

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

VALENTIN POÉNARU

**Travaux de J. Cerf (isotopie et pseudo-isotopie)**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 373, p. 155-176

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1969-1970\\_\\_12\\_\\_155\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__155_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## TRAVAUX DE J. CERF (ISOTOPIE ET PSEUDO-ISOTOPIE)

par Valentin POENARU

1. Introduction.

Soit  $X_n$  une variété différentiable fermée, connexe, orientable et orientée, de dimension  $n$ .  $\text{Diff}(X_n)$  va désigner le groupe des difféomorphismes de  $X_n$  qui préservent l'orientation (muni, disons de la topologie  $C^\infty$ ).

Je rappelle que  $f_0, f_1 \in \text{Diff}(X_n)$  sont dits isotopes s'ils sont dans la même composante connexe de  $\text{Diff}(X_n)$ , c'est-à-dire s'il existe un  $F \in \text{Diff}(X_n \times I)$  tel que :

a) Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_n \times I & \xrightarrow{F} & X_n \times I \\ & \searrow & \swarrow \\ & I & \end{array}$$

b) Si  $i = 0, 1$ , alors :  $F(X_n \times i) = X_n \times i$  et  $F|_{X_n \times i} = f_i$ .

Cette relation d'équivalence est, en principe, trop fine pour que les méthodes habituelles de la topologie différentielle puissent s'y appliquer directement. D'où l'intérêt de la relation d'équivalence plus faible, pseudo-isotopie, définie comme suit :  $f_0, f_1 \in \text{Diff}(X_n)$  sont pseudo-isotopes s'il existe un  $F \in \text{Diff}(X_n \times I)$  avec la propriété b) ci-dessus. ( $F$  ne préserve pas nécessairement la projection sur  $I$ .)

Tout au moins si  $X_n = S_n$  la relation de pseudo-isotopie est accessible aux méthodes de topologie différentielle. En effet  $f \in \text{Diff}(S_n)$  est pseudo-isotope à  $\text{id}(S_n)$  si et seulement si  $f$  se prolonge en un difféomorphisme de  $D_{n+1}$ . Ceci implique que, si  $D_{n+1} \cup_f D_{n+1}$  désigne la sphère d'homotopie lisse obtenue en recollant deux exemplaires de  $D_{n+1}$  suivant le difféomorphisme  $f : \partial D_{n+1} \rightarrow \partial D_{n+1}$ , alors  $D_{n+1} \cup_{f_0} D_{n+1}$  et  $D_{n+1} \cup_{f_1} D_{n+1}$  sont difféomorphes, si et seulement si  $f_0, f_1 \in \text{Diff}(S_n)$  sont pseudo-isotopes.

D'où l'intérêt du théorème de Cerf [2], [3] qui nous dit que sous certaines hypothèses (sur  $X_n$ ) la pseudo-isotopie entraîne l'isotopie :

THÉORÈME 1.- Supposons que  $\pi_1(X_n) = 0$  et  $n \geq 5$ . Alors si  $f_0, f_1 \in \text{Diff}(X_n)$  sont pseudo-isotopes, ils sont aussi isotopes.

La condition  $n \geq 5$  vient de ce que la technique de démonstration, comme on va le voir, repose sur le théorème de h-cobordisme ([7]). Par des méthodes tout à fait différentes, Cerf avait déjà montré que  $\pi_0(\text{Diff } S_3) = 0$  ([4]). La condition  $\pi_1(X) = 0$  semble être essentielle, d'après Siebenmann [6].

COROLLAIRE 1.- Si  $n \geq 5$ ,  $\pi_0(\text{Diff } S_n) = \mathbb{O}_{n+1}$ , où  $\mathbb{O}_{n+1}$  désigne le groupe de Kervaire-Milnor des sphères d'homotopie de dimension  $n + 1$ .

On a intérêt maintenant à introduire le groupe des pseudo-isotopies  $\underline{G}(X_n)$ .

Par définition  $\underline{G}(X_n) \subset \text{Diff}(X_n \times I)$  est le sous-groupe formé par les  $F \in \text{Diff}(X_n \times I)$  tels que  $F(X_n \times i) = X_n \times i$  (si  $i = 0, 1$ ) et  $F|_{X_n \times 0} = \text{identité}$ .

THÉORÈME 2.- Si  $\pi_1(X_n) = 0$  et  $n \geq 5$ , alors :

$$\pi_0(\underline{G}(X_n)) = 0.$$

(Ceci implique tout de suite le théorème 1, parce que les orbites de l'action naturelle de  $\underline{G}(X_n)$  dans  $\text{Diff}(X_n)$  seront connexes.)

COROLLAIRE 2.- Si  $n \geq 6$ ,

$$\pi_0(\text{Diff}(D_n)) = 0.$$

Des théorèmes plus ou moins analogues aux précédents, dans le cadre linéaire-par-morceaux, ont été démontrés par Morlet dans son Cours Peccot [5]. En fait, Morlet montre comment le cas général  $(X_n \times I)$  peut se réduire au cas "local"  $(S_n \times I)$ , dans le cadre linéaire-par-morceaux, ou différentiable. Le cas local, dans le cadre l.p.m. a été déjà traité, il y a longtemps, par Alexander.

Dans [5], on trouve aussi les "bonnes" conjectures sur les groupes d'homotopie supérieurs des groupes de difféomorphismes ainsi que la démonstration du fait que ces conjectures sont équivalentes à d'autres, portant seulement sur les groupes d'homotopie de  $PL(n)$ .

#### Idée de la démonstration.

On considère  $F(X_n) = \underline{F} \subset C^\infty(X_n \times I, I)$ , espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $X_n \times I$  à valeurs dans  $I$ , telles que si  $f \in F$ , on ait  $f(X_n \times i) = i$  ( $i=0,1$ ).

