NICOLE MOULIS

Variétés de dimension infinie

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 378, p. 253-267
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__253_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 378 Mai-Juin 1970

VARIÉTÉS DE DIMENSION INFINIE

par Nicole MOULIS

§ 1. Introduction. Position des problèmes.

Dans tout cet exposé, E désignera un espace de Banach de dimension infinie, de type dénombrable, M une variété topologique modelée sur E, paracompacte de type dénombrable.

Nous supposerons que E admet une norme de classe C^∞ sur $E - \{0\}$.

Une carte de M sera notée (U_i, φ_i) où U_i est un ouvert de M et φ_i un homéomorphisme de U_i sur un ouvert de E.

Soit Λ un pseudo-groupe contenu dans le pseudo-groupe des homéomorphismes définis sur les ouverts de E.

Une structure de Λ-variété sur M est un atlas maximal sur M tel que, quelles que soient les cartes (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) de cet atlas, l'homéomorphisme $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ défini sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ appartienne à Λ.

Soient M et N deux Λ-variétés ; $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ et $\{(V_j, \psi_j)_{j \in J}\}$ deux atlas maximaux sur M et N respectivement, définissant une Λ-structure sur M et N. Soit f un homéomorphisme de M sur N ; f est un isomorphisme de Λ-variétés si, quels que soient i et j, $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ appartient à Λ.

Nous définissons ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble des Λ-variétés modelées sur E. L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $[\Lambda]$.

<u>Exemples de pseudo-groupes.</u>

1°) Pseudo-groupe $\underline{C}^\infty$ (respectivement $\underline{C}^r$) des difféomorphismes de classe C^∞ (respectivement C^r) définis sur les ouverts de E.

2°) Pseudo-groupe $\underline{F}$ des difféomorphismes f de classe C^∞ définis sur les ouverts de E tels qu'en tout point x de l'ouvert la différentielle $D_x f$ soit

$$D_x f = Id + \alpha_x \qquad \text{où } Id \text{ est l'opérateur identité}$$
$$\alpha_x \text{ est un opérateur compact.}$$

Une $\underline{F}$-variété est appelée variété Fredholm.

3°) Pseudo-groupe $\underline{E}$ des difféomorphismes f, de classe C^∞, définis sur les ouverts de E, vérifiant la propriété suivante :

Soient V l'ouvert de définition de f et x un point de V. Il existe un voisinage U_x de x contenu dans V tel que l'image de U_x par l'application $f - Id$ soit contenue dans un sous-espace de dimension finie.

Une $\underline{E}$-variété est appelée variété étalée "<u>layer</u>". Notons $[\underline{H}]$ l'ensemble quotient de $[\underline{C}^\infty]$ pour la relation d'équivalence : équivalence d'homotopie. Soit p la projecti $[\underline{C}^\infty] \to [\underline{H}]$. Soit $[\underline{O}]$ le sous-ensemble de $[\underline{C}^\infty]$ formé des classes qui contiennent un ouvert de E, i l'inclusion naturelle de $[\underline{O}]$ dans $[\underline{C}^\infty]$.

Considérons le diagramme suivant (t_1 et t_2 sont les applications canoniques d'affaiblissement de structure) :

$$\begin{tikzcd}
{[\underline{E}]} \arrow[r, "t_1"] & {[\underline{F}]} \arrow[r, "t_2"] & {[\underline{C}^\infty]} \arrow[r, "p"] & {[\underline{H}]} \\
 & & {[\underline{O}]} \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

Problèmes.

Le premier problème étudié a été celui de l'injectivité de p dans le cas où E est un espace de Hilbert. Une solution partielle en est donnée par N. H. Kuiper et D. Burghelea dans [5]. Jointe au résultat de [8], elle prouve que $p \circ i$ est injective. Pour obtenir une solution complète de ce problème, dans le cas où E est un espace de Hilbert, il faut d'abord démontrer que t_2 est surjective, puis en travaillant sur des variétés munies d'une structure Fredholm [3] et [4], démontrer que l'image de i contient l'image de t_2 [2].

Les résultats sont les suivants (E espace de Hilbert) :

1°) p est bijective ;

2°) i est bijective ;

3°) t_1 est bijective ;

4°) t_2 est surjective.

