JACQUES TITS

Groupes finis simples sporadiques

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 375, p. 187-211

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__187_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 375 Février 1970

GROUPES FINIS SIMPLES SPORADIQUES

par Jacques TITS

La plupart des groupes finis simples connus se classent naturellement en "séries infinies" : il s'agit, outre les groupes d'ordre premier et les groupes alternés, de tous ceux qui se déduisent de façon standard des groupes algébriques connexes simples sur les corps finis (groupes de Chevalley, de Steinberg, de Suzuki, de Ree ; cf. par exemple [44] (*) ou [5]). A ce jour (14/1/70), on connaît, selon les informations dont dispose le conférencier, 18 ou peut-être 19 groupes (pour le 19-ième, voir le n° 5.1) qui n'appartiennent pas à ces séries et que, faute d'une théorie satisfaisante, on a baptisé "groupes sporadiques". Ce sont les groupes de Mathieu (M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}) (voir les n° 1.2, 1.3, 2.2, 3.2, 4.5, 5.2), de Janko (Ja) (4.2), de Hall-Janko (HaJ) (2.4, 3.2, 4.3, 5.2), de Higman-Janko-McKay (HJM) (4.3, 5.2), de Higman-Sims (HiS) (1.4, 2.2, 3.2, 4.5, 5.2), de McLaughlin (2.3, 3.2), de Suzuki (2.4, 3.2), de Held-Higman-McKay (HHM) (4.4), de Conway (Co_1, Co_2, Co_3) (1.4, 3.2, 3.4), de Fischer (Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}) (2.5) et de Lyons (Ly?) (5.1). En voici les ordres

---

(*) Les listes d'exceptions et d'isomorphismes exceptionnels du tableau 3 de [44] doivent être complétées comme suit :

pour $G = {}^2F_4(*, 2)$, on a $[G : G'] = 2$;

$B_n(2^r) = C_n(2^r)$.

$$
\begin{array}{lll}
|M_{11}| = 2^4.3^2.5.11 & & = 7\,920 \\
|M_{12}| = 2^6.3^3.5.11 & & = 95\,040 \\
|M_{22}| = 2^7.3^2.5.7.11 & & = 443\,520 \\
|M_{23}| = 2^7.3^2.5.7.11.23 & & = 10\,200\,960 \\
|M_{24}| = 2^{10}.3^3.5.7.11.23 & & = 244\,823\,040 \\
|Ja| = 2^3.3.5.7.11.19 = 19.20.21.22 & = 55.56.57 & = 175\,560 \\
|HaJ| = 2^7.3^3.5^2.7 & & = 604\,800 \\
|HJM| = 2^7.3^5.5.17.19 & & = 50\,232\,960 \\
|HiS| = 2^9.3^2.5^3.7.11 & & = 44\,352\,000 \\
|McL| = 2^7.3^6.5^3.7.11 & & = 898\,128\,000 \\
|Suz| = 2^{13}.3^7.5^2.7.11.13 & & = 448\,345\,497\,600 \\
|HHM| = 2^{10}.3^3.5^2.7^3.17 & & = 4\,030\,387\,200 \\
|Co_1| = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.11.13.23 & & = 4\,157\,776\,806\,543\,360\,000 \\
|Co_2| = 2^{18}.3^6.5^3.7.11.23 & & = 42\,305\,421\,312\,000 \\
|Co_3| = 2^{10}.3^7.5^3.7.11.23 & & = 495\,766\,656\,000 \\
|Fi_{22}| = 2^{17}.3^9.5^2.7.11.13 & & = 64\,561\,751\,654\,400 \\
|Fi_{23}| = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.11.13.17.23 & & = 4\,089\,460\,473\,293\,004\,800 \\
|Fi'_{24}| = 2^{21}.3^{16}.5^2.7^3.11.13.17.23.29 & & = 1\,255\,205\,709\,190\,661\,721\,292\,800 \\
|Ly?| = 2^8.3^7.5^6.7.11.31.37.67 & & = 51\,765\,179\,004\,000\,000
\end{array}
$$

Il est facile de voir, par exemple par la méthode d'Artin [1], que ces nombres ne sont les ordres d'aucun groupe appartenant aux séries infinies susmentionnées.

Par la force des choses, le présent exposé sera essentiellement descriptif. La plupart des informations inédites qu'il renferme sont dues à l'obligeance de B. Fischer, J. McLaughlin, M. Suzuki et J. Thompson, que je tiens à remercier ici.

Notations et terminologie.

$|X|$ = Card X ; G' = groupe dérivé de G ; $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/(m\mathbb{Z})$;

$\mathrm{Stab}_G\, X$ (resp. $\mathrm{Fix}_G\, X$) = stabilisateur (resp. fixateur) de X dans G ;

Z(G) = centre de G ; Involution = élément d'ordre 2 ;

$O_p(G)$ = plus grand p-sous-groupe distingué de G ;

Som Γ (resp. Ar Γ) = ensemble des sommets (resp. des arêtes) du graphe Γ ;

$F \rtimes H = H \ltimes F$ = produit semi-direct (F distingué) ;

$\mathfrak{S}_n$ (resp. $\mathfrak{A}_n$) = groupe symétrique (resp. alterné).

1. Groupes multiplement transitifs.

1.1. Extensions transitives.

1.1.1. Soit G un groupe de permutations d'un ensemble X . Une extension transitive de G est un groupe transitif $\bar{G}$ de permutations d'un ensemble $\bar{X} = X \cup \{\omega\}$ ($\omega \notin X$) tel que $\mathrm{Stab}_{\bar{G}}\, \omega = G$ (étendu à $\bar{X}$ par $G\omega = \omega$). Si G est n fois transitif (i.e. transitif sur les n-uples ordonnés), $\bar{G}$ l'est n + 1 fois.

1.1.2. PROPOSITION.- Avec les notations de 1.1.1, on a de trois choses l'une :

(i) Il existe une partition non triviale de $\bar{X}$, stable par G et formée de parties équipotentes. (En particulier, si X est fini, il existe des orbites Y_i de G dans X telles que $\bigcup Y_i \neq X$ et que $|X| + 1$ soit divisible par $\Sigma\, |Y_i| + 1$.)

(ii) $\bar{X}$ possède une structure de groupe d'élément neutre ω telle que $G \subset \mathrm{Aut}\, \bar{X}$ et que $\bar{G} = \bar{X} \rtimes G$.