Dans  $\underline{F}$ , on considère le "point-base"  $\pi \in \underline{F}$ , où :

$$X_n \times I \xrightarrow{\pi = \text{projection}} I.$$

Enfin,  $\underline{G} = \underline{G}(X_n)$  opère sur  $F$ , par :

$$g.f = f \circ g^{-1}.$$

On va considérer l'orbite (notée  $\underline{E}$ ) de  $\pi$  pour les opérations de  $\underline{G}$  dans  $\underline{F}$ ;  $\underline{E}$  n'est autre que l'espace des fonctions sans singularités.

Pour montrer que  $\pi_0(\underline{G}) = 0$ , il suffit de montrer que

$$(1) \quad \pi_0(\underline{E}) = 0.$$

[En effet, on considère le sous-groupe  $\underline{H} \subset \underline{G}$  formé des  $g \in \underline{G}$  tels que  $g \cdot \pi = \pi$ . L'espace  $\underline{H}$  est contractile et l'espace homogène  $\underline{G}/\underline{H}$  s'identifie à  $\underline{E}$ . On a un homéomorphisme  $\underline{G} = \underline{E} \times \underline{H} \dots$  .]

Vu que  $\underline{F}$  est contractile, (1) est équivalent

$$(2) \quad \pi_1(\underline{F}, \underline{E}) = 0.$$

L'idée de Cerf, pour prouver (2) est la suivante. Si  $W$  est un cobordisme reliant  $V_0$  et  $V_1$ , les espaces  $\underline{E} \subset \underline{F} \subset C^\infty(W, I)$  peuvent être définis ( $\underline{E}$  = espace des fonctions sans singularités, donc  $\underline{E} \neq \emptyset$  si et seulement si  $W = V_0 \times I = V_1 \times I$ ).

Le théorème de h-cobordisme de Smale ([7]), nous dit justement que, sous les hypothèses des théorèmes 1 et 2,  $\underline{E} \neq \emptyset$  et, en fait, la démonstration donne un procédé plus ou moins "canonique" pour relier un élément  $f \in \underline{F}$ , par un chemin différentiable, avec un élément de  $\underline{E}$  ( $\pi_0(\underline{F}, \underline{E}) = 0$ ).

On essaie de montrer (2) en "mettant un paramètre à la démonstration de Smale".

## 2. Généralités sur l'espace $\underline{F}$ .

On va considérer l'espace  $\underline{F} \subset C^\infty(X_n \times I, I)$  de tout à l'heure et le sous-espace  $\underline{F}^0 \subset \underline{F}$  constitué par les fonctions génériques (c'est-à-dire les fonctions qui ne possèdent que des singularités non dégénérées, et telles que les valeurs critiques séparent les points critiques).  $\underline{F}^0$  est un ouvert partout dense de  $\underline{F}$ .

Dans  $\underline{F} - \underline{F}^0$ , on considère deux sous-ensembles disjoints,  $\underline{F}_\alpha^1, \underline{F}_\beta^1$ , définis comme suit :

$$f \in \underline{F}_\alpha^1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tous les points critiques, sauf un qui est du type} \\ -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^3, \text{ sont non-} \\ \text{dégénérés, et les valeurs critiques séparent les points} \\ \text{critiques.} \end{array} \right.$$

$$f \in \underline{F}_\beta^1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{tous les points critiques sont non-dégénérés, il y a une} \\ \text{valeur critique correspondant à exactement deux points} \\ \text{critiques, le reste ne correspondant qu'à une seule.} \end{array} \right.$$

Par définition  $\underline{F}^1 = \underline{F}_\alpha^1 \cup \underline{F}_\beta^1$ . C'est un ouvert dense de  $\underline{F} - \underline{F}^0$ . Il est (une "sous-variété") de codimension 1 dans  $\underline{F}$  (chaque  $x \in \underline{F}^1$  possède un voisinage ouvert  $W$  dans  $\underline{F}$  et une rétraction  $r : W \rightarrow W \cap \underline{F}^1$  telle qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\cong} & (W \cap \underline{F}^1) \times (-\infty, \infty) \\ \downarrow r & & \downarrow \text{pr.} \\ W \cap \underline{F}^1 & \xrightarrow{\cong} & (W \cap \underline{F}^1) . \end{array}$$

Les flèches horizontales sont des difféomorphismes).  $\underline{F} - (\underline{F}^0 \cup \underline{F}^1)$  est de codimension 2 ce qui implique que

$$\pi_i(\underline{F} - (\underline{F}^0 \cup \underline{F}^1)) \rightarrow \pi_i(\underline{F})$$

est une bijection pour  $i = 0$  et une surjection pour  $i = 1$ .

Un chemin différentiable  $g : I \rightarrow \underline{F}$  est dit "générique" si

- (i)  $g(0), g(1) \in \underline{F}^0$
- (ii)  $g(I) \subset \underline{F}^0 \cup \underline{F}^1$
- (iii)  $g$  coupe  $\underline{F}^1$  transversalement. (Donc, en particulier  $g^{-1}(\underline{F}^1) \subset I$  est fini.)

Il est clair que  $\pi_1(\underline{F}, \underline{E})$  est engendré par des lacets génériques.