(On ignore si t_2 est injective.)

Dans le cas où E n'est pas un espace de Hilbert, on obtient des résultats partiels.

§ 2. Etude des variétés hilbertiennes par la méthode des décompositions en anses [5].

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que E est un espace de Hilbert.

DÉFINITION.- Soit M une variété de classe C^∞ modelée sur E , munie d'une métrique riemannienne complète ; une m-fonction f sur M est une fonction de Morse avec minimum absolu vérifiant la condition suivante (condition C de Palais-Smale) :

De toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points de M telle que la suite $\{f(x_n)\}$ soit bornée et telle que $\lim\limits_{n\to\infty}$ gradient $f(x_n) = 0$, on peut extraire une suite $\{x_{n_p}\}$ qui converge vers un point critique.

D'après [10] si M admet une m-fonction, M admet une décomposition en anses.

THÉORÈME 1.- Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) M admet pour une métrique riemannienne complète une m-fonction.

(ii) M est difféomorphe à $M \times E$ (on dit que M est Palais-stable).

(iii) M est difféomorphe à un ouvert de E.

THÉORÈME 2.- Si deux variétés M et N satisfont à une des propriétés ci-dessus et sont homotopes, elles sont difféomorphes.

Principe des démonstrations.

(i) $\Rightarrow$ (ii). La démonstration utilise le théorème suivant, dû à Bessaga [1] et [5].

THÉORÈME 3.- Soient p un point de E, V un voisinage de p dans E ; V est difféomorphe à $V - \{p\}$ par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de V.

COROLLAIRE.- Soient M une variété modelée sur E, N une sous-variété de M, de codimension infinie, T un voisinage tubulaire de N dans M ; M est difféomorphe à $M - N$, par un difféomorphisme qui est l'identité en dehors de T.

Dans toute la suite, nous supposerons M munie d'une métrique riemannienne complète et d'une m-fonction f telle que deux points critiques distincts aient des valeurs distinctes. Nous noterons :

$$f_a = \{x \,;\, x \in M,\ f(x) \leq a\}, \quad \partial f_a \text{ le bord de } f_a .$$

Si M et N sont deux variétés difféomorphes, nous écrirons $M \simeq N$.

Tous les angles introduits au cours des démonstrations sont supposés lissés.

LEMME 1.- Supposons que $f^{-1}[a,b]$ contienne un seul point critique p ($f(p) = c$, $a < c < b$) d'indice et coïndice infinis. Le h-cobordisme $(f^{-1}[a,b], \partial f_a, \partial f_b)$ est trivial ; il existe une m-fonction g sur M , qui coïncide avec f en dehors de $f^{-1}[a,b]$, sans point critique sur $g^{-1}[a,b]$.

Démonstration.

Soient D la boule unité de E , S le bord de D . Soit α l'application d'attachement de l'anse associée au point critique p ; α est une application de $S \times D$, dans le bord de f_a , ∂f_a .

$$f_b \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} D \times D .$$

D'après le corollaire 1

$$f_a \underset{\alpha}{\cup} (D \times D) \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} ((D - \{0\}) \times D) .$$

Par un difféomorphisme élémentaire

$$f_a \underset{\alpha}{\cup} ((D - \{0\}) \times D) \simeq f_a - \alpha(S \times \{0\}) .$$

Or $\alpha(S \times 0)$ est une sous-variété de codimension infinie de ∂f_a : $f_a - \alpha(S \times 0) \simeq f_a$.

Sur la figure 1, nous avons représenté la suite de difféomorphismes, en utilisant un modèle pour l'anse. Dans ce modèle, elle est représentée par l'ensemble des points (x_1, x_2) $(x_1 \in D , x_2 \in D)$.

