

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES MARTINET

## **Un contre-exemple à une conjecture d'E. Noether**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 372, p. 145-154

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1969-1970\\_\\_12\\_\\_145\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__145_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UN CONTRE-EXEMPLE A UNE CONJECTURE D'E. NOETHER

d'après R. SWAN

par Jacques MARTINET

Soit  $k$  un corps, et  $x_1, \dots, x_n$   $n$  indéterminées ; notons  $K$  le corps  $k(x_1, \dots, x_n)$ . Le groupe symétrique  $S_n$  sur  $n$  lettres opère sur  $K$ . A tout sous-groupe  $G$  de  $S_n$ , la théorie de Galois associe le corps  $L = K^G$  des éléments de  $K$  fixes par  $G$ . Il est bien connu que lorsque  $G = S_n$ ,  $L$  est une extension transcendante pure de  $k$  ( $L/k$  est engendrée par les fonctions symétriques des  $x_i$ ). E. Noether [7] a conjecturé que  $L$  était toujours une extension transcendante pure de  $k$ , quel que soit le sous-groupe  $G$  considéré : si cette conjecture était vraie, on pourrait alors prouver en utilisant le théorème d'irréductibilité de Hilbert, que, lorsque le corps de base  $k$  est un corps de nombres, tout groupe fini peut être réalisé comme groupe de Galois d'une extension galoisienne de  $k$ .

En fait, il n'y a eu que peu de résultats dans cette direction. La raison en est que la conjecture est fautive. Swan [10] a donné le contre-exemple suivant :

**THÉORÈME 1.-** Soit  $\mathbb{Q}$  le corps des rationnels,  $x_1, \dots, x_n$   $n$  indéterminées,  $K = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$ ,  $G$  le groupe cyclique d'ordre  $n$  opérant transitivement sur les indéterminées  $x_1, \dots, x_n$ , et  $L$  le sous-corps de  $K$  fixe par  $G$ . Pour  $n = 47$ ,  $L$  n'est pas une extension transcendante pure de  $\mathbb{Q}$ .

### 1. Résultats sur le problème de Noether.

Nous considérons un corps  $k$ , le corps  $K = k(x_1, \dots, x_n)$ , sur lequel  $S_n$  opère de façon naturelle, et un sous-groupe  $G$  de  $S_n$ . Les résultats les plus anciens sont dus à Noether [7] et Seidelmann [9].

Si  $k$  est de caractéristique 0, pour  $n = 3$  ou  $4$ ,  $K^G$  est une extension transcendante pure de  $k$ , quel que soit le sous-groupe  $G$  de  $S_n$ . Masuda [5], [6], a étudié le cas du sous-groupe cyclique  $G$  de  $S_n$  permutant circulairement  $x_1, \dots, x_n$ . Il obtient les résultats suivants :

On suppose que la caractéristique de  $k$  ne divise pas  $n$ . Alors,  $L = K^G$  est une extension transcendante pure de  $k$  pour  $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11$ , et, quel que soit  $n$ , lorsque  $k$  contient les racines  $n$ -ièmes de l'unité. (On a un résultat analogue si  $n$  est premier et égal à la caractéristique de  $k$ . Cf. Kuniyoshi [2].)

Chevalley [1] a montré que  $K^G$  est une extension transcendante pure de  $k$  lorsque  $k$  est de caractéristique 0 et  $G$  un groupe fini engendré par des réflexions.

Pour donner d'autres résultats, il est commode d'adopter une autre présentation. Donnons-nous un corps  $k$ , un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$ , et une représentation  $\rho$  de  $G$  dans  $\text{Aut}(V)$ . Le groupe  $G$  opère via  $\rho$  sur l'algèbre symétrique de  $V$ , qui s'identifie, par le choix d'une base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$ , à l'algèbre  $k[v_1, \dots, v_n]$ . Le groupe  $G$  opère alors sur le corps des fractions  $k(V)$  de l'algèbre symétrique de  $V$ , en permutant les  $v_i$ . Réciproquement, étant donnée une extension  $K = k(x_1, \dots, x_n)$  de  $k$  et un groupe  $G$  permutant les  $x_i$ , on peut trouver un  $k$ -espace vectoriel  $V$ , une représen-

tation  $\rho$  de  $G$  dans  $\text{Aut}(V)$  et un isomorphisme d'extensions de  $k(V)$  sur  $k(x_1, \dots, x_n)$  compatible avec les opérations de  $G$ .