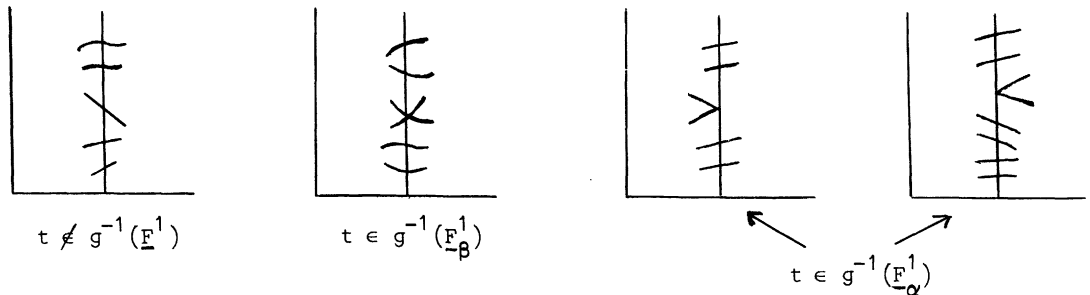
Si  $g : I \rightarrow F$  est un chemin générique, on lui attache le sous-ensemble  $\Gamma(g) \subset I \times I$  défini par :

$$I \times I \ni (t, y) \in \Gamma(g) \Leftrightarrow y \text{ est une valeur critique de } g(t) \in F .$$

On s'intéresse à la projection sur le premier facteur :

$$(t, y) \in \Gamma(g) \in I \times I \rightarrow I \ni t .$$

Au voisinage d'un  $t \notin g^{-1}(F^1)$ ,  $\Gamma(g)$  a l'allure d'une collection finie de "graphes" disjoints ; au voisinage



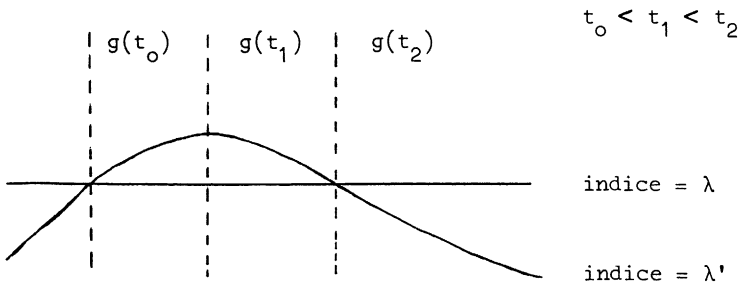
d'un  $t \in g^{-1}(F_\beta^1)$  c'est toujours des graphes, disjoints, sauf deux qui s'entrecroisent. Si  $t \in g^{-1}(F_\alpha^1)$  une paire de graphes (donc de singularités !) est créée ou tuée. Les points "non singuliers" de  $\Gamma(g)$  correspondent exactement aux singularités non-dégénérées (de  $g(t)$ ) qui séparent les valeurs critiques...

$\Gamma(g)$  sera appelé le graphe (de Cerf) du chemin générique  $g$ .

Un morceau connexe de  $\Gamma(g)$  qui a l'allure d'un graphe s'appellera une branche. Puisque cela correspond à une certaine singularité non-dégénérée, (transformée "continûment") on peut attacher un indice (le nombre des termes négatifs de la forme quadratique) à chaque branche. Les branches naissent, s'entrecroisent et meurent.

Une première étape de la démonstration consiste à voir dans quelle mesure des opérations géométriques "élémentaires" sur  $\Gamma(g) \subset I \times I$  correspondent à des déformations de chemins effectivement réalisables au niveau de l'espace fonctionnel  $\underline{F}$ . Je donne quelques exemples de ce genre de lemmes.

Le lemme de croisement. Supposons que l'on ait un chemin générique  $g$ , dont le graphe  $\Gamma(g)$  contient deux nappes consécutives qui s'entrecroisent comme ci-dessous :



Si  $\lambda > \lambda'$ , alors on peut déformer  $g$  en un chemin qui correspond à la déformation de  $\Gamma(g)$  décrite ci-dessous :



Si  $n \geq 5$ ,  $3 \leq \lambda = \lambda' \leq n - 3$  et  $\pi_1(x_0) = 0$ , "il y a une obstruction dans  $Z$  pour déformer  $g$ ".

On va regarder ce lemme d'un peu plus près. On considère la fonction générique  $g(t_1)$  et l'espace  $\underline{C}$  formé par les chemins  $\beta : I \rightarrow F$  tels que  $\beta(0) = g(t_1)$ ,  $\beta[0,1) \subset \underline{F}^0$  et  $\beta(1) \in \underline{F}_\beta^1$  (correspondant à un croisement de singularités d'indices  $\lambda$  et  $\lambda'$ ).



Notre problème de déformation de tout à l'heure se réduit au problème suivant :  $g[t_1, t_0]$  ,  $g[t_1, t_2] \in \underline{C}$  sont-ils dans la même composante connexe ?

Cerf démontre que, si  $\lambda > \lambda'$  , alors  $\pi_0(\underline{C}) = 0$  et, si  $\lambda = \lambda'$  (avec les conditions de l'énoncé ci-dessus), alors  $\pi_0(\underline{C}) = \mathbb{Z}$  . Comme ce dernier isomorphisme est très important pour la suite, je vais indiquer brièvement d'où il provient.

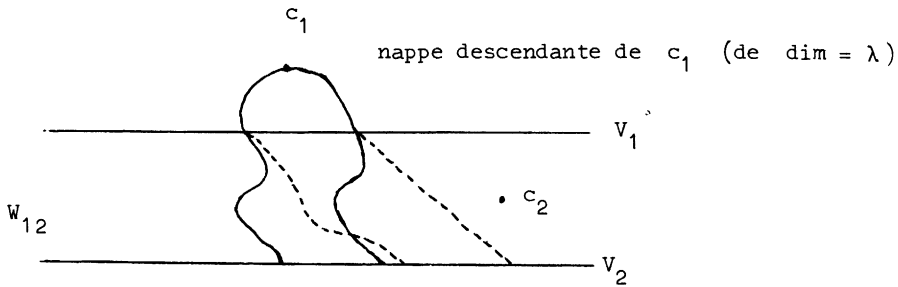
Soient  $c_1$  et  $c_2$  les deux singularités d'indice  $\lambda$  de  $g(t_1)$  que l'on doit croiser. On suppose que

$$\gamma_1 = g(t_1)(c_1) > g(t_1)(c_2) = \gamma_2 .$$

Soient  $V_1 = g(t_1)^{-1}(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2})$  et  $V_2 = g(t_1)^{-1}(\gamma_2 - \epsilon)$  . Nos hypothèses nous disent que  $V_1$  ,  $V_2$  sont simplement connexes. Soit

$$W_{12} = g(t_1)^{-1}[\gamma_2 - \epsilon, \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}] .$$

