].- Soient $X$ un espace analytique, $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique de dimension $p$ , soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent sur $X$ et notons $i$ l'injection canonique $X - Z \to X$ . Si $\underline{F}$ vérifie $(s_k)$ pour $k \leq p+1$ , on a $\underline{F} = i_*i^*\underline{F}$ .

LEMME 5.- Soient $U = U' \times U'' \subset \mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ un polydisque ouvert, $\underline{F}$ un faisceau cohérent de profondeur $\geq p+k$ au voisinage de $\bar{U}$ . Posons $Z = U' \times \{0\}$ . On a $H^o(U-Z\,;\underline{F}) = H^o(U\,;\underline{F})$ si $k \geq 2$ , et $H^i(U-Z\,;\underline{F}) = 0$ pour $1 \leq i \leq k-2$ .

Démonstration par récurrence descendante sur $k$ : On a

$$H^i(U-Z\,;\underline{O}) = \underline{O}(U')\,\hat{\otimes}\,H^i(U''-\{0\}\,;\underline{O}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq q-2 \\ \underline{O}(U) & \text{pour } i = 0 \end{cases}$$

d'où le résultat pour $k = q$ . Si $k < q$ , soit $0 \to \underline{F}_1 \to \underline{L} \to \underline{F} \to 0$ une suite exacte sur $\bar{U}$ , où $\underline{L}$ est libre. On a prof $\underline{F}_1 \geq p + k + 1$ . La suite exacte $H^i(U - Z ; \underline{L}) \to H^i(U - Z ; \underline{F}) \to H^{i+1}(U - Z ; \underline{F}_1)$ donne le résultat pour $i > 0$ . Si $k \geq 2$ , on a $H^1(U - Z ; \underline{F}_1) = 0$ , d'où

$\underline{F}(U - Z) = \mathrm{Coker}(\underline{F}_1(U - Z) \to \underline{L}(U - Z)) = \mathrm{Coker}(\underline{F}_1(U) \to \underline{L}(U)) = \underline{F}(U)$ .

Démonstration de la proposition par récurrence sur $p$ : Posons $Z' = \mathrm{sing}(Z) \cup (Z \cap S_{p+1}(\underline{F}))$ . Au voisinage de chaque point de $Z - Z'$ , on est dans la situation du lemme, d'où etc.

Pour continuer, il nous faut des espaces de Banach et des complexes directs.

Soient $K = K_1 \times \dots \times K_n$ et $L = L_1 \times \dots \times L_n$ deux polydisques concentriques dans $\mathbb{C}^n$ tels que $\mathring{L} \neq \emptyset$ et $L \subset \mathring{K}$ . Posons $Q = K - \mathring{L}$ , $Q_i = K_i - \mathring{L}_i$ , $T_i = K_1 \times \dots \times Q_i \times \dots \times K_n$ et $T_{i_0,\dots,i_q} = T_{i_0} \cap \dots \cap T_{i_q}$ . Notons $B(T_{i_0,\dots,i_q})$ l'espace de Banach des fonctions continues sur $T_{i_0,\dots,i_q}$ holomorphes à l'intérieur.

Posons $C_b^q(Q ; \underline{O}) = \prod_{i_0 < \dots < i_q} B(T_{i_0,\dots,i_q})$ . On a un complexe $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$ , où les $d : C_B^q(Q ; \underline{O}) \to C_B^{q+1}(Q ; \underline{O})$ sont les différentielles de Čech. Notons $H_B^q(Q ; \underline{O})$ son homologie.

PROPOSITION 8.- Si $n \geq 2$ , le complexe $C_B^\bullet(Q ; \underline{O})$ est direct. On a

$$H_B^q(Q ; \underline{O}) = \begin{cases} B(K) & \underline{\text{pour}}\ q = 0 \\ 0 & \underline{\text{pour}}\ 1 \leq q \leq n - 2 . \end{cases}$$

Pour la démonstration, on se ramène par $\hat{\otimes}_\varepsilon$ à l'étude du cas $n = 1$ .

Soit $\underline{F}$ un faisceau analytique cohérent au voisinage de $K$ . On dit que $Q$ est une couronne privilégiée pour $\underline{F}$ si, quels que soient $q$ et $(i_0,\dots,i_q)$ , le compact $T_{i_0,\dots,i_q}$ est $\underline{F}$-privilégié [3]. On montre, comme dans [3], que pour tout faisceau $\underline{F}$ analytique cohérent sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{C}^n$ , il existe une couronne privilégiée Q pour $\underline{F}$ de centre 0 contenue dans U . De plus, si $(s_n)$ est une suite de points de U tendant vers 0 , on peut choisir Q ne contenant aucun des $s_n$ .