Avec ces notations, on a les résultats suivants :

Si  $G$  est un groupe abélien fini d'exposant  $e$ , et  $k$  un corps dont la caractéristique ne divise pas  $e$ , contenant les racines  $e$ -ièmes de l'unité,  $k(V)^G$  est une extension transcendante pure de  $k$  pour toute représentation  $\rho$  de  $G$  dans  $\text{Aut}(V)$  (Pittie [8], et aussi Kuyk et Mullender [4] dans le cas de la représentation régulière).

Si  $G$  et  $H$  sont deux groupes finis, et si  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$  et  $\sigma : H \rightarrow \text{Aut}(W)$  sont deux représentations telles que  $k(V)^G$  et  $k(W)^H$  sont des extensions transcendantales pures de  $k$ , alors  $k(V \oplus W)^{G \times H}$  est encore une extension transcendante pure de  $k$ .

Signalons enfin que Pittie obtient des résultats dans le cas d'une représentation d'un groupe fini  $G$  dans  $\text{Aut}(V)$  qui est induite par une représentation de degré 1 d'un sous-groupe distingué de  $G$ .

On trouvera une bibliographie sur le problème de Noether dans [4].

## 2. Invariants attachés à une extension.

Nous considérons un corps  $K$ , un groupe fini  $H$  d'automorphismes de  $K$ , et un sous-corps  $k$  de  $K$ , stable par  $H$ , tel que  $K$  soit une extension de type fini de  $k$ .

Nous dirons qu'un  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -module  $P$  est un module de permutation si  $P$  est libre de type fini sur  $\underline{\mathbb{Z}}$ , et possède une base permutée par  $H$ . Soit  $G_0(H)$  le groupe de Grothendieck de la catégorie des  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -modules de type fini, et  $P(H)$  le sous-groupe de  $G_0(H)$  engendré par les modules de permutation. Nous allons

attacher au triplet  $(k, K, H)$  un invariant à valeur dans le groupe quotient  $G_0(H)/P(H)$ , que nous noterons  $Sw(H)$ . Pour cela, nous supposons qu'il existe un sous-anneau  $A$  de  $K$  possédant les propriétés suivantes :

- $P_1$  Le corps des fractions de  $A$  est  $K$ .
- $P_2$   $A$  est une  $k$ -algèbre de type fini.
- $P_3$   $A$  est stable par  $H$ .
- $P_4$   $A$  est factoriel.
- $P_5$   $A^*/k^*$  est un groupe abélien de type fini (on note  $A^*$  le groupe des unités de  $A$ ).

**THÉORÈME 2.-** L'image de  $A^*/k^*$  dans  $Sw(H)$  ne dépend pas du choix de l'anneau  $A$  (soumis aux conditions  $P_1$  à  $P_5$ ).

Indication pour la démonstration (cf. Swan [10]).

Soit  $a \in A^H$ ,  $a \neq 0$ , et soit  $B = A[a^{-1}]$ . Il est clair que  $B$  vérifie les propriétés  $P_1$  à  $P_4$ . On prouve l'existence d'une suite exacte  $0 \rightarrow A^*/k^* \rightarrow B^*/k^* \rightarrow P \rightarrow 0$ , où  $P$  est le module de permutation, combinaison linéaire formelle des idéaux principaux  $Ap_i$  de  $A$ , les  $p_i$  étant des éléments irréductibles de  $A$ , deux à deux non associés, parcourant l'ensemble des diviseurs de  $a$ . Il est alors clair que  $B$  vérifie  $P_5$ , et que  $A^*/k^*$  et  $B^*/k^*$  ont même image dans  $Sw(H)$ . Si maintenant  $A$  et  $A'$  sont deux anneaux vérifiant les propriétés  $P_1$  à  $P_5$ , on montre qu'on peut trouver  $a \in A^H$  et  $a' \in A'^H$ , tels que  $A[a^{-1}]^* = A'[a'^{-1}]^*$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