(iii) *Tout sous-groupe distingué non trivial* $\bar{H}$ *de* $\bar{G}$ *est extension transitive d'un sous-groupe distingué non trivial* H *de* G . *En particulier,* $\bar{G}/\bar{H} \cong G/H$.

En effet, soit $\{1\} \neq \bar{H} \lhd \bar{G}$. Si $\bar{H}$ n'est pas transitif, ses orbites dans $\bar{X}$ fournissent la partition de (i). Sinon il est extension transitive de $H = \bar{H} \cap G$. Si $H = \{1\}$, $\bar{H}$ est simplement transitif et (ii) en résulte.

1.1.3. COROLLAIRE.- *Supposons* X *fini et* G *simple et transitif. Alors* $\bar{G}$ *est simple ou bien* $\bar{X}$ *a une structure d'espace vectoriel sur un corps premier invariante par* G .

1.2. Les groupes de Mathieu comme extensions transitives.

1.2.1. Soient σ l'automorphisme non trivial de $\underline{\underline{F}}_9$, M_{10} le groupe de permutations de la droite projective $\underline{\underline{F}}_9 \cup \{\infty\}$ défini comme suit

$$M_{10} = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid ad - bc = 1\} \cup \{x \mapsto \frac{ax^{\sigma}+b}{cx^{\sigma}+d} \mid ad - bc = \sqrt{-1}\}$$

et M_{21} le groupe $PSL_3(\underline{\underline{F}}_4)$ considéré comme groupe de permutations du plan projectif sur $\underline{\underline{F}}_4$. Les groupes de Mathieu sont caractérisés inductivement par la

PROPOSITION [50 , 53].- *Pour* $i = 11, 12, 22, 23, 24,$ M_i *est un groupe de permutations de* i *points, et est l'unique extension transitive de* M_{i-1} . *Les groupes* M_{12} *et* M_{24} *n'ont pas d'extension transitive.*

La simplicité de M_{11} se démontre aisément à l'aide de la proposition 1.1.2 ; celle des autres M_i résulte de 1.1.3.

1.2.2. Soient K un corps, commutatif ou non, et G un groupe de permutations de l'espace projectif à n (≥ 1) dimensions sur K , contenant $PSL_{n+1}(K)$ et contenu dans $P\Gamma L_{n+1}(K)$ (extension de $\mathrm{Aut}\, K/\mathrm{Int}\, K$ par $PGL_{n+1}(K)$). Alors

PROPOSITION.- Le groupe G ne possède une extension transitive que dans les cas suivants : $K = \mathbb{F}_2$; $n = 1$ et $K = \mathbb{F}_3$ ou $\mathbb{F}_4$; $G = M_{10}$, M_{21} ou $M_{21} \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Pour $n \geq 2$ et K fini, ceci est dû à H. Zassenhaus [53]. Pour d'autres cas particuliers, cf. [30 , 45]. Le résultat général (obtenu par le rapporteur) est inédit.

1.2.3. Un groupe de permutations est dit fortement n fois transitif s'il est n fois transitif et si le fixateur de n points est réduit à l'identité. Si $n \geq 4$, les seuls groupes possédant cette propriété sont $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_{n+1}$, $\mathfrak{A}_{n+2}$ et, pour $n = 4$ (resp. 5) le groupe M_{11} (resp. M_{12}) [23 , 43 , 11]. Pour des caractérisations de même nature des autres M_i, cf. [43 , 45].

1.3. Groupes de Mathieu et systèmes de Steiner.

1.3.1. Soient $d, e \in \mathbb{N}$. Un ensemble X dont certaines parties sont distinguées et appelées blocs est dit un système de Steiner d'indices d, e, $|X|$ (en abrégé, un $St(d,e,|X|)$) si d points quelconques appartiennent exactement à un bloc et si tout bloc possède e points. En distinguant un point ω d'un $St(d,e,|X|)$, on en déduit de façon évidente un $St(d-1, e-1, |X|-1)$, d'ensemble sous-jacent $X - \{\omega\}$.

1.3.2. PROPOSITION [51].- Il existe un et, à isomorphisme près, un seul système de Steiner d'indices 4, 5, 11 (resp. 5, 6, 12 ; 3, 6, 22 ; 4, 7, 23 ; 5, 8, 24) ; son groupe d'automorphismes est M_{11} (resp. M_{12} ; $\mathrm{Aut}\, M_{22} \cong M_{22} \rtimes \mathbb{Z}_2$; M_{23} ; M_{24}).

Les systèmes de Steiner en question sont susceptibles de descriptions ou de caractérisations variées (cf. notamment [29 , 45]). A titre d'exemples, nous donnons ci-après des constructions, de natures assez différentes, des deux systèmes qui joueront encore un rôle par la suite : $St(3,6,22)$ et $St(5,8,24)$.

1.3.3. Dans le plan projectif P sur $\mathbb{F}_4$, appelons conique complète tout ensemble obtenu en adjoignant à une conique le point de rencontre de ses tangentes. Le groupe $PSL_3(\mathbb{F}_4)$ a trois orbites dans l'ensemble des coniques complètes. Le $St(3,6,22)$ s'obtient en posant $X = P \cup \{\omega\}$ et en appelant blocs les coniques complètes appartenant à l'une de ces orbites et les droites de P complétées par ω .

1.3.4. Posons $X = \mathbb{F}_{23} \cup \{\infty\}$. Soit $\underline{B}$ la plus petite partie de $\underline{P}(X)$ (ensemble des parties de X) invariante par $PSL_2(\mathbb{F}_{23})$, close pour l'opération de différence symétrique $((A,B) \longmapsto (A-B) \cup (B-A))$ et contenant $\{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_{23}\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $\underline{B}_n = \{Y \in \underline{B} \mid |Y| = n\}$. Alors $\underline{B} = \underline{B}_0 \cup \underline{B}_8 \cup \underline{B}_{12} \cup \underline{B}_{16} \cup \underline{B}_{24}$ et $(X, \underline{B}_8)$ est le $St(5,8,24)$ [7 , 25 , 47].

1.4. Deux groupes doublement transitifs.

1.4.1. Le groupe $G = PSU_3(\mathbb{F}_{25}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ (produit non direct, "extension de $PSU_3(\mathbb{F}_{25})$ par l'automorphisme du corps de base") possède un sous-groupe $H \cong \underline{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$. Le groupe G , considéré comme groupe de permutations de G/H (ensemble à 175 éléments) possède une extension transitive $\bar{G}$ isomorphe à HiS (G. Higman [16]).