$\underline{C}$  est essentiellement la même chose que l'espace des nappes descendantes de  $c_1$  , qui descendent jusqu'à  $V_2$  sans toucher  $c_2$  .



La partie de la nappe descendante, au-dessus de  $V_1$  , est essentiellement unique. Donc, la "différence" de deux nappes est un cycle singulier de dimension  $\lambda$  de  $W_{12}$  rel  $V_2$  .

Si l'on choisit une nappe descendante "point de base de  $\underline{C}$  ", on a une appli-

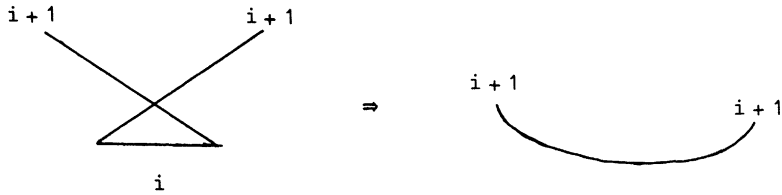
cation :

$$\pi_0(\underline{\mathbb{C}}) \rightarrow H_\lambda(W_{1,2}, V_2) = \mathbb{Z} .$$

Sous les conditions décrites plus haut, on montre que c'est un isomorphisme.

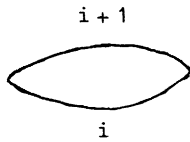
Je vais indiquer très brièvement deux autres lemmes du même genre. On aura toujours  $n \geq 5$  et les singularités qui vont intervenir dans les énoncés vont reposer sur une surface de niveau simplement connexe.

Le lemme de la queue d'aronde nous dit que, si  $1 \leq i \leq n - 4$ , la déformation de  $\Gamma(g)$  décrite par les dessins



est effectivement réalisable.

Le lemme de l'unicité des morts nous dit qu'on peut effacer de  $\Gamma(g)$  un morceau comme ci-dessous :



Il y a d'autres lemmes du même genre, qu'on ne va pas donner ici. Voir [2,3] pour plus de détails.

### 3. L'espace $\underline{F}_i$

On va décrire maintenant une partie de  $\underline{F}$  qui sera très importante pour la suite :

$\underline{F} \supset F_{i,n}$  = fonctions avec points critiques non-dégénérés, possédant exactement  $n$  points d'indice  $i$  et  $n$  d'indice  $i+1$ , telles que si  $c, c'$  sont deux points critiques de  $f$  :

$$(\text{indice}(c) - \text{indice}(c'))(f(c) - f(c')) > 0 .$$

On va définir aussi les sous-espaces de codimension 1 :  $F_{i,n;\alpha} \subset \underline{F}$  qui "séparent"  $F_{i,n}$  de  $F_{i,n+1}$  ; par définition  $f \in F_{i,n;\alpha}$  si  $f$  possède comme singularités un "point de naissance"  $c$  d'indice  $(i, i+1)$ ,  $n$  points non-dégénérés d'indice  $i+1$  à des niveaux supérieurs à  $c$  et  $n$  points non-dégénérés d'indice  $i$  à des niveaux inférieurs à  $c$ .

Par définition  $\underline{F}_i \subset \underline{F}$  est l'ouvert

$$\underline{F}_i = \bigcup_{n \geq 0} (F_{i,n} \cup F_{i,n;\alpha}) .$$

PROPOSITION 1.  $\underline{F}_i$  est connexe.

La démonstration se fait à l'aide des lemmes de déformation mentionnés à la fin du précédent paragraphe.

L'idée est de considérer deux éléments de  $\underline{F}_i$ , de les joindre par un chemin générique  $g$  dans  $\underline{F}$  (ce qui est possible puisque  $\underline{F}$  est connexe), puis, à l'aide des lemmes du paragraphe précédent, de déformer  $g$  de telle façon qu'il soit ramené dans  $\underline{F}_i$ . C'est clair que si l'on dispose d'assez de lemmes de déformation ce sera toujours possible...

On va définir une stratification "naturelle" de  $\underline{F}_i$  (en fait, Cerf définit

aussi une stratification pour  $\underline{F}$  qui va induire celle donnée par nous, ici). Je rappelle que, si  $E$  est un espace topologique, une décomposition

$$E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_i \dots, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

est dite une stratification si chaque  $E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_i \subset E$  est un ouvert. On a des notions évidentes de morphisme stratifié, stratification induite et stratification produit.  $E_i$  s'appelle la  $i$ -ième strate.

On va attacher à tout espace stratifié un complexe simplicial, le nerf (de la stratification). On commence par considérer l'ensemble :

$$\tilde{E} = \pi_0(E_0) \cup \pi_0(E_1) \cup \dots$$

( $\pi_0(X)$  = ensemble des composantes connexes par arcs de  $X$ ). Sur  $\tilde{E}$  on a une relation d'ordre ( $\leq$ )

$$\text{si } A \in B \in \tilde{E} : A \geq B \Leftrightarrow \bar{A} \supset B.$$

Les sommets du nerf seront les éléments de  $\tilde{E}$  et ses  $i$ -simplexes des parties de  $i + 1$  éléments, totalement ordonnées. Par exemple, si  $E$  est un complexe simplicial (stratifié par la triangulation), le nerf est la première sous-division barycentrique.