Si Q est une couronne privilégiée pour $\underline{F}$ , on définit comme ci-dessus le complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{F})$ . On dit qu'un complexe $E^{\bullet}$ d'espaces de Banach est direct en degré i si $d^{i-1} : E^{i-1} \to E^i$ et $d^i : E^i \to E^{i+1}$ sont des morphismes directs (en particulier on exige que $\operatorname{Im} d^i$ soit facteur direct topologique dans $E^{i+1}$ ).

PROPOSITION 9.- Soit $Q = K - \overset{\circ}{L}$ une couronne privilégiée pour $\underline{F}$ , où $\underline{F}$ est un faisceau cohérent au voisinage de K . Posons $p = \operatorname{prof}_Q \underline{F}$ et $p' = \operatorname{prof}_K \underline{F}$ . Le complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{F})$ est direct en degré $p-2$ . On a

$$H^q_B(Q\,;\underline{F}) = \begin{cases} B(K\,;F) & \text{pour } q = 0 \text{ si } p' \geq 2 \\ 0 & \text{pour } 1 \leq q \leq p'-2 \\ \text{est de dimension finie pour} & 1 \leq q \leq p-2 \,. \end{cases}$$

Longueur de la démonstration : 3 pages dans [6].

La démonstration du théorème 2 va maintenant résulter de trois lemmes.

LEMME 6.- Soient $U = U' \times U''$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ , notons $\pi : U \to U'$ la projection, soient Z un sous-ensemble analytique de U tel que $\pi|_Z$ soit fini et $\underline{E}$ un faisceau analytique cohérent sur $U - Z$ vérifiant $(s_k)$ pour $k \leq p+2$ . Posons $S = S_{p+2}(\underline{E})$ . On suppose que les fibres de $\pi|_S$ sont de dimension 0 et que $\underline{E}|_{U-Z-S}$ est $\pi$-plat. Il existe alors un voisinage $U_1$ de 0 dans U et un sous-ensemble analytique $Z_1 \subset Z \cap U_1$ de dimension $\leq p-1$ tels que, en notant i l'injection canonique $X - Z \to X - Z_1$ , le faisceau $i_*\underline{E}$ soit cohérent et vérifie $(s_k)$ pour $k \leq p+2$ .

Démonstration. Pour $t \in U'$ , posons $Z(t) = Z \cap \pi^{-1}(t)$ . On peut supposer que $Z(0) = \{0\}$ et que $S(0)$ est l'ensemble des points d'une suite tendant vers $0$ . Soit $Q = K - \mathring{L} \subset U''$ une couronne privilégiée pour $\underline{E}(0)$ ne rencontrant pas $S(0)$ . Il existe un voisinage $U'_1$ de $0$ dans $U'$ tel que, pour tout $t \in U'_1$ , la couronne $Q$ ne rencontre pas $S(t)$ et soit privilégiée pour $\underline{E}(t)$ . Les complexes $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E}(t))$ sont les fibres d'un complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E})$ de fibrés vectoriels banachiques sur $U'_1$ . Pour tout $t \in U'_1$ , le faisceau $\underline{E}(t)$ est de profondeur $\geq 3$ sur $Q$ , et il existe en vertu des prop. 5 et 6 un faisceau $\underline{F}(t)$ de profondeur $\geq 2$ sur $K$ qui coïncide avec $\underline{E}(t)$ sur $Q$ . D'après la prop. 8, le complexe $C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{E}(t)) = C^{\bullet}_B(Q\,;\underline{F}(t))$ est direct en degré $1$ et son homologie est de dimension finie. Cette dimension dépend de façon analytiquement semi-continue supérieurement de $t$ , donc il existe un ensemble analytique $T \subset U'_1$ de dimension $\leq p-1$ tel que $\dim H^1_B(Q\,;\underline{E}(t))$ soit constante sur $U'_1 - T$ . Sur cet ouvert, les $H^0_B(Q\,;\underline{E}(t))$ sont les fibres d'un fibré $H^0_B(Q\,;\underline{E})$ . A ce fibré correspond par la méthode de ([3], § 8, n° 5) un faisceau sur $(U'_1 - T) \times \mathring{K}$ , $\pi$-plat, et on montre grâce à la prop. 7 que ce faisceau coïncide avec $\underline{E}$ là où ils sont tous deux définis, d'où le lemme avec $U_1 = U'_1 \times \mathring{K}$ et $Z_1 = Z \cap \pi^{-1}(T)$ .