1.4.2. On verra en 2.3 que le groupe $\mathrm{Aut}\, McL \cong McL \rtimes \mathbb{Z}_2$ peut être réalisé comme un groupe de permutations de 275 points. Ce groupe de permutations possède une extension transitive $\bar{G}$ isomorphe à Co_3 (McLaughlin).

1.4.3. Dans les deux cas, la simplicité de $\bar{G}$ peut (si l'on veut) être établie à l'aide de la proposition 1.1.2.

2. Tours de groupes de "rang" 3.

2.1. Généralités.

(D. Higman [14] appelle "rang" d'un groupe transitif le nombre d'orbites du stabilisateur d'un point.)

Les "tours" qu'on va décrire sont des systèmes (G_i, Γ_i, p_i) $(i = 0,1,\dots,m)$ possédant les propriétés suivantes, où $j \in \{1,\dots,m\}$.

(a) Γ_i est un graphe homogène (c'est-à-dire que $\operatorname{Aut}\Gamma_i$ opère transitivement sur $\operatorname{Som}\Gamma_i$). On posera $\operatorname{Som}\Gamma_i = X_i$.

(b) $p_i \in X_i$ et, posant $Y_{j-1} = \{x \in X_j \mid \{p_j, x\} \in \operatorname{Ar}\Gamma_j\}$, on a $X_{j-1} = X_j - Y_{j-1} - \{p_j\}$. Le graphe Γ_{j-1} est le sous-graphe plein de Γ_j ayant X_{j-1} pour ensemble de sommets.

(c) G_i est un sous-groupe distingué de $\operatorname{Aut}\Gamma_i$, toujours d'indice 2 sauf pour la tour de Fischer. On a $\operatorname{Aut} G_i = \operatorname{Aut} G_i' = \operatorname{Aut}\Gamma_i$. Le groupe $\tilde{G}_{j-1} = \operatorname{Stab}_{G_j} p_j$ est transitif sur Y_{j-1} et induit G_{j-1} sur X_{j-1} .

De plus, le groupe G_i est "presque toujours" simple (deux exceptions : G_0 de la tour de Higman-Sims et G_3 de la tour de Fischer) ; on verra ainsi apparaître les groupes M_{22} , HiS , McL , HaJ , Suz , Fi_{22} , Fi_{23} et Fi_{24}' . Le principe de la construction des tours consiste à bâtir chaque étage sur le précédent (!). Pour les tours considérées en 2.2, 2.3 et 2.4, on a $\tilde{G}_{j-1} = G_{j-1}$ pour tout j , de sorte que Y_{j-1} peut être décrit comme un espace homogène de G_{j-1}

et G_j est une extension transitive de G_{j-1} (identifié à $\widetilde{G}_{j-1}$). Par contre, dans le cas de la tour de Fischer, $\widetilde{G}_j$ est une extension centrale de G_j par $\mathbb{Z}_2$, ce qui complique sensiblement la construction inductive de la tour. Pour les trois premières, les indications données ci-après fournissent pratiquement une description explicite des graphes Γ_i . Pour montrer l'existence des groupes sporadiques HiS , McL , HaJ et Suz , il reste essentiellement à établir l'homogénéité des graphes correspondants, ce qui revient chaque fois, vu l'existence de l'étage précédent, à montrer l'existence d'un automorphisme ne fixant pas p_i . Ceci peut être long mais n'est jamais vraiment difficile. Les démonstrations de simplicité peuvent toutes être vues comme des applications immédiates de la proposition 1.1.2 (ceci non plus n'est pas vrai pour la tour de Fischer).

2.2. La tour de Higman-Sims [15].

i	G_i	$\|X_i\|$	$\|Y_i\|$
0	$Sp_4(\mathbb{F}_2) \ltimes \mathbb{Z}_2^4$	60	16
1	M_{22}	77	22
2	HiS	100	

Description de Γ_2 . Les ensembles X_1 et Y_1 sont respectivement l'ensemble des blocs et l'ensemble des points du $St(3,6,22)$ (cf. 1.3.3) ; deux points ne forment jamais une arête de Γ_2 ; un point et un bloc (resp. deux blocs) forment une arête si et seulement si le premier appartient au second (resp. s'ils sont disjoints).

2.3. La tour de McLaughlin [33].

i	G_i	$\|X_i\|$	$\|Y_i\|$
0	$M_{21} = PSL_3(\underline{\underline{F}}_4)$	105	56
1	$PSU_4(\underline{\underline{F}}_9)$	162	112
2	McL	275	

Description de Γ_2 . On pose $G = G_1 = PSU_4(\underline{\underline{F}}_9)$ et $\widetilde{G}_0 \cong PSL_3(\underline{\underline{F}}_4)$ (ce qui caractérise $\widetilde{G}_0 \subset G$ à conjugaison près) ; Y_1 est l'ensemble des droites de la "quadrique hermitienne fondamentale" (c'est-à-dire des images projectives des espaces totalement isotropes maximaux), $X_1 = G/\widetilde{G}_0$, $p_1 = \{\widetilde{G}_0\}$ et Y_0 est l'unique orbite de cardinal 56 de $\widetilde{G}_0$ dans X_1 . Le groupe $\widetilde{G}_0$ a deux orbites de cardinal 56 dans Y_1 ; soit Z l'une d'elles. Les arêtes de Γ_2 sont les paires de droites (éléments de Y_1) distinctes mais non disjointes, les paires $\{p_2 , y\}$ $(y \in Y_1)$ et les paires $\{gp_1 , gx\}$ pour $g \in G$ et $x \in Y_0 \cup Z$.
A isomorphisme près, le graphe ainsi défini ne dépend pas du choix de Z .

2.4. La tour de Suzuki [39].

i	G_i	X_i	Y_i
0	$PSL_3(\underline{\underline{F}}_2) \cong PSL_2(\underline{\underline{F}}_7)$	14	21
1	$PSU_3(\underline{\underline{F}}_9) \cong G_2(\underline{\underline{F}}_2)'$	36	63
2	HaJ	100	315
3	$G_2(\underline{\underline{F}}_4)$	416	1365
4	Suz	1782	

<u>Description de</u> Γ_2 . L'ensemble X_0 est la réunion d'un plan projectif sur $\underline{\underline{F}}_2$ et de son dual. Les arêtes de Γ_0 sont les drapeaux.