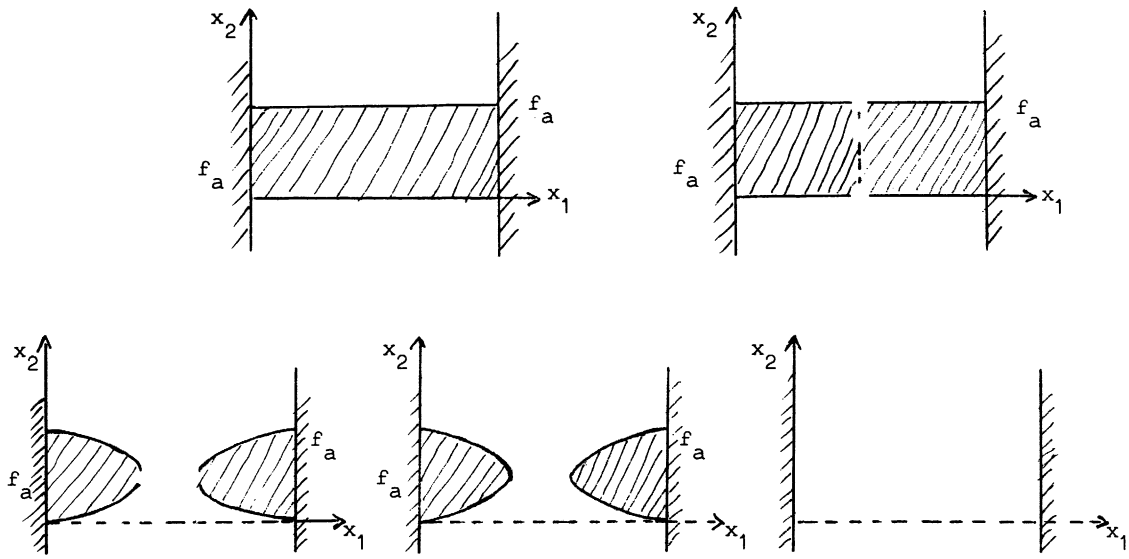

Figure 1

LEMME 2.- Soit M une variété modelée sur E, munie d'une métrique riemannienne complète ds^2 et d'une m-fonction f. Il existe sur M une métrique riemannienne complète ds_o^2 et une m-fonction f_o (pour ds_o^2) telle que tous les points critiques de f_o aient un indice fini.

Principe de la démonstration.

D'après le lemme 1, nous pouvons supposer que f n'admet pas de point critique d'indice et coïndice infinis. Supposons, par récurrence, démontré que, pour une métrique riemannienne complète ds_i^2, il existe sur M une m-fonction f_i dont tous les points critiques ont un coïndice $\geq n$.

Soit p un point critique de coïndice n, tel que $f(p)$ soit minimal.

q étant un point critique quelconque, soit

$W_+(q)$ la variété stable de q (ou nappe ascendante)

$W_-(q)$ la variété instable de q (ou nappe descendante).

Par un lemme de transversalité, nous pouvons supposer que, quel que soit q point critique distinct de p :

$$W_+(p) \cap W_-(q) = \emptyset .$$

Soit T un voisinage tubulaire de $W_+(p)$ ne contenant aucun autre point critique. D'après le théorème de Bessaga :

$$T \simeq T - W_+(p) .$$

Il existe sur $T - W_+(p)$ une métrique riemannienne complète ds^2_{i+1} qui coïncide avec ds^2_i sur un voisinage du bord de T et une m-fonction f_{i+1} (pour ds^2_{i+1}) qui coïncide avec f_i sur un voisinage du bord de T .

LEMME 3.- Soit f une m-fonction sur M , telle que $f^{-1}[a,b]$ contienne un seul point critique p $(f(p) = c \ , \ a < c < b)$. Supposons p d'indice fini n et de coïndice infini. Si il existe une variété M_a et un difféomorphisme φ_a de f_a sur $M_a \times E$, il existe une variété M_b , un difféomorphisme φ_b de f_b sur $M_b \times E$ et une injection j de M_a dans M_b tels que le diagramme suivant soit commutatif (j_1 est l'injection de f_a dans f_b) :

$$\begin{tikzcd} f_a \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "j_1"'] & M_a \times E \arrow[d, "j \times id"] \\ f_b \arrow[r, "\varphi_b"] & M_b \times E . \end{tikzcd}$$

Principe de la démonstration.

Soient D^n la boule unité de R^n , S^{n-1} le bord de D^n , D la boule unité de E .