On va considérer dans  $R_n$  la stratification "symétrique" définie à l'aide de toutes les diagonales  $x_i = x_j$ . Dans  $R_n \times R_n$  on va considérer la stratification produit. Si  $f \in F_{i,n}$ , on peut numéroter les points critiques de  $f$ , d'indices  $i$  et  $i + 1$ ,  $c_1, \dots, c_n$ ,  $c'_1, \dots, c'_n$ . On peut garder la même numérotation dans un petit voisinage  $f \in N_f \subset F_{i,n}$ . Ceci nous donne une application

$$N_f \xrightarrow{\varphi} R_n \times R_n$$

définie par  $\varphi(f) = (f(c_1), \dots, f(c_n); f(c'_1), \dots, f(c'_n))$ . La stratification de  $R_n \times R_n$  induit une stratification de  $N_f$ , qui est indépendante du choix de la numérotation. On a donc une stratification globale de  $F_{i,n}$

$$F_{i,n} = F_{i,n}^0 \cup F_{i,n}^1 \cup \dots$$

où  $F_{i,n}^0 = \underline{F}^0 \cap F_{i,n}$ ,  $F_{i,n}^1 = \underline{F}^1 \cap F_{i,n}$ , ... .

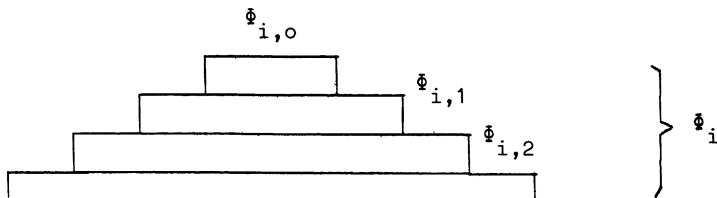
Le nerf de la stratification de  $F_{i,n}$  sera désigné par  $\Phi_{i,n}$ .

On a aussi une stratification de  $\underline{F}_i$  qui est obtenue, essentiellement, en "prolongeant, par continuité," les strates des  $F_{i,n}$  au-dessus des parois  $F_{i,n;\alpha}$ . Le nerf  $\Phi_i$  de la stratification de  $\underline{F}_i$  peut être décrit comme suit :

Considérons l'opération qui consiste à ajouter une paire de points critiques d'indices  $i$  et  $i + 1$ , qui s'entretuent, à des niveaux intermédiaires entre les points d'indices  $i$  et  $i + 1$ , à une fonction  $f \in F_{i,n}$ . Ceci nous définit une application (qui n'est pas univoque)  $F_{i,n} \rightarrow F_{i,n+1}$ . mais on peut montrer, à l'aide de certains des lemmes sur les  $\Gamma(g)$  ("le lemme d'unicité des naissances et des morts") que ça induit une inclusion bien définie

$$\Phi_{i,n} \hookrightarrow \Phi_{i,n+1} .$$

PROPOSITION 2.-  $\Phi_i$ , nerf de  $\underline{F}_i$ , est isomorphe à la réunion des "mapping-cylinders" des inclusions  $\Phi_{i,n} \hookrightarrow \Phi_{i,n+1}$ .

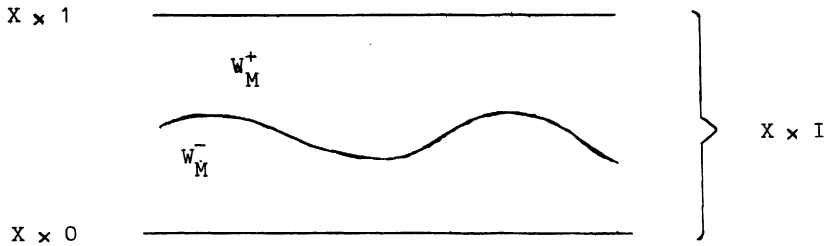


4. Le choix d'une variété de niveau intermédiaire.

Sans perdre la généralité, on peut supposer que, si  $f \in F_{i,n}$ ,  $\frac{1}{2}$  est valeur régulière de  $f$  et sépare les valeurs critiques d'indice  $i$  des valeurs critiques d'indice  $i + 1$ . Soit  $M \subset X_n \times I$  une sous-variété fermée, connexe, de dimension  $n$ , qui sépare  $X_n \times 0$  de  $X_n \times 1$ .  $\underline{M}$  sera l'espace des  $M$ ; on a une fibration  $F_{i,n} \rightarrow \underline{M}$  obtenue en associant  $f^{-1}(\frac{1}{2})$  à  $f$ . Soit  $F_M$  la fibre de  $M$ .  $F_M$  est ainsi stratifiée, son nerf sera désigné par  $\Phi_M$ .

On considère  $\Pi = \pi_0(\text{Diff}_M(X \times I))$  (difféomorphismes qui préservent  $M$ ).  $\Pi$  opère dans  $\Phi_M$  et  $\Phi_M/\Pi \approx \Phi_{i,n}$ . (En général, quand on a une fibration  $F_X \subset E \rightarrow B$  compatible avec des stratifications,  $\underline{N}(F_X)/\pi_1(B,n) = \underline{N}(E)$  où  $\underline{N}$  = le nerf, e.a.d.s. .)