<u>Description inductive de</u> Γ_j . L'ensemble Y_{j-1} est l'ensemble des centres (d'ordre 2 pour $j \leq 3$ et d'ordre 4 pour $j = 4$) des 2-sous-groupes de Sylow de G_{j-1} . Soient C , $C' \in Y_{j-1}$, $C \neq C'$, et $x \in X_{j-1}$. Alors $\{x , C\} \in \mathrm{Ar}\,\Gamma_j \Leftrightarrow \mathrm{Stab}_C\, x = \{1\}$, et $\{C , C'\} \in \mathrm{Ar}\,\Gamma_j$ si et seulement si une des deux conditions suivantes est remplie : C et C' commutent (en tant que sous-groupes de G_{j-1}), ou bien aucun élément de Y_{j-1} ne commute simultanément avec C et C' .

2.5. <u>La tour de Fischer</u> [9].

i	G_i	X_i	Y_i	$\mathrm{Aut}\,\Gamma_i/G_i$
0	$Fi_{21} = PSU_6(\underline{\underline{F}}_4)$	693	2 816	$\underline{S}_3$
1	Fi_{22}	3 510	28 160	$\underline{\underline{Z}}_2$
2	Fi_{23}	31 671	275 264	1
3	Fi_{24}	306 936		1

Le groupe simple Fi'_{24} est un sous-groupe d'indice 2 de Fi_{24} .

B. Fischer est conduit à ces groupes par l'étude des systèmes (G,D) où G est un groupe et D une "<u>classe de</u> 3-<u>transpositions</u>", c'est-à-dire une classe de conjugaison d'involutions engendrant G et telle que le produit de deux éléments distincts de D soit toujours d'ordre 2 ou 3 (exemple : $G = \underline{S}_n$ et D est l'ensemble des transpositions). A un tel système est naturellement associé un graphe $\Gamma = \Gamma(D)$ défini par $\mathrm{Som}\,\Gamma = D$, $\mathrm{Ar}\,\Gamma = \{\{a,b\} \mid a , b \in D , \ ab \neq ba\}$.

(N.B. - Fischer considère le graphe complémentaire de celui-là.) Le groupe G opère sur Γ par conjugaison. Moyennant l'hypothèse que $\underline{\underline{O}}_2(G) = \underline{\underline{O}}_3(G) = Z(G) = \{1\}$, Fischer détermine toutes les paires (G,D) en question. Les groupes G obtenus sont, outre quelques groupes "classiques" ($\underline{S}_n$, $Sp_{2n}(\underline{\underline{F}}_2)$, $PSU_n(\underline{\underline{F}}_4)$ et certains groupes "de type orthogonal" - i.e. intermédiaires entre un groupe simple de type B ou D et son groupe d'automorphismes - sur $\underline{\underline{F}}_2$ et $\underline{\underline{F}}_3$), les trois groupes Fi_k $(k = 22, 23, 24)$. En outre, à une exception près, due à des isomorphismes accidentels, un tel groupe G possède toujours une seule classe de 3-transpositions.

Les rapports entre le groupe G_i et le graphe Γ_i de la tour considérée sont les suivants : $\Gamma_i = \Gamma(D_i)$, où D_i est l'unique classe de 3-transpositions de G_i ; réciproquement, G_i est engendré par $D_i = \{d_s \mid s \in \mathrm{Som}\,\Gamma_i\}$, où l'involution d_s est caractérisée comme suit. Pour $x \in \mathrm{Som}\,\Gamma_i$, posons

$A_x = \{y \in \mathrm{Som}\,\Gamma_i \mid \{x,y\} \notin \mathrm{Ar}\,\Gamma_i\}$; alors

si $x \in A_s$, on a $d_s(x) = x$;

sinon, $d_s(x)$ est l'unique sommet y de Γ_i tel que

$$A_s \cap A_x = A_x \cap A_y = A_y \cap A_s .$$

Les groupes Fi_k et M_k ont entre eux le lien suivant (d'où la notation) : si L désigne une partie commutative maximale de D_{k-21}, on a $|L| = k$, et le groupe de permutations de L induit par $\mathrm{Stab}_{Fi_k} L$ est le groupe M_k.

Signalons encore une analogie remarquable : si on pose $Fi_{10} = U_4(\underline{\underline{F}}_9)$, $Fi_{11} = Suz$, $Fi_{12} = Co_1$, le groupe Fi_k possède une classe de conjugaison C_k d'éléments d'ordre 3 telle que le cardinal d'une partie commutative maximale de C_k soit k et que le centralisateur d'un élément de C_k, pour $k = 11, 12$, soit une extension centrale de Fi_{k-1} par $\underline{\underline{Z}}_3$ (d'après une communication de B. Fischer, aux notations près !).

3. Le réseau de Leech.

3.1. La forme quadratique de Conway-Leech-Niemeier.

THÉORÈME [8 , 34].- Il existe 24 classes d'isomorphisme de formes quadratiques positives paires $\underline{\underline{Z}}^{24} \to 2\underline{\underline{Z}}$ de discriminant 1 . Une et une seule de ces formes ne prend pas la valeur 2 .

On notera q cette dernière forme et $\cdot 0$ (selon Conway) son groupe orthogonal (stabilisateur de q dans $GL_{24}(\underline{\underline{Z}})$).