Passons maintenant au cas d'un groupe  $H$  cyclique d'ordre  $n$ . Soit  $\underline{0}$  un anneau de Dedekind et  $M$  un  $\underline{0}$ -module de type fini. On peut écrire  $M$  sous la forme  $T \oplus P$  où  $T$  est un module de torsion et  $P$  un module projectif. Le module

$P$  est isomorphe à la somme directe d'un module libre et d'un idéal  $I$  de  $\underline{O}$  ; soit  $J$  l'idéal de  $\underline{O}$ , produit des idéaux premiers de  $\underline{O}$  associés à une suite de Jordan-Hölder de  $T$ . On définit la classe de  $M$ , en abrégé  $c(M)$ , comme étant la classe de l'idéal  $IJ^{-1}$  si  $I \neq 0$ , et la classe de  $J^{-1}$  si  $I = 0$  (Bourbaki, Algèbre commutative, chapitre VII, § 4, n° 7). Soit  $\sigma$  un générateur de  $H$  et soit  $\Phi$  le  $n$ -ième polynôme cyclotomique. L'anneau quotient  $\underline{O} = \underline{\mathbb{Z}}[H]/(\Phi(\sigma))$  est isomorphe à l'anneau des entiers du corps des racines  $n$ -ièmes de l'unité ; c'est donc un anneau de Dedekind. Pour tout  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -module  $M$ , notons  $M^{\Phi}$  le sous-module formé des éléments de  $M$  annulés par  $\Phi(\sigma)$  ; ce dernier module est muni naturellement d'une structure de  $\underline{O}$ -module.

Avec les notations ci-dessus, on peut énoncer le :

**THÉORÈME 3.-** La classe d'idéaux  $c((A^*/k^*)^{\Phi})$  ne dépend pas du choix de l'anneau  $A$  vérifiant les propriétés  $P_1$  à  $P_5$ .

Compte tenu du théorème 2, il suffit de démontrer le :

**LEMME.-** a) Si  $P$  est un module de permutation,  $P^{\Phi}$  est libre sur  $\underline{O}$ .

b) Pour toute suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$ , où  $P$  est un module de permutation,  $N^{\Phi}$  est isomorphe à la somme directe  $M^{\Phi} \oplus P^{\Phi}$  (et, par conséquent,  $c(M^{\Phi}) = c(N^{\Phi})$ ).

On trouvera une démonstration très élégante de ce lemme dans Swan ([10], lemme 9).

**Notation.** La classe du module  $(A^*/k^*)^{\Phi}$ , qui ne dépend que des corps  $k$ ,  $K$  et du groupe  $H$ , sera notée  $\alpha(k, K, H)$ .

### 3. Un contre-exemple.

Nous nous donnons un nombre premier  $p$ , un corps  $k$ , dont la caractéristique n'est pas divisible par  $p$ , et nous posons  $K = k(x_1, \dots, x_p)$ . Pour un corps  $L$ , on notera  $L'$  l'extension de  $L$  obtenue par adjonction des racines  $p$ -ièmes de l'unité. Nous faisons l'hypothèse que  $[k' : k] = p - 1$ . Soit  $G$  le groupe cyclique d'ordre  $p$ , qui opère sur  $K$  en permutant circulairement  $x_1, \dots, x_p$ , et soit  $L = K^G$ . Il est clair que  $[K' : K] = [L' : L] = p - 1$ . Nous notons  $H$  le groupe de Galois de  $K'/K$ , canoniquement isomorphe par restriction aux groupes de Galois de  $L'/L$  et  $k'/k$ .

PROPOSITION 1.- Si  $L/k$  est une extension transcendante pure, alors

$$\alpha(k', L', H) = 1.$$

En effet, on peut écrire  $L = k(y_1, \dots, y_p)$ , où les  $y_i$  sont algébriquement indépendants sur  $k$ . Prenons  $A = k'[y_1, \dots, y_p]$ . L'anneau  $A$  vérifie les conditions  $P_1$  à  $P_5$ . Comme  $A^*/k'^*$  est réduit à l'élément neutre,  $\alpha(k', L', H) = 1$ .