La variété intermédiaire  $M$  décompose  $X \times I$  en deux cobordismes  $W_M^+$  et  $W_M^-$  :



On considère  $F_M^+$  les fonctions sur  $W_M^+$  ayant seulement  $n$  singularités non-dégénérées d'indice  $i + 1$ , et de même  $F_M^-$  les fonctions sur  $W_M^-$  ayant seulement  $n$  singularités non-dégénérées d'indice  $i$ .  $\Phi_M^+$  et  $\Phi_M^-$  seront les nerfs respectifs. On a  $\Phi_M = \Phi_M^+ \times \Phi_M^-$ , donc

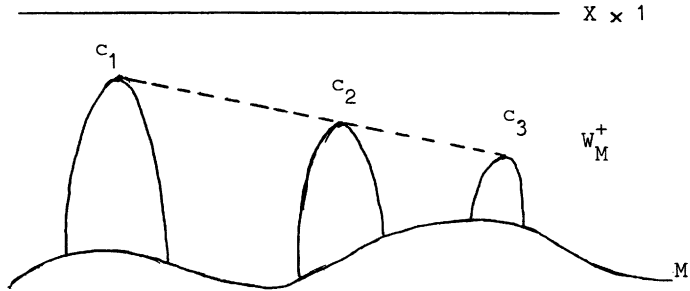
$$\Phi_{i,n} = \Phi_M^+ \times \Phi_M^- / \Pi .$$

5. Le complexe algébrique  $C_n$  .

On remarque que

$$H_j(W_M^+, M) = 0 \text{ si } j \neq i + 1 \text{ et } H_{i+1}(W_M^+, M) = \underbrace{Z + \dots + Z}_{n \text{ fois}} .$$

Si  $f \in F_M^+$  (ou à  $F_M$ ), on dira qu'une base de  $H_{i+1}(W_M^+, M)$  est adaptée à  $f$  si elle est définie par les classes fondamentales d'une famille de nappes descendantes relatives aux points critiques  $c_1, \dots, c_n$  ordonnés de telle manière que  $f(c_1) \geq f(c_2) \geq \dots \geq f(c_n) \dots$



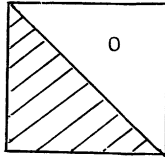
[On rappelle que l'on obtient  $f^{-1}(-\infty, (f(c_i) + \epsilon))$  à partir de  $f^{-1}(-\infty, (f(c_i) - \epsilon))$ , homotopiquement parlant, en ajoutant une cellule de dimension  $i + 1$  .] Si j'introduis une métrique riemannienne sur  $W_M^+$  cette cellule est définie par la variété instable (= nappe descendante) au point critique  $c_i$  du système dynamique (grad  $f$ ).

Pour préciser les idées, on va choisir une base de  $H_{i+1}(W_M^+, M)$  une fois pour toutes

$$Z^n \xrightarrow[\cong]{\varphi_0} H_{i+1}(W_M^+, M) .$$

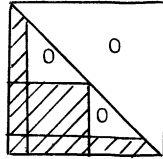
Alors, à tout  $f \in \mathbb{F}_M^+$  correspond un sous-ensemble de  $GL(n, \mathbb{Z})$  qui consiste en toutes les matrices  $\varphi_0^{-1} \circ \varphi$  où  $\varphi$  définit une base adaptée. Ce sont les matrices adaptées à  $f$ .

Soit  $T_n \subset GL(n, \mathbb{Z})$  le sous-groupe des matrices triangulaires



et soit  $S_n \subset GL(n, \mathbb{Z})$  les permutations.

Si  $f \in \mathbb{F}_M^+$  est tel que  $f(c_1) > f(c_2) > \dots > f(c_n)$  ( $f \in (\mathbb{F}_M^+)^0$ ) alors, l'ensemble des matrices adaptées à  $f$  est du type  $gT_n$  ( $g \in GL(n, \mathbb{Z})$  est matrice adaptée). Si  $f(c_1) = f(c_2) = \dots$ , il est du type  $gS_n$ . En général, c'est une classe adjacente correspondant à un sous-groupe de matrices du type



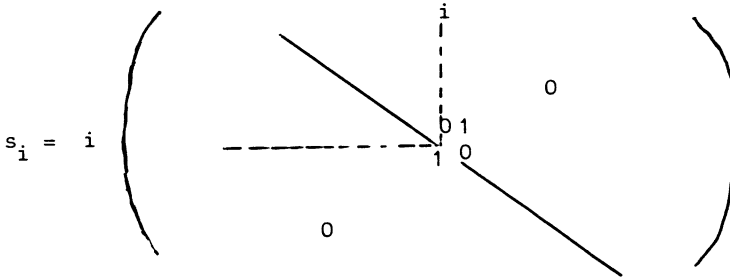
On a donc, de toute façon, une application  $(\mathbb{F}_M^+)^0 \rightarrow G_n/T_n$  ( $G_n = GL(n, \mathbb{Z})$ ). On voudrait définir un complexe  $\underline{C}_n$ , de  $0$ -squelette  $G_n/T_n$  et une application  $\mathbb{F}_M^+ \rightarrow \underline{C}_n$  qui, pour les  $0$ -squelettes, soit l'application définie plus haut. Ceci nous ramène à des notions connues depuis longtemps par les algébristes.

Le complexe  $\underline{S}_n$ . Le groupe  $S_n$  va opérer sur  $R_n$  (à gauche) par

$$S(x_1, \dots, x_n) = (x_{S^{-1}(1)}, \dots, x_{S^{-1}(n)}) .$$

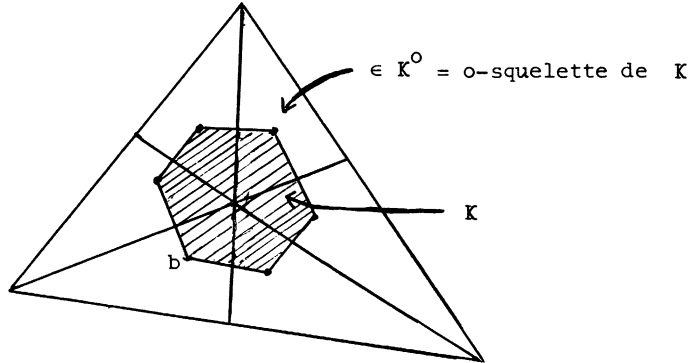
Je considère aussi les générateurs :





(  $s_1, \dots, s_{n-1}$  engendrent  $S_n$  ).