3.2. Liens avec les groupes sporadiques : quelques énoncés [7].

Soient $a , b , c \in \underline{\underline{N}}^*$. Un sous-module V de $\underline{\underline{Z}}^{24}$ est dit de type a s'il est de la forme $\underline{\underline{Z}}.x$, avec $q(x) = 2a$, et de type abc (resp. a_{bc}) s'il existe $x , y \in \underline{\underline{Z}}^{24}$ tels que $q(x) = 2a$, $q(y) = 2b$, $q(x-y) = 2c$ et $V = \underline{\underline{Z}}.x + \underline{\underline{Z}}.y$ (resp. $V = \underline{\underline{Z}}.x$). Le fixateur dans $\cdot 0$ d'un sous-module de type t est noté $\cdot t$; pour tous les types t envisagés ci-dessous, on montre que les sous-modules de type t sont permutés transitivement par $\cdot 0$, de sorte que $\cdot t$ est un groupe bien déterminé à isomorphisme près. On pose aussi $\cdot 1 = \cdot 0/\{\pm 1\}$. Alors :

pour $i = 1, 2, 3$, $\cdot i = Co_i$ (définition des groupes de Conway) ;
$\cdot 4 \cong \underline{\underline{Z}}_2^{11} \rtimes M_{23}$; $\cdot 5 \cong \mathrm{Aut}\, McL \cong McL \rtimes \underline{\underline{Z}}_2$; $\cdot 6_{32} \cong M_{24}$;
$\cdot 7 = \cdot 332 \cong HiS$; $\cdot 8_{32} = \cdot 322 \cong McL$; $\cdot 9_{42} \cong M_{23}$;
$\cdot 9_{33} \cong \underline{\underline{Z}}_3^5 \rtimes (M_{11} \times \underline{\underline{Z}}_2)$; $\cdot 10_{33} \cong \mathrm{Aut}\, HiS \cong HiS \rtimes \underline{\underline{Z}}_2$;
$\cdot 10_{42} = \cdot 422 \cong \underline{\underline{Z}}_2^{10} \rtimes M_{22}$; $\cdot 333 \cong \underline{\underline{Z}}_3^5 \rtimes M_{11}$;
$\cdot 432 \cong M_{23}$; $\cdot 542 \cong M_{22}$; $\cdot 633 \cong M_{12}$.

De plus, $\cdot 0$ contient une extension centrale de HaJ par $\underline{\underline{Z}}_2$ et une extension centrale de Suz par $\underline{\underline{Z}}_6$, stabilisant respectivement des sous-modules de rang 6 et de rang 12 (pour Suz, c'est un résultat de J. Lindsey, communiqué au conférencier par M. Suzuki). D'autre part, J. Thompson a mis en évidence dans $\cdot 1$ des sous-groupes $\underline{A}_i$ $(i = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$ dont les centralisateurs sont respectivement isomorphes à $\underline{A}_3$, $\underline{A}_4$, $PGL_3(\underline{\underline{F}}_2)$, $U_3(\underline{\underline{F}}_9)$, HaJ, $G_2(\underline{\underline{F}}_4)$, une extension centrale de Suz par $\underline{\underline{Z}}_3$ et Co_1 (comparer avec 2.5 !) (communication de B. Fischer).

3.3. <u>Une construction du réseau de Leech</u> [7, 25, 26].

Soient $X = \underline{\underline{F}}_{23} \cup \{\infty\}$, $\underline{B}$ et $\underline{B}_n$ définis comme en 1.3.4. Soit $(e_i)_{i \in X}$ une base de $\underline{\underline{R}}^{24}$. Posons $\bar{q}(\Sigma x_i e_i) = \frac{1}{8}\Sigma x_i^2$ et, pour $Y \subset X$, $e_Y = \sum_{i \in Y} e_i$. L'ensemble L des $\Sigma x_i e_i \in \underline{\underline{R}}^{24}$ $(x_i \in \underline{\underline{Z}})$ tels que

$$\Sigma x_i \equiv 0 \pmod 4, \quad x_i \equiv \frac{1}{4}\Sigma x_i \pmod 2$$

$$\{i \mid x_i \not\equiv \frac{1}{4}\Sigma x_i \pmod 4\} \in \underline{B}$$

est manifestement un réseau. La forme $\bar{q}|_L$ est la forme q du n° 3.1 ; celui qui ne désire pas admettre le théorème 3.1 peut lire la suite en prenant ceci pour définition de q. Soit $G = (\cdot 0)$ le groupe des transformations linéaires de $\underline{\underline{R}}^{24}$ conservant L et $\bar{q}$.

3.4. <u>Calcul de</u> $|G| = |\cdot 0|$; <u>simplicité de</u> $\cdot 1$ [7].

3.4.1. Le groupe M_{24} opère de façon évidente sur L (en permutant les e_i). Pour $Y \in \underline{B}$, G contient la transformation f_Y définie par $f_Y(e_i) = e_i$ ou $-e_i$ selon que i appartient ou non à Y. On notera N le sous-groupe de G, isomorphe à $\underline{\underline{Z}}_2^{12} \rtimes M_{24}$, engendré par M_{24} et les f_Y.

3.4.2. Posons $L_4^2 = \{2 \sum_{i \in Y} \varepsilon_i e_i \mid \varepsilon_i = \pm 1 \; ; \; \Pi \, \varepsilon_i > 0 \; ; \; Y \in \underline{B}_8\}$, $L_4^3 = \{\pm(e_Y + 4e_j - e_{X-Y}) \mid Y \in \underline{B} \; ; \; j \notin Y\}$ et $L_4^4 = \{4(\pm e_i \pm e_j) \mid i, j \in X \; ; \; i \neq j\}$. Il résulte d'un calcul facile que

$$(1) \qquad L_4 = \{x \in L \mid q(x) = 4\} = L_4^2 \cup L_4^3 \cup L_4^4 .$$

3.4.3. <u>Soit</u> zp <u>l'ordre d'un élément</u> g <u>de</u> G $(z, p \in \underline{\underline{N}}^*$, p <u>premier</u>). <u>Alors</u> $p \leq 23$. <u>Si</u> $p = 23$, <u>on a</u> $z \leq 2$.

Cela résulte de ce que g a au plus 24 valeurs propres distinctes qui sont des racines zp-ièmes de l'unité, et que tout conjugué d'une valeur propre est une valeur propre.

3.4.4. <u>Le cardinal de toute orbite d'un sous-groupe de</u> G <u>opérant dans n'importe quel ensemble est un produit de nombres premiers</u> ≤ 23.

C'est clair, vu 3.4.3.

3.4.5. <u>Les</u> L_4^i $(i = 2, 3, 4)$ <u>sont les orbites de</u> N <u>dans</u> L_4. <u>Pour</u> $g \in G$, <u>les propriétés suivantes sont équivalentes</u> : (i) $g \in N$; (ii) $gL_4^2 = L_4^2$; (iii) $\exists \, i, j \in X$ <u>tels que</u> $g(e_i) = e_j$.