LEMME 7.- Soient $V$ un ouvert de $\mathbf{C}^p \times \mathbf{C}^q$ , $Z$ un sous-ensemble analytique de $V$ , $Y$ un sous-ensemble analytique de $V - Z$ et $\pi : V \to \mathbf{C}^p$ la projection canonique. On suppose les fibres de $\pi|_Z$ de dimension $0$ et les fibres de $\pi|_Y$ de dimension $\geq 1$ en chaque point. Alors l'adhérence $\bar{Y}$ de $Y$ dans $V$ est un sous-ensemble analytique de $V$ . Si $\pi|_Y$ n'est ouverte en aucun point, $Z \cap \bar{Y}$ est de dimension $\leq p-1$ .

Longueur de la démonstration : 3 ½ pages, en introduisant une filtration analytique $(Y_k)$ sur $Y$ telle que $\pi|_{Y_k - Y_{k+1}}$ soit "de rang constant" $p-k$ .

LEMME 8.- Soient $V$ un ouvert de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ , $\underline{F}$ un faisceau cohérent sur $V$ et $\pi : V \to \mathbb{C}^p$ la projection. Soit $Y$ l'ensemble des points où $\underline{F}$ n'est pas $\pi$-plat. Alors $Y$ est un sous-ensemble analytique de $V$ et $\pi|_Y$ n'est ouverte en aucun point. Si $\text{prof}\ \underline{F} \geq p + k$ , les fibres de $\pi|_Y$ sont de dimension $\geq k + 1$ en chaque point.

La première assertion constitue l'un des buts de [5]. La seconde est démontrée dans [6] en deux pages.

Démonstration du théorème 2 par récurrence sur $p$ . Le résultat est local. Soit $z \in Z$ . On peut plonger un voisinage de $z$ dans $X$ dans un ouvert $U = U' \times U''$ de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ , de façon que $\pi|_{Z \cap U}$ soit fini. Posons $S = S_{k+2}(\underline{E})$ . Soient $Y_1$ l'ensemble des points de $S$ où la fibre de $\pi|_S$ est de dimension $\geq 1$ , $Y_2$ l'ensemble des points de $U - Z - S$ où $\underline{E}$ n'est pas $\pi$-plat et posons $Y = Y_1 \cup Y_2$ . Il résulte des lemmes 7 et 8 que l'adhérence $\bar{Y}$ de $Y$ dans $U$ est un sous-ensemble analytique de $U$ qui rencontre $Z$ suivant un sous-ensemble analytique $Z_1$ de dimension $\leq p - 1$ . Au voisinage de chaque point de $Z - Z_1$ , on est dans les conditions du lemme 6, donc l'image directe de $\underline{E}$ dans $U - Z_1$ est un faisceau cohérent vérifiant $(s_k)$ pour $k \geq p + 2$ . Il en est de même de son image directe dans $U$ en vertu de l'hypothèse de récurrence, d'où le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT - Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. S. M. F., 90 (1962), p. 193-259.

[2] A. BOREL et J.-P. SERRE - Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck), Bull. S. M. F., 86 (1958), p. 97-136.

[3] A. DOUADY - Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 1-98.

[4] J. FRENKEL - Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. S. M. F., 85 (1957), p. 135-220.

[5] J. FRISCH - Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, Inv. Math., 4 (1967), p. 118-138.

[6] J. FRISCH et J. GUENOT - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Inv. Math., 7 (1969), p. 321-343.

[7] G. SCHEJA - Fortsetzungssätze der complex-analytischen Cohomologie und ihre algebraische Charakterisierung, Math. Ann., 157 (1964), p. 75-94.

[8] J.-P. SERRE - Prolongement de faisceaux analytiques cohérents, Ann. Inst. Fourier, 16 (1966), p. 363-374.

[9] Y.-T. SIU - Extending coherent analytic sheaves, Ann. of Math., 90 (1969), p. 108-143.

[10] G. TRAUTMANN - Ein Kontinuitätssatz für die Fortsetzung kohärenter analytischer Garben, Arch. Math., 19 (1967), p. 188-196.