Je considère dans  $R_n$  le simplexe  $\Delta$  défini par  $x_j \geq 0$ ,  $\sum x_j = 1$ . Clairement  $S_n$  laisse  $\Delta$  invariant (globalement). On considère la première sous-division barycentrique de  $\Delta$  (notée  $\Delta'$ ) et on désigne par  $K$  le C.W.-complexe dual de  $\Delta' - \partial\Delta'$ .



Soit  $b$  le barycentre du simplexe de  $\Delta'$  (de dimension  $n-1$ ) défini par  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ . On a une bijection  $\beta : S_n \rightarrow K^0$  définie par  $\beta(s) = s.b$ . Pour tout  $\underline{J} \subset (1, \dots, n-1)$ , on va désigner par  $S_{\underline{J}}$  le sous-groupe de  $S_n$  engendré par les générateurs (canoniques) si  $i \in \underline{J}$ . Par  $\beta$ , les  $s.S_{\underline{J}}$  ( $s \in S_n$ ) correspondent exactement aux o-squelettes des cellules de  $K$ .

Par définition  $\underline{S}_n$  est  $K$  où  $K^0$  est identifié à  $S_n$  par  $\beta$ . On peut utiliser  $\underline{S}_n$  pour fabriquer un complexe (cellulaire)  $\underline{C}_n$  (de 0-squelette  $G_n/T_n$ ), comme suit : essentiellement, on commence par  $G_n/S_n$  qui est le 0-squelette d'une infinité d'exemplaires de  $\underline{S}_n$  (un pour chaque classe adjacente). En divisant par  $T_n$ , on obtient un complexe connexe  $\underline{C}_n$ .

[Pour voir que tout cela marche, on procède en fait comme suit :

Pour chaque  $g \in G_n$ , on a une application  $\chi_g : S_n \rightarrow G_n/T_n$  où  $\chi_g(s) = \{gs\}$ .  $\chi_g$  est injective car  $T_n \cap S_n = e$ . Les  $\chi_g$  définissent des cartes  $\chi_g(\underline{S}_n)$  de  $\underline{C}_n$ . Il faut vérifier qu'elles se recollent bien. On montre que  $\chi_{g_2}^{-1} \circ \chi_{g_1}$  est (sur son ensemble de définition) une translation à gauche de  $S_n$ . Ceci résulte du fait que  $S_n \rightarrow T_n \backslash G_n/T_n$  est une injection (ce qui peut être prouvé directement, ou déduit d'un résultat de Bruhat [1], qui dit que  $S_n \approx T(n, \mathbb{R}) \backslash GL(n, \mathbb{R}) / T(n, \mathbb{R})$ .) Pour en déduire que  $\chi_{g_2}^{-1} \circ \chi_{g_1}$  est une translation de  $S_n$ , on commence par remarquer que c'est trivialement vrai si l'ensemble de définition de  $\chi_{g_2}^{-1} \circ \chi_{g_1}$  est  $\emptyset$ . Supposons donc qu'il y a  $s_1 \in S_n$ ,  $s_2 \in S_n$ ,  $t \in T_n$  tels que  $g_1 s_1 t = g_2 s_2$ . On remarque que  $\chi_{g_2 s_2}(s) = \chi_{g_1 s_1}(s') \Leftrightarrow g_1 s_1 s t' = g_2 s_2 s'$  (pour un certain  $t' \in T_n$ )  $\Leftrightarrow s t' = t s'$ , on a, d'après le corollaire du théorème de Bruhat mentionné plus haut, que  $s = s'$ , donc  $\chi_{g_2 s_2}^{-1} \circ \chi_{g_1 s_1} =$  identité (sur son ensemble de définition), e.a.d.s. .]

La connexité de  $\underline{C}_n$  résulte du fait que  $S_n \cup T_n$  engendre  $G_n$ .

En utilisant les matrices adaptées, on peut définir un morphisme  $\mathfrak{S}_M^+ \rightarrow \underline{C}_n$  qui coïncide pour les 0-squelettes avec  $(\mathfrak{S}_M^+)^0 \rightarrow G_n/T_n$ .

En utilisant le lemme des croisements, on montre que  $\Phi_M^+ \rightarrow \underline{C}_n$  est surjectif et qu'en fait c'est un revêtement.

En traitant  $W_M^-$  de la même manière que  $W_M^+$  (mais en utilisant les nappes ascendantes), on a aussi un morphisme  $\Phi_M^- \rightarrow \underline{C}_n$  ; donc

$$\Phi_M = \Phi_M^+ \times \Phi_M^- \xrightarrow{p} \underline{C}_n \times \underline{C}_n .$$

On remarque que  $\Pi = \pi_0(\text{Diff}_M(X \times I))$  opère sur  $\underline{C}_n \times \underline{C}_n$  comme suit : On a des homomorphismes

$$\begin{array}{l} \Pi \rightarrow \pi_0(\text{Diff } W_M^+) \rightarrow G_n = \text{action (linéaire) sur } H_{i+1}(W_M^+, M) \\ \Pi \rightarrow \pi_0(\text{Diff } W_M^-) \rightarrow G_n = \text{action (linéaire) sur } H_{n-i}(W_M^-, M) \end{array}$$

et  $G_n$  opère naturellement sur  $\underline{C}_n$  .