La première assertion est évidente ainsi que l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) résulte de 3.4.2 (1) et du fait que, pour $i \in X$, on a

$$\{\pm e_j \mid j \neq i\} = \{x \in \underline{\underline{R}}^{24} \mid x \perp e_i \; ; \; 4(x + e_i) \in L_4\} .$$

Enfin, soient H le groupe des $g \in G$ satisfaisant à (ii), H_1 le stabilisateur de $x = 4(e_o + e_1)$ dans H et $K = \{y \in L_4^4 \mid x \perp y\}$. Le groupe $N \cap H_1$ a pour orbites dans K l'ensemble $\{\pm 4(e_o - e_1)\}$ et son complémentaire, de cardinal

924. Comme $\frac{1}{2}.926$ est premier, il résulte de 3.4.4 que H_1 conserve $\{\pm 4(e_0 - e_1)\}$, donc aussi $\{e_0, e_1\}$, d'où l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii).

3.4.6. Soit $(T_i)_{i=1,\dots,6}$ une partition de X en 6 ensembles de 4 points telle que $T_i \cup T_j \in \underline{B}_8$ pour $i \neq j$ (de telles partitions existent). Alors, l'application linéaire $\varphi : \underline{\underline{R}}^{24} \to \underline{\underline{R}}^{24}$ définie par $\varphi(e_k) = e_k - \frac{1}{2}e_{T_i}$ $(k \in T_i)$ appartient à G.

La vérification est immédiate.

3.4.7. Le groupe N est un sous-groupe propre maximal de G. Celui-ci est transitif sur L_4 et sur l'ensemble $M = \{(x,y) \in L_4 \times L_4 \mid x \perp y\}$. On a $|G| = 2^{22}.3^9.5^4.7^2.11.13.23$.

Vu 3.4.6, N est un sous-groupe propre de G. Soit $H \supsetneq N$ un sous-groupe de G contenant N. Vu 3.4.4 et 3.4.5, H est transitif sur L_4. Posons $e = 4e_\infty - e_X$, $f_\pm = 4(e_0 \pm e_1)$ et, pour tout $x \in L_4$, $H_x = \mathrm{Stab}_H\, x$ et $L_4(x) = \{y \in L_4 \mid x \perp y\}$. L'élément d'ordre 23 de M_{24} qui conserve e_∞ (donc e) et applique e_i sur e_{i+1} pour $i \in \underline{\underline{F}}_{23}$ n'a pas de point fixe dans $L_4(e)$, donc les orbites de H_e dans $L_4(e)$ ont des cardinaux multiples de 23. Par transitivité, ceci est aussi vrai des cardinaux des orbites de H_{f_+} dans $L_4(f_+)$. Mais on vérifie sans peine que les cardinaux des orbites de $H_{f_+} \cap N$ dans $L_4(f_+)$ sont respectivement congrus à 2, 4, 6, 12 et 22 (mod 23). Donc H_{f_+} est transitif sur $L_4(f_+)$ et H est transitif sur M. D'autre part, il résulte de 3.4.5 que $\mathrm{Fix}_G\{f_+, f_-\} = \mathrm{Fix}_N\{f_+, f_-\} = \mathrm{Fix}_N\{e_0, e_1\}$. Par conséquent $H = G$ et $|G| = |\mathrm{Fix}_N\{e_0, e_1\}|.|L_4(f_+)|.|L_4|$.

3.4.8. Pour $z \in \underline{\underline{Z}}$, G est transitif sur l'ensemble $\{(x,y) \in L_4 \times L_4 \mid q(x,y) = z\}$.

Pour $z = 8$, c'est la seconde assertion de 3.4.9. Les autres cas se traitent de façon analogue.

3.4.9. Le groupe $\cdot 1 = G/\{\pm 1\}$ est simple.

Posons $\bar{L}_4 = \{\{\pm x\} \mid x \in L_4\}$ et soit $F \neq \{1\}$ un sous-groupe distingué de $\cdot 1$. La considération des cardinaux des orbites du stabilisateur d'un point de $\bar{L}_4$ dans $\cdot 1$ (cardinaux que l'on connaît grâce à 3.4.8) montre que $\cdot 1$, qui est transitif sur $\bar{L}_4$, ne laisse invariante aucune partition non triviale de cet ensemble. Par conséquent, F est transitif sur $\bar{L}_4$ et 13 divise $|F|$. Soit P le normalisateur dans G d'un 13-groupe de Sylow. Tous les 13-groupes de Sylow de G étant conjugués dans H , on a $G = F.P$. En vertu de 3.4.3, 23 ne peut diviser l'ordre de P , donc il divise celui de F , lequel a de ce fait une intersection non vide avec le sous-groupe M_{24} de N . Mais il est facile de voir que N ne possède pas de sous-groupe distingué propre contenant M_{24} . Par conséquent, $F \supset N$ et $F = G$, vu 3.4.7.

4. Centralisateurs d'involutions.

4.1. Généralités.

L'idée, due à R. Brauer [2], de caractériser certains groupes finis simples par la donnée du centralisateur d'une involution, voire de chercher à déterminer ainsi inductivement tous les groupes finis simples (bien entendu, R. Brauer ne formule pas son "programme" en termes si ambitieux) doit se comprendre à la lumière de deux théorèmes fondamentaux :

Tout groupe fini simple non cyclique possède des involutions (Feit-Thompson).

Etant donné un groupe fini H , il n'existe qu'un nombre fini de groupes finis simples possédant une involution dont le centralisateur soit isomorphe à H (Brauer-Fowler).

Quatre groupes sporadiques ont été découverts par cette méthode.

4.2. Le groupe J [18].

Ce groupe est caractérisé par les propriétés suivantes : il est fini, ne possède pas de sous-groupe d'indice 2 , ses 2-groupes de Sylow sont abéliens et il possède une involution dont le centralisateur est isomorphe à $\underline{A}_5 \times \underline{\underline{Z}}_2$.

(Cf. aussi l'exposé de C. Chevalley [6] à ce séminaire ; pour d'autres caractérisations ou constructions de J , voir [10, 28].)

4.3. Les groupes HaJ et HJM .

Ces groupes sont les seuls groupes finis simples possédant une involution dont le centralisateur contient un 2-groupe de Sylow et est une extension de $\underline{A}_5$ par un groupe d'ordre 2^5 . Le groupe HJM (resp. HaJ) possède une seule (resp. deux) classe (s) de conjugaison d'involutions.