Soit α l'application d'attachement de l'anse associée au point critique p .

$$\alpha : S^n \times D \to \partial f_a$$

$$f_b \simeq f_a \underset{\alpha}{\cup} D^n \times D .$$

Or $$\partial f_a \simeq \partial(M_a \times E) \simeq \partial M_a \times E .$$

Soit α_o la restriction de α à $S^n \times \{0\}$. Après avoir appliqué à l'espace $M_a \times E$ une suite d'isotopies, nous pouvons supposer :

$$(\alpha , \alpha_o) : (S^{n-1} \times D , S^{n-1} \times \{0\}) \to (\partial M_a \times E , \partial M_a \times 0) .$$

Soit W un voisinage tubulaire à bord de $\alpha_o(S^{n-1})$ dans $M_a \times \{0\}$. Utilisons un modèle pour $W \times E \underset{\alpha}{\cup} D^n \times D$. Un point de ce modèle est déterminé par trois coordonnées (x_1,x_2,x_3) , $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in D$, $x_3 \in D$

$$\alpha_o(S^{n-1} \times \{0\}) = \{(x_1,x_2,x_3) \; ; \; |x_1| = 1 \; , \; x_2 = 0 \; , \; x_3 = 0\}$$

$$W = \{(x_1,x_2,x_3) \; ; \; |x_1| \geq 1 \; , \; x_3 = 0\}$$

$$\alpha(S^{n-1} \times D) = \{(x_1,x_2,x_3) \; ; \; |x_1| = 1 \; , \; |x_2| \leq 1 \; , \; |x_3| \leq 1\} .$$

L'anse est l'ensemble des points (x_1,x_2,x_3) tels que $|x_1| < 1$, $|x_2| < 1$, $|x_3| < 1$.

Soit N la sous-variété du bord de $W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)$ ensemble des points dont la deuxième coordonnée est nulle : $(x_2 = 0)$. N est de codimension infinie

$$W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D) \simeq (W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)) - N .$$

Comme le montre la figure 2, il existe une suite de difféomorphismes élémentaires, permettant de trouver une application β d'attachement d'anse :

$$\beta : S^{n-1} \times D \to \partial M_a$$

et un difféomorphisme de f_b sur $(M_a \underset{\beta}{\cup} (D^n \times D)) \times E$. Posons $M_b = M_a \underset{\beta}{\cup} D^n \times D$.

M_b est la variété cherchée.

