ROGER TEMAM

Approximation d'équations aux dérivées partielles par des méthodes de décomposition

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 381, p. 295-303

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__295_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 381 Mai-Juin 1970

APPROXIMATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PAR DES MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION

par Roger TEMAM

Nous allons donner dans cet exposé un aperçu de quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites (et de calcul des variations) qui se sont développées récemment et jouent actuellement un grand rôle en Analyse Numérique.

L'idée commune à ces méthodes est la "décomposition" : il s'agit, utilisant certaines propriétés spécifiques du problème (décomposition des opérateurs pour les problèmes aux limites, décomposition des opérateurs et des contraintes en calcul des variations), de ramener la résolution d'un problème donné à la résolution d'un certain nombre de problèmes beaucoup plus simples.

Il n'est pas possible de faire un exposé complet sur le sujet ; nous nous contenterons de montrer sur quelques exemples l'idée générale de ces méthodes.

PLAN

1. Problèmes d'évolution.

1.1. Description heuristique de la méthode des pas fractionnaires.

On considère dans un espace de Hilbert H une équation d'évolution

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) , & 0 < t < T \\ u(0) = u_o , & \end{cases}$$

A opérateur linéaire dans H (hypothèses à préciser).

Dans les méthodes usuelles d'approximation, on considère un découpage de l'intervalle $[0,T]$ en N intervalles égaux de longueur k, et on définit une famille d'éléments de H,

$$u^o , \dots , u^N ,$$

par récurrence, en partant de

$$(1.2)\qquad u^o = u_o ,$$

et ensuite par

$$(1.3)\qquad \frac{u^{n+1} - u^n}{k} + Au^{n+1} = f^{n+1} \quad (= f((n+1)k)) , \qquad n = 0 , \dots , N-1 .$$

Si l'opérateur A admet une décomposition

$$(1.4)\qquad A = \sum_{i=1}^{q} A_i ,$$

on peut utiliser cette décomposition pour approcher (1.1) et cela conduit au schéma de pas fractionnaires suivant : on définit les éléments

$$u^{n+\frac{i}{q}} , \qquad n = 0 , \dots , N-1 , \quad i = 1 , \dots , q ,$$

par récurrence, en partant de

$$(1.5)\qquad u^o = u_o ,$$

et ensuite par

$$(1.6)\qquad \frac{u^{n+\frac{i}{q}} - u^{n+\frac{i-1}{q}}}{k} + A_i u^{n+\frac{i}{q}} = f^{n+\frac{i}{q}}$$

$n = 0 ,\dots, N-1$, $i = 1 ,\dots, q$, où

$$(1.7)\qquad f^{n+1} = \sum_{i=1}^{q} f^{n+\frac{i}{q}} .$$

Dans le cas du schéma (1.3), le calcul de u^{n+1} nécessite l'inversion de l'opérateur $(I + kA)$; dans le cas du schéma (1.6), le calcul de $u^{n+\frac{1}{q}} ,\dots, u^{n+1}$, nécessite l'inversion des opérateurs $(I + kA_1) ,\dots, (I + kA_q)$, et la méthode est intéressante lorsque l'inversion de ces opérateurs est plus simple que l'inversion de l'opérateur $I + kA$.

1.2. Un résultat de convergence.

Nous allons énoncer un résultat précis sur la manière dont les $u^{n+\frac{i}{q}}$ approximent la solution u de (1.1). On se reportera à [7] pour la démonstration de ce résultat et pour d'autres résultats plus généraux.

Soient V_i , $i = 1 ,\dots, q$, des espaces de Hilbert, $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$, avec

$$V \subset V_i \subset H$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant. On identifie H à son dual, V_i' , désignant le dual de V_i , V' celui de V , on a

$$(1.8)\qquad V \subset V_i \subset H \subset V_i' \subset V' ,$$

avec injections continues, chaque espace étant dense dans le suivant.

Supposons que $A_i \in \underline{L}(V_i , V_i')$ avec

$$(1.9)\qquad (A_i v , v) \geq \alpha_i \|v\|^2_{V_i} , \qquad \forall\ v \in V_i , \quad \alpha_i > 0 .$$

Alors, pour u_o donné dans H et f donné dans $L^2([0,T] ; H)$, l'équation

(1.1) possède une solution unique $u \in L^2([0,T]\,;V) \cap \underline{C}([0,T]\,;H)$ (cf. Lions [2]).