Z. Janko a déterminé complètement les deux tables de caractères possibles pour un groupe fini simple possédant une telle involution (cf. [19 , 12]). L'existence des deux groupes a été établie à l'aide d'ordinateurs [12 , 17] ; par la suite, l'existence de HaJ a aussi été prouvée par d'autres méthodes (cf. les nos 2.4 et 3.2). Pour l'unicité, voir le n° 5.2.

4.4. Le groupe HHM .

Soit H le centralisateur d'une transvection dans $PSL_5(\underline{\underline{F}}_2)$; D. Held [13] montre que si un groupe fini simple possède une involution dont le centralisateur est isomorphe à H , il est isomorphe à $PSL_5(\underline{\underline{F}}_2)$ ou à M_{24} , ou bien son ordre est $2^{10}.3^3.5^2.7^3.17$. Dans ce dernier cas, il détermine aussi, entre autres, la structure des normalisateurs des sous-groupes de Sylow. G. Higman et J. McKay ont construit, à l'aide d'un ordinateur, un groupe simple de l'ordre indiqué et possédant une telle involution.

4.5. Autres groupes sporadiques.

On dispose de caractérisations analogues pour les groupes M_i [2 , 3 , 13 , 20] et HiS [21]. Pour un exposé d'ensemble (non limité aux groupes sporadiques), voir [40].

5. Remarques et résultats divers.

5.1. Le groupe Ly? , de R. Lyons.

Si ce groupe existe, il possède les propriétés suivantes.

Le centralisateur de toute involution est une extension centrale non décomposée de $\underline{A}_{11}$ par $\underline{\underline{Z}}_2$. Le groupe possède un sous-groupe H , extension centrale de Aut McL = McL $\rtimes \underline{\underline{Z}}_2$ par $\underline{\underline{Z}}_3$; les cardinaux des orbites de H dans Ly?/H sont 1 , $2^3.5^2.7.11$, $2^7.3^6.7.11$, $2^3.3^5.5^2.11$, $2^2.3^5.5^2.7.11$. (D'après une communication de J. Thompson.)

5.2. Caractérisation par l'ordre.

Pour certains groupes sporadiques G , il a été démontré que G est le seul groupe simple d'ordre $|G|$. C'est notamment le cas pour M_i [38 , 54 , 58], HaJ [12], HJM [52] et HiS [35].

5.3. Automorphismes.

Le groupe $\mathrm{Aut}\, G/\mathrm{Int}\, G$ est d'ordre 1 pour $G = J$, M_{11} , M_{23} , M_{24} , Fi_{23} , C_1 , d'ordre 2 pour $G = M_{12}$, M_{22} , HaJ , McL , HiS , Suz , Fi_{22} , Fi'_{24} et d'ordre pair (probablement 2 aussi) pour G = HJM (cf. notamment [4 , 9 , 17 , 18] et aussi le n° 2.1 (c) ; pour Suz et C_1 , ce résultat est dû à J. Lindsey).

5.4. Multiplicateurs de Schur.

Le groupe $H^2(G,\underline{\underline{C}}^*)$ est d'ordre 1 pour $G = M_{11}$, M_{23} , M_{24} [4], d'ordre 2 pour $G = M_{12}$ [4 , 7 , 55] et HaJ [56 , 57], d'ordre 3 pour G = McL (Thompson) et HJM [57], et d'ordre 6 pour $G = M_{22}$ [4].

5.5. Philosophie.

Il semble que les groupes sporadiques soient le plus souvent liés étroitement à l'existence d'isomorphismes accidentels entre groupes "classiques" d'origine différente (le groupe sporadique "faisant naturellement intervenir les diverses incarnations du groupe classique en question"), ou à des inclusions anormales entre groupes classiques, ou encore à la présence de multiplicateurs de Schur non triviaux pour certains groupes simples.

5.6. Paires quadratiques (d'après une lettre de J. Thompson).

Une paire quadratique est une paire (G,M) formée d'un groupe fini G et d'un $\underline{\underline{F}}_p[G]$-module M tel que G opère fidèlement sur M et soit engendré par l'ensemble $\{g \mid (g-1)^2 M = \{0\}\}$. Deux paires se multiplient en formant le produit direct des groupes et le produit tensoriel des modules. Il s'avère que, pour une paire (G,M) indécomposable, $G/Z(G)$ est simple et $G = G'$. Supposant (G,M) indécomposable et $p \geq 5$, Thompson exhibe dans G une classe de conjugaison remarquable C de sous-groupes d'ordre q, une certaine puissance de p, telle que, pour $E, F \in C$, on ait de trois choses l'une : $\langle E,F \rangle$ (sous-groupe engendré par $E \cup F$) $\cong SL_2(\underline{\underline{F}}_q)$, ou bien $\langle E,F \rangle$ est abélien, ou bien $[E,F] \in C$ (comparer avec la définition des classes de 3-transpositions du n° 2.5 !). Il montre ensuite que (toujours pour $p \geq 5$), $G/Z(G) = (H_{\underline{\underline{F}}_q})'$ où H est un groupe algébrique simple défini sur $\underline{\underline{F}}_q$; de plus, tous les groupes algébriques simples interviennent excepté E_8 (toujours lui !). D'autre part, il observe que $(\cdot 0, L/3L)$ (notations de 3.3) est une paire quadratique, pour $p = 3$.

BIBLIOGRAPHIE

FG = Theory of finite groups, A symposium, edited by R. BAUER and C.-S. SAH, Benjamin, New York, 1969.

[1] E. ARTIN - The orders of the classical simple groups, Comm. P. Appl. Math., 8 (1955), 455-472.

[2] R. BRAUER - On the structure of groups of finite order, Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam, 1954, vol. 1, 209-217.

[3] R. BRAUER and P. FONG - A characterization of the Mathieu group M_{12} , Trans. A. M. S., 122 (1966), 18-47.

[4] N. BURGOYNE and P. FONG - The Schur multipliers of the Mathieu groups, Nagoya Math. J., 27 (1966), 733-745 ; 31 (1968), 297-304.

[5] R. CARTER - Simple groups and simple Lie algebras, J. Lond. Math. Soc., 40 (1965), 193-240.

[6] C. CHEVALLEY - Le groupe de Janko, Sém. Bourbaki, exp. 331, novembre 1967.

[7] J. H. CONWAY - A group of order 8 315 553 613 086 720 000 , Bull. Lond. Math. Soc., 1 (1969), 79-88. (Cf. aussi Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 61 (1968), 398-400.)