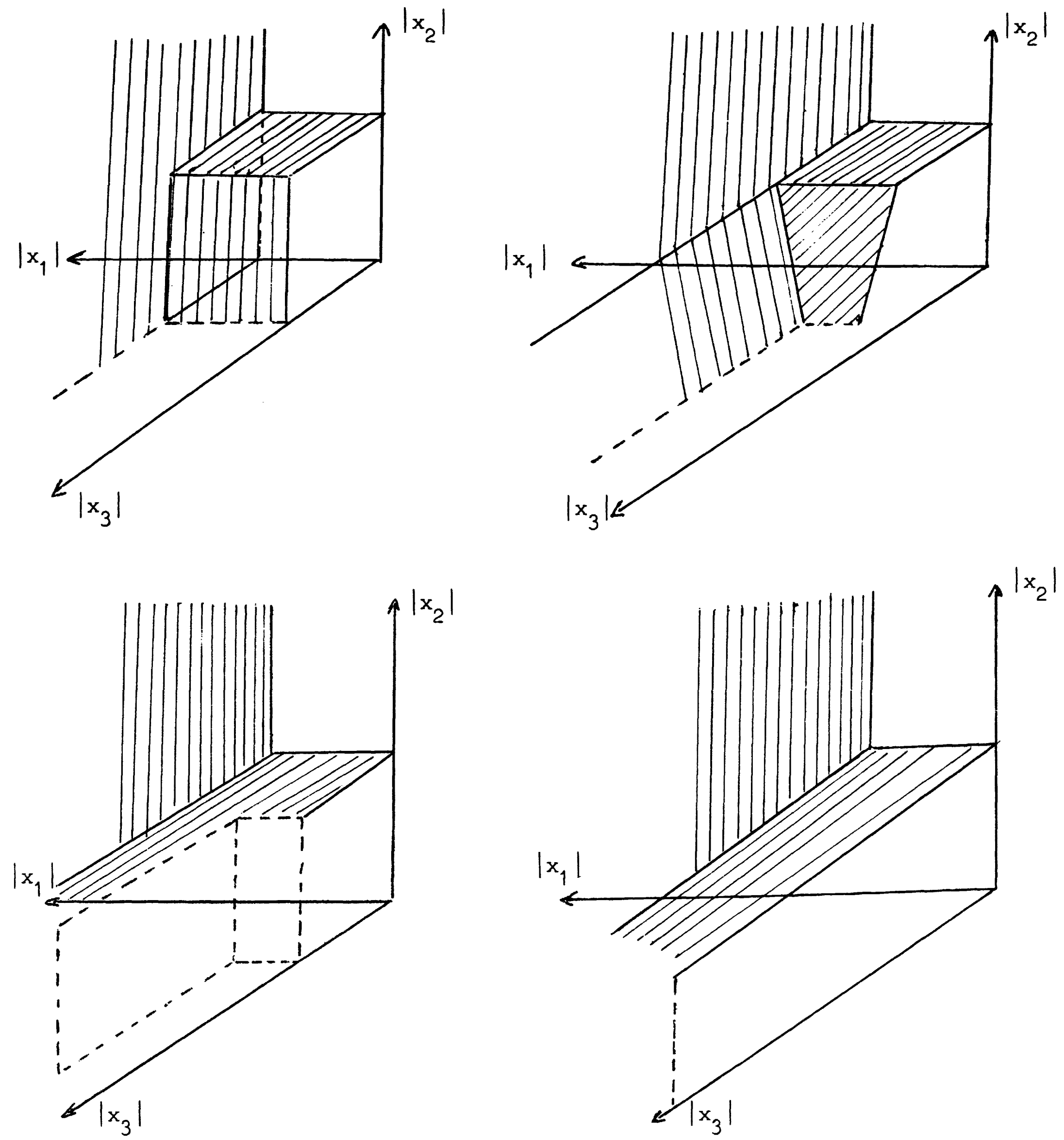

Figure 2

La partie hachurée représente le bord de $W \underset{\alpha}{\cup} (D^n \times D)$.

Fin de la démonstration du (i) $\Rightarrow$ (ii).

D'après les lemmes 1 et 2, on peut supposer que f, m-fonction sur M n'admet que des points critiques d'indice fini et de coïndice infini. La limite des variétés M_a quand a croît est une variété M' telle que $M \simeq M' \times E$. Donc M est Palais-stable.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La démonstration est immédiate en considérant un voisinage tubulaire d'un plongement de M dans E de codimension infinie [6].

(iii) $\Rightarrow$ (i). On construit explicitement sur un ouvert de E, grâce à une partition de l'unité, une métrique riemannienne complète et une m-fonction [8].

La démonstration du théorème 2 est analogue à celle d'un théorème de B. Mazur concernant deux variétés de dimension finie dont les fibrés tangents sont stablement équivalents [7].

§ 3. Variétés munies d'une structure Fredholm.

1. Fibrés Fredholm.

E étant un espace de Banach, nous désignerons par $GL(E)$ le groupe linéaire de E, $GL_c(E)$ le sous-groupe des opérateurs de la forme $Id + \alpha$ où α est un opérateur compact ; $\Phi_n(E)$ le sous-ensemble de $L(E)$ des opérateurs Fredholm d'indice n.

DÉFINITION 1.- Un fibré vectoriel $\underline{G}$ de fibre E admet une structure Fredholm, si son groupe structural admet une réduction à $GL_c(E)$.

DÉFINITION 2.- Soient $\underline{G}$ et $\underline{G}'$ deux fibrés vectoriels. Une application fibrée f de $\underline{G}$ dans $\underline{G}'$ est une Φ_o-application fibrée si sa restriction à chaque fibre est un élément de $\Phi_o(E)$.

PROPOSITION 1.- Soit $\underline{G}$ un fibré vectoriel ayant pour base une variété M et pour fibre E.

(i) Une Φ_o-application fibrée f de $\underline{G}$ dans le fibré trivial $M \times E$ induit sur $\underline{G}$ une structure Fredholm unique Σ_f, pour laquelle f est un morphisme de fibrés Fredholm.