Il n'y a plus maintenant qu'à calculer effectivement  $\alpha(k', L', H)$ . Pour cela, nous nous donnons une racine primitive  $p$ -ième  $\omega$  de l'unité et formons les expressions (résolvantes de Lagrange)  $y_i = \sum_{j=1}^p \omega^{-ij} x_j$ , pour  $i = 0, 1, \dots, p-1$ . Le groupe  $H$  laisse fixe  $y_0$ ; le sous- $\underline{\mathbb{Z}}$ -module  $M'$  de  $K'^*$  de base  $y_1, \dots, y_p$  est libre sur  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ , étant engendré sur cet anneau par  $y_1$ .

Masuda [6] considère alors le sous-module  $M$  de  $M'$  défini par  $M = M' \cap L'^*$ . Il est facile de déterminer  $M$  explicitement : si  $\sigma$  est le générateur de  $G$  pour lequel  $\sigma x_i = x_{i+1}$  ( $i \bmod p$ ), alors  $\sigma y_i = \omega^i y_i$ . Par

conséquent,  $y_1^p$  et  $y_1^{-i}y_i$  sont les éléments de  $M$  ; ils engendrent un sous-module d'indice  $p$  de  $M'$ , qui ne peut donc être que  $M$ . Cela prouve en outre que  $M$  est un sous-module d'indice  $p$  de  $M'$ .

Donnons-nous une  $\underline{\mathbb{Z}}$ -base  $m_1, \dots, m_{p-1}$  de  $M$ , et soit  $A$  l'anneau  $k'[y_0, m_1, \dots, m_{p-1}, m_1^{-1}, \dots, m_{p-1}^{-1}]$ . On vérifie que le corps des fractions de  $A$  est  $L'$ , en remarquant que  $K' = k'(M', y_0) = k'(M, y_0)(y_1)$  a un degré sur  $L'$  au plus égal à  $p$ . L'anneau  $A$  vérifie donc les conditions  $P_1$  à  $P_5$ , le  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -module  $A^*/k'^*$  n'étant autre que  $M$ . Par conséquent,  $\alpha(k', L', H) = c(M^{\Phi})$ . La suite exacte  $0 \rightarrow M^{\Phi} \rightarrow M'^{\Phi} \rightarrow M'^{\Phi}/M^{\Phi} \rightarrow 0$  montre que  $\alpha(k', c', H) = c(M'^{\Phi}/M^{\Phi})^{-1}$ . On vérifie que  $M^{\Phi}$  est un sous- $\underline{\mathbb{O}}$ -module d'indice  $p$  de  $M'^{\Phi}$ , d'où l'on déduit que le  $\underline{\mathbb{O}}$ -module  $M'^{\Phi}/M^{\Phi}$  est isomorphe à un quotient  $\underline{\mathbb{Z}}[\zeta]/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $\underline{\mathbb{Z}}[\zeta]$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$ ,  $\zeta$  désignant une racine primitive  $(p-1)$ -ième de l'unité. Il suffit maintenant de prouver que  $\mathfrak{p}$  n'est pas principal lorsque  $p=47$  pour obtenir un contre-exemple à la conjecture de Noether.

Dans ce cas,  $\underline{\mathbb{Z}}[\zeta]$  est la clôture intégrale de  $\underline{\mathbb{Z}}$  dans le corps  $k'$  des racines 23-ièmes de l'unité. Ce corps contient le corps quadratique  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ , dont l'anneau des entiers est formé des éléments de la forme  $\frac{x + y\sqrt{-23}}{2}$ ,  $x$  et  $y$  étant des entiers rationnels de même parité. Si  $\mathfrak{p}$  était principal, sa norme relativement à  $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ , serait encore un idéal principal  $(\alpha)$ . On en déduirait une égalité de la forme  $(\alpha) = \left(\frac{x + y\sqrt{-23}}{2}\right)$ , d'où, en prenant la norme relativement à  $\mathbb{Q}$ , l'égalité  $47 = \frac{x^2 + 23y^2}{4}$ ,  $x$  et  $y$  étant des entiers de même parité. Un petit nombre d'essais montre qu'une telle égalité est impossible.