Les opérations de  $\Pi$  dans  $\Phi_M^+ \times \Phi_M^-$  (définies au § 4) et dans  $\underline{C}_n \times \underline{C}_n$  sont compatibles avec  $p$  .

En choisissant les bases initiales de  $H_{i+1}(W_M^+, M)$  et  $H_{n-i}(W_M^-, M)$  en dualité de Poincaré, le  $0$ -squelette de  $\underline{C}_n \times \underline{C}_n / G_n = \underline{A}_n$  sera  $T_n \setminus G_n / T_n$  .

Puisque tout commute avec  $\Pi$  , on a une application

$$\Phi_{i,n} = \Phi_M^+ \times \Phi_M^{-1} / \Pi \rightarrow \underline{C}_n \times \underline{C}_n / \Pi = \underline{A}_n .$$

PROPOSITION 3.- a)  $\Pi \rightarrow \pi_0(\text{Diff } W_M^+) \rightarrow G_n$  est surjectif.

b)  $\Phi_{i,n} \rightarrow \underline{A}_n$  est un revêtement.

(La partie a) est assez facile ; b) se démontre en utilisant les lemmes de déformation. En particulier l'invariant (dans  $Z$ ) du lemme de croisement joue ici un rôle essentiel.)



exactement) :

$$(\dot{e}, \dot{e}) \quad \text{et} \quad (\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{e}) \quad ; \quad (\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{e}) \quad \text{et} \quad (\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{s}_j) \quad ;$$

$$(\dot{s}_j, \dot{e}) \quad \text{et} \quad (\overset{\circ}{t_j s_j}, \dot{e}) \quad .$$

De plus,  $(\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{s}_j)$  et  $(\overset{\circ}{t_j s_j}, \dot{e})$  sont dans l'orbite  $E_n$  de  $(\dot{e}, \dot{e})$ .

Le lemme algébrique :  $\pi_1(\underline{C}_n \times \underline{C}_n, E_n)$  est engendré par les  $G_n$ -orbites des lacets relatifs

$$\gamma_{i,\lambda} = [(\dot{e}, \dot{e}), (\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{e}), (\overset{\circ}{t_j^\lambda s_j}, \dot{s}_j)]$$

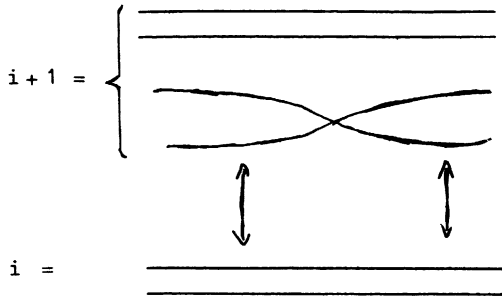
$$\delta_j = [(\dot{e}, \dot{e}), (\overset{\circ}{t_j s_j}, \dot{e})]$$

$$\zeta_j = [(\dot{e}, \dot{e}), (\dot{s}_j, \dot{e}), (\overset{\circ}{t_j s_j}, \dot{e})] \quad .$$

On considère maintenant

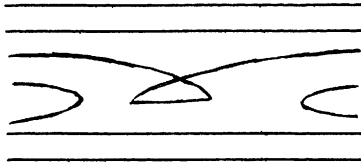
$$\begin{array}{c} \Phi_M^+ \times \Phi_M^- \rightarrow \Phi_M^+ \times \Phi_M^- / \pi = \Phi_{i,n} \\ \downarrow \\ \underline{C}_n \times \underline{C}_n \quad . \end{array}$$

On peut montrer que chacun des lacets décrits plus haut se relève, dans  $\Phi_M^+ \times \Phi_M^-$ , de telle manière que l'image dans  $\Phi_{i,n}$  soit un lacet fermé ! (ceci implique (presque) la trivialité de  $\Phi_{i,n} \rightarrow \underline{A}_n$ ). Pour faire cela, il faut commencer par remarquer qu'une fonction  $f \in F_{i,n}$  est au-dessus de  $(\dot{e}, \dot{e})$  si ses singularités se tuent deux à deux. En reprenant les définitions du complexe  $\Phi_M^+ \times \Phi_M^-$ , on peut montrer qu'un chemin qui relève, disons  $\delta_j$ , a le graphe de Cerf du type

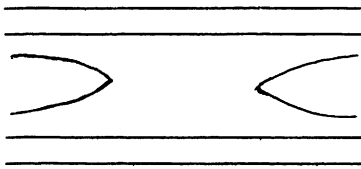


anses qui s'entretuent.

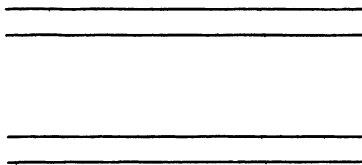
Par le lemme de cancellation et le lemme de la queue d'aronde, on le déforme successivement en



et



Par le lemme "d'unicité des naissances", on est ramené à



ce qui finit la démonstration !

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BRUHAT - Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, 84 (1956), p. 97-207.
- [2] J. CERF - Isotopie et pseudo-isotopie, Proc. I. C. M. Moscou, (1966), p. 429-437.
- [3] J. CERF - La stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété et le problème de la pseudo-isotopie, à paraître aux Annales de l'I. H. E. S.
- [4] J. CERF -  $\Gamma_4 = 0$  (Lectures notes in Mathematics, Springer 1968).
- [5] C. MORLET - Plongements et automorphismes de variétés, Cours Peccot, 1968.
- [6] L. SIEBENMANN - Torsion invariants for pseudo-isotopies on closed manifolds, Notices AMS, 14 (Nov. 1967), n° 67, t. 674, p. 942.
- [7] S. SMALE - On the structure of manifolds, Amer. J. of Maths., 84 (1962), p. 387-395.