(ii) Si Σ est une structure Fredholm sur $\underline{G}$, il existe une Φ_o-application $f : \underline{G} \to M \times E$ telle que $\Sigma_f = \Sigma$.

(iii) Soient f_o et f_1 deux Φ_o-applications fibrées de $\underline{G}$ dans $M \times E$; les structures Fredholm Σ_{f_o} et Σ_{f_1} sur $\underline{G}$ sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme h de $\underline{G}$ sur lui-même tel que la restriction à chaque fibre de $(f_o \circ h - f_1)$ soit un opérateur compact.

Démonstration de (i).

Soient x un point de M, f_x la restriction de f à la fibre de x.

Il existe un opérateur inversible φ_x et un opérateur compact α_x tels que $f_x = \varphi_x + \alpha_x$. Soit V un voisinage d'un point x_o de M, tel que la restriction à V, $\underline{G}_V$, du fibré $\underline{G}$ soit triviale. Si y est un point de V, v un vecteur de E, posons : $\Gamma_V(y,v) = (y, (f_y - \alpha_{x_o}).v)$. Si V est assez petit, $f_y - \alpha_{x_o}$ est un opérateur inversible.

Considérons un recouvrement de M par les ouverts $V(x)$ (x point de M), les applications Γ_V associées définissent sur $\underline{G}$ une structure Fredholm.

Démonstration de (ii).

On recolle, grâce à une partition de l'unité, les applications de M dans E déduites des trivialisations locales du fibré Fredholm.

2. Variétés Fredholm.

Soit TM le fibré tangent à une variété M de classe C^{∞} modelée sur E .

DÉFINITION 3.- Soient M et N deux variétés de classe C^{∞} , f une application de M dans N de classe C^{∞} ; f est une Φ_o-application si l'application tangente $Tf : TM \to TN$ est une Φ_o-application fibrée.

PROPOSITION 2.- Soit M une variété de classe C^{∞} modelée sur E .

(i) Une Φ_o-application f de classe C^{∞} de M dans E induit sur M une structure Fredholm unique Σ_f pour laquelle Tf est un morphisme de fibrés Fredholm.

(ii) Si Σ est une structure Fredholm sur M , il existe une Φ_o-application f de M dans E , de classe C^{∞} , telle que $\Sigma = \Sigma_f$.

Le principe de la démonstration est le même que celui de la démonstration de la proposition 1.

THÉORÈME 1.- La condition nécessaire et suffisante pour que M admette une structure Fredholm est que le fibré TM soit équivalent à un $GL_c(E)$ fibré. [3], [4].

La condition nécessaire est triviale. Pour démontrer la réciproque, on construit une Φ_o-application $f : M \to E$. D'après la proposition 1, il existe une Φ_o-application fibrée $\eta : TM \to M \times E$. Nous déduisons de η une application η_1 de M dans $\Phi_o(E)$. L'application f est construite de proche en proche sur les ouverts d'un recouvrement localement fini de M de sorte que l'application différentielle Df soit homotope à η_1 par une homotopie dont l'image est dans $\Phi_o(E)$.

COROLLAIRE 1.- Si GL(E) est contractile, l'application $[\underline{F}] \to [\underline{C}^{\infty}]$ est surjective.

Remarque.- Les mêmes raisonnements peuvent se faire en considérant des structures étalées, ce qui montre que l'application $t_1 : [\underline{E}] \to [\underline{F}]$ est bijective.

3. Théorème du plongement ouvert [2].

Nous supposerons désormais que E admet une base $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$.

THÉORÈME 2.- Soit M une variété Fredholm modelée sur E telle que le fibré tangent à M , TM , soit un $GL_c(E)$ fibré trivial. Il existe un difféomorphisme φ de M sur un ouvert Ω de E .

Principe de la démontration.

LEMME 1.- Il existe une famille M_n $(n \in \mathbb{N})$ de sous-variétés de M telles que

(i) M_n est compacte ;

(ii) $M_n \subset M_{n+1}$;

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ est dense dans M .

Soit E_n le sous-espace de E engendré par $e_1, \dots, e_n$. Il existe une Φ_o-application f , transversale à tous les E_n , propre et bornée. Cf. [9] et [3].