[8] J. H. CONWAY - A characterization of Leech's lattice, Inventiones Math., 7 (1969), 137-142.

[9] B. FISCHER - Finite groups generated by 3-transpositions, Inventiones Math., à paraître.

[10] T. M. GAGEN - A characterization of Janko's simple group, Proc. A. M. S., 19 (1968), 1393-1395.

[11] M. HALL - The theory of groups, Macmillan, New York, 1959.

[12] M. HALL and D. WALES - The simple group of order 604,800 , J. Algebra, 9 (1968), 417-450. (Cf. aussi FG, 79-90.)

[13] D. HELD - The simple group related to M_{24} , J. Algebra, 13 (1969), 253-296. (Cf. aussi FG, 121-124.)

[14] Donald G. HIGMAN - Finite permutation groups of rank 3, Math. Zeitschr., 86 (1964), 145-156.

[15] D.G. HIGMAN and C. C. SIMS - A simple group of order 44,352,000, Math. Zeitschr., 105 (1968), 110-113.

[16] Graham HIGMAN - On the simple group of D. G. Higman and C. C. Sims, Ill. Math. J., 13 (1969), 74-80.

[17] G. HIGMAN and J. McKAY - On Janko's simple group of order 50,232,960, Bull. Lond. Math. Soc., 1 (1969), 89-94. (Cf. aussi FG, 65-77.)

[18] Z. JANKO - A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, J. Algebra, 3 (1966), 147-186. (Cf. aussi Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 53 (1965), 657-658.)

[19] Z. JANKO - Some new simple groups of finite order, I, Ist. Naz. Alta Math., Symposia Mathematica, vol. I, Oderisi, Gubbio, 1968, 25-64. (Cf. aussi FG, 63-64.)

[20] Z. JANKO - A characterization of the Mathieu groups, I, II, J. Algebra, 9 (1968), 1-19, 20-41.

[21] Z. JANKO and S. K. WONG - A characterization of the Higman-Sims simple group, J. Algebra, 13 (1969), 517-534.

[22] C. JORDAN - Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris, Gauthier-Villars, 1870.

[23] C. JORDAN - Recherches sur les substitutions, J. Math. P. Appl., (2) 17 (1872), 351-363.

[24] G. KELLER - A characterization of A_6 and M_{11}, J. Algebra, 13 (1969), 409-421.

[25] J. LEECH - Some sphere packings in higher space, Canadian J. Math., 16 (1964), 657-682.

[26] J. LEECH - Notes on sphere packings, Canadian J. Math., 19 (1967), 251-267.

[27] J. H. LINDSEY - Linear groups of degree 6 and the Hall-Janko group, FG, 97-100.

[28] D. LIVINGSTONE - On a permutation representation of the Janko group, J. Algebra, 6 (1967), 43-55.

[29] H. LÜNEBURG - Über die Gruppen von Mathieu, J. Algebra, 10 (1968), 194-210.

[30] H. LÜNEBURG - Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen, Lect. Notes Springer, n° 84, 1969.

[31] E. MATHIEU - Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, J. Math. P. Appl., 6 (1861), 241-243.

[32] E. MATHIEU - Sur les fonctions cinq fois transitives de 24 quantités, J. Math. P. Appl., 18 (1873), 25-46.

[33] J. McLAUGHLIN - A simple group of order 898,128,000 , FG, 109-111.

[34] H. V. NIEMEYER - Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1 , Thèse, Göttingen, 1968.

[35] D. PARROTT and S. K. WONG - On the Higman-Sims simple group of order 44,352,000 , Pacific J. Math., 32 (1970), 501-516.

[36] J. A. de SEGUIER - Eléments de la théorie des groupes de substitutions, Paris, Gauthier-Villars, 1912.

[37] C. C. SIMS - On the isomorphism of two groups of order 44,352,000 , FG, 101-108.

[38] R. G. STANTON - The Mathieu groups, Canadian J. Math., 3 (1951), 164-174.

[39] M. SUZUKI - A simple group of order 448,345,497,600 , FG, 113-119.

[40] M. SUZUKI - Characterizations of linear groups, Bull. A. M. S., 75 (1969), 1043-1091.

[41] J. G. THOMPSON - Characterizations of finite simple groups, Travaux Congr. Intern. Math. Moscou, 1966, 158-162.

[42] J. G. THOMPSON - Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, Bull. A. M. S., 74 (1968), 383-437.

[43] J. TITS - Généralisations des groupes projectifs basées sur leurs propriétés de transitivité, Acad. Roy. Belg. Mém. Cl. Sci., 27 (1952), fasc. 2.

[44] J. TITS - Groupes simples et géométries associées, Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm, 1962, 197-221.

[45] J. TITS - Sur les systèmes de Steiner associés aux trois "grands" groupes de Mathieu, Rendiconti di Math., 25 (1964), 166-184.

[46] J. TITS - Le groupe de Janko d'ordre 604 800 , FG, 91-95.

[47] J. A. TODD - A representation of the Mathieu group M_{24} as a collineation group, Annali di Math., 71 (1966), 193-238.

[48] D. B. WALES - Generators of the Hall-Janko group as a subgroup of $G_2(4)$, J. Algebra, 13 (1969), 513-516.

[49] D. B. WALES - The uniqueness of the simple group of order 604,800 as a subgroup of SL(6,4) , J. Algebra, 11 (1969), 455-460.

[50] E. WITT - Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12 (1938), 256-265.

[51] E. WITT - Über Steinersche Systeme, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12 (1938), 265-274.

[52] S. K. WONG - On a new finite non abelian simple group of Janko, à paraître.

[53] H. ZASSENHAUS - Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien, Math. Ann., 111 (1938), 748-759.

[54] N. BRYCE - Dissertation, Monash University, 1969

[55] H. S. M. COXETER - Twelve points in PG(5,3) with 95040 self-transformations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 247 (1958), 279-293.

[56] J. H. LINDSEY - On a projective representation of the Hall-Janko group, Bull. A. M. S., 74 (1968), 1094.

[57] J. McKAY and D. WALES - The multipliers of the simple groups of order 604,800 and 50,232,960 , à paraître.

[58] D. PARROTT - On the Mathieu groups M_{22} and M_{11} , J. Australian Math. Soc., 11 (1970), 69-81.

Pour les groupes de Mathieu, voir aussi la bibliographie des articles cités.