On se donne une décomposition arbitraire de f

$$(1.10) \qquad f = \sum_{i=1}^{q} f_i \ , \qquad f_i \in L^2([0,T]\,;H)\ ,$$

et on pose

$$(1.11) \qquad f^{n+\frac{i}{q}} = \frac{1}{k}\int_{nk}^{(n+1)k} f_i(s)\,ds\ .$$

Les équations (1.6) définissent alors de manière unique les $u^{n+\frac{i}{q}}$ comme éléments de V_i. On introduit les fonctions étagées u_{ik}, $1 \le i \le q$:

$$u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{q}}\ , \qquad \text{pour} \quad t \in [nk\,,(n+1)k[\ ,\quad i = 1\,,\dots,\,q\ ,$$

et on a le résultat de convergence (cf. [7]).

THÉORÈME 1.1.- Lorsque $k \to 0$,

(i) u_{ik} converge vers u dans $L^2([0,T]\,;V_i)$ fort et $L^\infty([0,T]\,;H)$ faible-étoile,

(ii) $u_{ik}(t) \to u(t)$ dans H fort, $\forall\ t \in [0,T]$, où u est la solution de (1.1).

Remarque 1.1.- On trouvera dans [7] diverses variantes de la méthode des pas fractionnaires et pour toutes ces méthodes des résultats de convergence analogues au théorème 1.1, lorsque les opérateurs A_i dépendent de t, pour des opérateurs A_i non linéaires monotones (au sens de Minty [5]), dans le cas d'équations d'évolution du premier ou second ordre en t.

Pour certaines équations particulières n'entrant pas dans le cadre de [7], cf. [8], [9], [10]. Nous développons ci-après le cas des équations de Carleman.

1.3. Equations de Carleman.

Dans le cas des équations de Carleman (un système hyperbolique non linéaire de la théorie cinétique des gaz [1]), les méthodes de décomposition permettent d'obtenir un schéma d'approximation particulièrement simple.

Soient $\Omega =]a_1,a_2[\times]b_1,b_2[$, $Q = \Omega \times]0,T[$; il s'agit de trouver deux fonctions $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$ définies dans Q et vérifiant

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + u^2 - v^2 = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + v^2 - u^2 = 0 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

$$u(a_1,y,t) = v(x,b_1,t) = 0 \tag{1.13}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y,0) = u_o(x,y) \\ v(x,y,0) = v_o(x,y) \ , \end{array}\right. \tag{1.14}$$

et en outre les contraintes :

$$u \geq 0 \ , \quad v \geq 0 \ . \tag{1.15}$$

Pour u_o et v_o donnés, vérifiant

$$u_o \ , \ v_o \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ , \tag{1.16}$$

$$u_o(a_1,y) = v_o(x,b_1) = 0 \ , \tag{1.17}$$

$$u_o \geq 0 \ , \quad v_o \geq 0 \ , \tag{1.18}$$

le problème (1.12) - (1.15) possède une solution unique $\{u,v\}$, avec

$$u \ , \ v \in L^\infty([0,T] \, ; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \ . \tag{1.19}$$

Le schéma d'approximation par décomposition est le suivant : on définit des

$$u^{n+\frac{i}{2}} \ , \ v^{n+\frac{i}{2}} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \ ,$$

$n = 0 ,\ldots, N-1$, $i = 1 , 2$, avec $u^{n+\frac{i}{2}} , v^{n+\frac{i}{2}} \geq 0$.

On part de

$$u^o = u_o \;, \qquad v^o = v_o \;, \tag{1.20}$$

puis, lorsque $u^o, v^o, \ldots, u^n, v^n$ sont connus, on définit $u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}$ par

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{k} + (u^{n+\frac{1}{2}})^2 - (v^{n+\frac{1}{2}})^2 = 0 \tag{1.21}$$

$$\frac{v^{n+\frac{1}{2}} - v^n}{k} + (v^{n+\frac{1}{2}})^2 - (u^{n+\frac{1}{2}})^2 = 0 \tag{1.22}$$

et ensuite u^{n+1}, v^{n+1} par

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{k} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0 \;, \qquad u^{n+1}(a_1,y) = 0 \tag{1.23}$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{n+\frac{1}{2}}}{k} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0 \;, \qquad v^{n+1}(x,b_1) = 0 \;. \tag{1.24}$$

Toutes ces équations se résolvent explicitement et très simplement :

$$u^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n} \tag{1.25}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{v^n + k(\sigma^n)^2}{1 + 2k\sigma^n} \tag{1.26}$$

où

$$\sigma^n = u^n + v^n \;, \tag{1.27}$$

et

$$u^{n+1}(x,y) = \frac{1}{k}\int_{a_1}^{x} u^{n+\frac{1}{2}}(\xi,y)\,\exp\left(\frac{\xi - x}{k}\right) d\xi \;, \tag{1.28}$$

$$v^{n+1}(x,y) = \frac{1}{k}\int_{b_1}^{y} v^{n+\frac{1}{2}}(x,\eta)\,\exp\left(\frac{\eta - y}{k}\right) d\eta \;. \tag{1.29}$$

Résultat de convergence.