Posons $M_n = f^{-1}(E_n)$.

LEMME 2.- Il existe une suite de voisinages tubulaires de M_n , Z_n , tels que $Z_n \subset Z_{n+1}$ et tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n = E$.

Considérons sur M une structure étalée compatible avec la structure Fredholm et un atlas dénombrable $\{(U_i , \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}\}$ pour cette structure, tel que les (U_i) forment un recouvrement ouvert, finiment étoilé de M .

Soit $n_i = \inf\{n ; M_n \cap U_i \neq \emptyset\}$. Il est possible de choisir le recouvrement de sorte que :

a) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} = Id + \alpha_i$ et Image $\alpha_i \subset E_{n_i}$;

b) $f \circ \varphi_i^{-1} = Id + \beta_i$ et Image $\beta_i \subset E_{n_i}$;

c) $n \geq n_j$ et $z \in E$, $\varphi_j^{-1}(z + E_n) = U_j \cap f^{-1}(z + E_n)$;

d) la restriction de f à $\bar{U}_j$ est propre.

Soit $\{\mu_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement par les ouverts U_i . En considérant les propagateurs ("spray") triviaux dans chaque carte (U_i , φ_i) et en les recollant, grâce aux fonctions μ_i , on obtient un propagateur sur M pour lequel chaque M_n est une sous-variété totalement géodésique. Dans chaque carte (U_i , φ_i) , l'application exponentielle associée à ce propagateur est de la forme :

$$\exp(x,v) = (x , x + v + \gamma_i(x,v)) \qquad \text{où Image } \gamma_i \subset E_{n_i} .$$

Cette application exponentielle permet de construire des voisinages tubulaires de chaque variété M_n . Grâce à la forme explicite de l'application, on montre qu'il existe une fonction r , continue de M dans l'ensemble des réels strictement positifs, telle que chaque M_n admette un voisinage tubulaire X_n de rayon r/M_n . On vérifie que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = M$. Posons $Z_n = \cap \{X_m ; m \geq n\}$.

Les Z_n sont les voisinages cherchés.

Fin de la démonstration du théorème 2.

On construit, par induction, une suite de plongements ouverts φ_n de Z_n dans E, tels que φ_{n+1} coïncide avec φ_n sur Z_n . φ_{n+1} est obtenu à partir de φ_n , en étendant d'abord le plongement à M_{n+1} , puis à Z_{n+1} en utilisant une trivialisation de TM et des théorèmes d'isotopie de voisinages tubulaires.

Remarque.- Très récemment K. D. Elworthy a démontré, en utilisant le même type de méthodes, le théorème de stabilité pour les variétés M modelées sur E $(M \simeq M \times E)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cz. BESSAGA - Every infinite dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unit sphere, Bull. Acad. Pol. Sci. XIV-1 (1966), p. 27-31.

[2] J. EELLS and K.D. ELWORTHY - Open embeddings of certain Banach manifolds, Ann. of Math., 91 (1970), p. 465-485.

[3] K. D. ELWORTHY - Fredholm maps and $GL_c(E)$ structures, Thesis, Annoncement Bull. A. M. S., 74 (1968), p. 582-586.

[4] K. D. ELWORTHY - Structure Fredholm sur les variétés Banachiques, Proceedings du Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal, Juillet 1969, à paraître.

[5] N. H. KUIPER and D. BURGHELEA - Hilbert manifolds, Ann. of Math., 90 (1969), p. 379-417.

[6] N. H. KUIPER and B. TERPSTRA - Differentiable closed embeddings of Banach manifolds, Conference in honor of G. de Rham, Springer-Verlag (1970), p. 118-125.

[7] B. MAZUR - Stable equivalence of differentiable manifolds, Bull. A. M. S., 67 (1961), p. 377-384.

[8] N. MOULIS - Sur les variétés hilbertiennes et les fonctions non dégénérées, Indagationes Mathematicae, 30 (1968), p. 497-511.

[9] K. K. MUKHERJEA - Fredholm structures and cohomology, Thesis, Cornell University, 1968.

[10] R. PALAIS - Morse theory on Hilbert manifolds, Topology 2 (1963), p. 299-340.