#### 4. Descente galoisienne.

Le  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -module  $M$  que nous avons utilisé est projectif de rang 1 . Masuda [6] prouve que, lorsque  $M$  est libre sur  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$  ,  $L$  est une extension transcendante pure de  $k$  . Malheureusement, on ne possède pas d'invariants commodes permettant de caractériser les  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -modules libres parmi ceux qui sont projectifs (sauf dans le cas où  $H$  est cyclique d'ordre premier, mais ce cas ne se rencontre dans notre problème que lorsque  $p = 3$  ). De plus, on ne sait pas si la condition que  $M$  soit libre sur  $\underline{\mathbb{Z}}[H]$  est nécessaire pour que  $K/k$  soit transcendante pure ; l'invariant  $\alpha(k', K', H)$  de Swan ne fournit qu'une réciproque partielle au résultat de Masuda.

Pittie [8] a tenté de systématiser l'étude précédente. On se donne un corps de base  $k$  , et une extension galoisienne de degré fini  $k'$  de  $k$  , dont le groupe de Galois est noté  $H$  .

Soit alors  $L$  une extension de type fini de  $k$  , de degré de transcendance  $n$  , telle que  $k$  soit algébriquement clos dans  $L$  , et soit  $L'$  le corps composé de  $k'$  et  $L$  .

Problème.- Supposant que  $L'/k'$  est transcendante pure, donner des conditions portant sur le triplet  $(k', L', H)$  pour qu'il en soit de même de  $L/k$  .

Limitons-nous au cas où  $k$  est de caractéristique 0 .

Pour faire cette étude, Pittie définit ce qu'il appelle un module de Masuda associé au triplet  $(k', L', H)$  : c'est un sous- $\underline{\mathbb{Z}}[H]$ -module de  $L'^*$  vérifiant les conditions :

- a)  $M$  est un  $\underline{\mathbb{Z}}$ -module libre de rang  $n$  ;
- b)  $M$  possède une  $\underline{\mathbb{Z}}$ -base qui est une base de transcendance de  $L'/k'$  .

THÉOREME 4.- Supposons  $H$  abélien et  $L'/k'$  transcendante pure. Alors,  $L$  est une extension transcendante pure de  $k$  si et seulement si il existe un module de Masuda pour le triplet  $(k', L', H)$  qui soit un  $\mathbb{Z}[H]$ -module de permutation.

On peut montrer l'existence d'un module de Masuda pour  $(k', L', H)$  chaque fois que  $k'$  contient les racines  $e$ -ièmes de l'unité,  $e$  désignant l'exposant de  $H$ .

Ces résultats suggèrent l'utilisation du groupe  $Sw(H)$  pour trouver des invariants permettant de tester si une extension  $L/k$  est transcendante pure. Actuellement, on ne possède pas de résultats précis dans ce sens.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CHEVALLEY - Invariants of finite groups generated by reflections, Am. Journal of Math., 77 (1955), p. 778-782.
- [2] H. KUNIYOSHI - On a problem of Chevalley, Nagoya Math. Journal, 8 (1955), p. 65-67.
- [3] W. KUYK - On a theorem of E. Noether, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., Ser. A, 67 (1964), p. 32-39.
- [4] W. KUYK and P. MULLENDER - On the invariants of finite abelian groups, Proc. Kon. Ned. Acad. Wet., Ser. A, 66 (1963), n° 2, p. 232-237.
- [5] K. MASUDA - On a problem of Chevalley, Nagoya Math. Journal, 8 (1955), p. 59-63.
- [6] K. MASUDA - Application of the theory of the group of classes of projective modules to the existence problem of independent parameters of invariants, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), n° 2, p. 223-232.
- [7] E. NOETHER - Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe, Math. Ann., 78 (1916), p. 221-229.
- [8] Harsh Vardhan PITTIE - Group actions and algebraic K-theory, Thèse, Université de Princeton (Décembre 1969).
- [9] F. SEIDELMANN - Die Gesamtheit der kub und biquadr. Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich, diss., Erlangen, (1916).
- [10] R. G. SWAN - Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Inventiones Math., 7 (1969), p. 148-158.