On introduit les fonctions étagées u_{ik} , v_{ik} ,

(1.30) $$u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}} , \qquad v_{ik}(t) = v^{n+\frac{i}{2}} ,$$

pour $t \in [nk , (n+1)k[$, $n = 0 ,\dots, N-1$, $i = 1 , 2$.

On a (cf. [9]) le

THÉORÈME 1.2.- Pour $k \to 0$, $u_{ik} \to u$, $v_{ik} \to v$, dans $C([0,T] ; L^2(\Omega))$ fort, $L^\infty([0,T] ; H^1(\Omega))$ et $L^\infty(Q)$ faible-étoile, où $\{u,v\}$ est la solution de (1.12)-(1.15) , (1.19).

2. Problèmes de calcul des variations.

Soient H un espace de Hilbert, V_i , $1 \le i \le q$, des espaces de Banach réflexifs, $V = \bigcap_{i=1}^{q} V_i$, avec

(2.1) $$V \subset V_i \subset H ,$$

les injections étant continues et chaque espace étant dense dans le suivant.

Pour chaque i , soit K_i un ensemble convexe fermé de V_i et soit $K = \bigcap_{i=1}^{q} K_i$.

Soit J_i une fonctionnelle réelle définie sur K_i , strictement convexe, semi-continue inférieurement et vérifiant :

(2.2) $$\lim_{\substack{u \in K_i \\ \|u\|_{V_i} \to \infty}} \{J_i(u)\} = +\infty .$$

Soit alors $J = \sum_{i=1}^{q} J_i$.

Il est bien connu que le problème d'optimisation

$$\inf_{v \in K} J(v) , \tag{2.3}$$

possède une solution unique u .

On peut proposer un algorithme d'approximation de u par décomposition : soient $\tau > 0$ et un entier N fixés ($\frac{1}{\tau}$ et N destinés à tendre vers l'infini). On définit une famille d'éléments $u^{n+\frac{i}{q}}$, $n = 0 ,\dots, N$, $i = 1 ,\dots, q$. On part de

$$u^o \in H \text{ quelconque,} \tag{2.4}$$

puis, lorsque $u^o ,\dots, u^{n+\frac{i-1}{q}}$ sont connus, on définit

$$u^{n+\frac{i}{q}} \in K_i , \tag{2.5}$$

comme la solution (existante et unique) du problème

$$\inf_{v \in K_i} \{ \left| v - u^{n+\frac{i-1}{q}} \right|_H^2 + \tau J_i(v)\} . \tag{2.6}$$

Ayant ainsi définis les $u^{n+\frac{i}{q}}$, on introduit les moyennes (du type Cesaro)

$$w^{N+\frac{i}{q}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{i}{q}} \in K_i . \tag{2.7}$$

On démontre alors le résultat suivant (cf. J.-L. Lions et R. Temam [3]) :

THÉORÈME 2.1.- Sous les hypothèses précédentes, si $\tau \to 0$, $N \to \infty$ avec

$$\tau N \to \infty , \tag{2.8}$$

alors, pour tout i , $1 \leq i \leq q$,

$$w^{N+\frac{i}{q}} \to u , \tag{2.9}$$

solution de (2.3) dans V_i faible.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] T. CARLEMAN - Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz, Publications scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler, Uppsala (1957).

[2] J.-L. LIONS - Equations différentielles opérationnelles, Springer-Verlag, Berlin (1961).

[3] J.-L. LIONS, R. TEMAM - Eclatement et décentralisation en calcul des variations, 3ème Colloque International d'Optimisation, Nice (1969), Springer-Verlag, Lecture Notes.

[4] G. I. MARCHUK - Méthodes numériques en météorologie, Armand Colin (1970).

[5] G. J. MINTY - Monotone non linear operators in Hilbert spaces, Duke Math. J., 29 (1962), p. 341-346.

[6] N. N. SAMARSKI - Additivity principle for the construction of efficient difference schemes, Soviet Math. Dokl., 165 (1965), p. 1601-1605.

[7] R. TEMAM - Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires, Annali di Mat. Pur. ad Applic., LXXIV (1968), p. 191-380.

[8] R. TEMAM - Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires (I), (II), Arch. for Rat. Mech. and Anal., 32 (1969), p. 135-153 et 33 (1969), p. 377-385.

[9] R. TEMAM - Sur la résolution exacte et approchée d'un problème hyperbolique non linéaire de T. Carleman, Arch. for Rat. Mech. and Anal., 35 (1969), p. 351-362.

[10] R. TEMAM - Etude directe de l'équation de Riccati associée à des opérateurs non bornés, Journ. of Funct. Analysis, à paraître.

[11] N. N. YANENKO - Méthodes à pas fractionnaires, Armand Colin, (1969).