JACQUES DIXMIER

Les algèbres hilbertiennes modulaires de Tomita

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 371, p. 129-143
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__129_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 371 Février 1970

LES ALGÈBRES HILBERTIENNES MODULAIRES DE TOMITA

(d'après TAKESAKI)

par Jacques DIXMIER

1. Algèbres de von Neumann.

1.1. Soit H un espace hilbertien complexe. On note $L(H)$ l'ensemble des endomorphismes continus de H. C'est de manière naturelle une algèbre involutive, munie de diverses topologies utiles. La moins fine d'entre elles est la topologie faible : x_α tend faiblement vers x dans $L(H)$ si $(x_\alpha\xi|\eta)$ tend vers $(x\xi|\eta)$ quels que soient $\xi, \eta \in H$. On s'intéresse aux sous-algèbres involutives de $L(H)$ contenant 1, et on leur impose diverses conditions topologiques ; la condition raisonnable la plus stricte consiste à exiger qu'elles soient faiblement fermées. On obtient ainsi la définition des algèbres de von Neumann.

1.2. Un isomorphisme de H sur un autre espace hilbertien définit par transport de structure un isomorphisme d'algèbres de von Neumann ; les isomorphismes ainsi obtenus sont dits spatiaux. Plus généralement, si N_1 et N_2 sont des algèbres de von Neumann, on appelle isomorphisme de N_1 sur N_2 une bijection de N_1 sur N_2 qui respecte la structure d'algèbre involutive (on ne se préoccupe plus des espaces hilbertiens sous-jacents) ; un tel isomorphisme conserve automatiquement la norme, et possède aussi diverses propriétés de continuité. La structure des isomorphismes est simple et entièrement connue.

1.3. Soit N une algèbre de von Neumann. On appelle <u>trace</u> sur N^+ une fonction $\varphi : N^+ \rightarrow [0, +\infty]$, additive, positivement homogène, telle que $\varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$ pour tout $x \in N$. On dit que φ est <u>normale</u> si $\varphi(\sup(x_\alpha)) = \sup(\varphi(x_\alpha))$ pour toute famille filtrante croissante majorée (x_α) d'éléments de N^+. On dit que φ est <u>semi-finie</u> si, pour tout $x \in N^+$ tel que $x \neq 0$, il existe $y \in N^+$ tel que $y \neq 0$, $y \leq x$, $\varphi(y) < +\infty$.

1.4. Si H est de dimension finie, il est facile de dresser la liste complète des algèbres de von Neumann dans H ; ce sont des produits d'algèbres de matrices. Si H est de dimension infinie, on ne sait pas dresser cette liste, mais on a une classification des algèbres de von Neumann en différents <u>types</u>. Par exemple, nous aurons à parler des algèbres de von Neumann <u>semi-finies</u>. Une algèbre de von Neumann N est semi-finie si, pour tout élément non nul x de N^+, il existe une trace normale semi-finie φ sur N^+ telle que $\varphi(x) > 0$.

1.5. Voici une manière intéressante de construire des algèbres de von Neumann. Soit G un groupe localement compact, muni d'une mesure de Haar à gauche. Soit H l'espace hilbertien $L^2(G)$. Pour tout $g \in G$, soit $\pi(g)$ l'opérateur de translation à gauche par g dans H. Les combinaisons linéaires des $\pi(g)$ forment une sous-algèbre involutive de $L(H)$. Son adhérence faible est une algèbre de von Neumann $N(G)$. On a des renseignements sur les relations entre la structure de G et le type de $N(G)$.

2. Algèbres hilbertiennes.

2.1. Reprenons la construction 1.5. En fait, il est commode de décomposer le passage de G à $N(G)$ en deux étapes :

1) passage de G à une algèbre hilbertienne ;

2) passage d'une algèbre hilbertienne à une algèbre de von Neumann.

2.2. Définition. Une algèbre hilbertienne est une algèbre involutive A, munie d'un produit scalaire qui en fait un espace préhilbertien séparé, de telle sorte que les axiomes suivants soient vérifiés :

1) $(\xi\eta|\zeta) = (\eta|\xi^*\zeta)$ pour $\xi, \eta, \zeta \in A$;

2) les multiplications à gauche dans A sont continues ;

3) les $\xi\eta$ (où $\xi, \eta \in A$) forment un ensemble total dans A ;

4) $(\xi|\eta) = (\eta^*|\xi^*)$ pour $\xi, \eta \in A$.

Grâce à l'axiome 4, on a symétrie parfaite entre les propriétés de la multiplication à gauche et celles de la multiplication à droite. Soit H l'espace hilbertien complété de A. Pour $\xi \in A$, soit $\pi(\xi)$ l'endomorphisme continu de H qui prolonge la multiplication à gauche par ξ dans A. Alors $\pi(A)$ est une sous-algèbre involutive de $L(H)$ dont l'adhérence faible $\pi(A)^-$ est une algèbre de von Neumann. De même, les multiplications à droite définissent une algèbre de von Neumann $\rho(A)^-$. On démontre que $\pi(A)^-$ et $\rho(A)^-$ sont le commutant l'un de l'autre dans $L(H)$ ("théorème de commutation").

2.3. Reprenons G comme dans 1.5, mais supposons-le unimodulaire. Soit A l'ensemble des fonctions continues complexes à support compact sur G. Munissons-le du produit de convolution, de l'involution définie par $f^*(g) = \bar{f}(g^{-1})$ pour

$f \in A$ et $g \in G$, et du produit scalaire induit par celui de $L^2(G)$. Alors $A = A(G)$ <u>est une algèbre hilbertienne</u>, et $N(G) = \pi(A(G))^-$.

Des constructions analogues sont possibles quand on part plus généralement d'un groupe unimodulaire opérant dans un espace localement compact mesuré en conservant la mesure.

2.4. Les algèbres hilbertiennes ne servent pas seulement à faciliter la construction d'algèbres de von Neumann. Elles sont utiles aussi pour l'étude théorique des algèbres de von Neumann. Par exemple, si A_1 et A_2 sont des algèbres hilbertiennes, il est facile de définir, de manière entièrement algébrique, l'algèbre hilbertienne $A_1 \otimes A_2$ et de prouver, grâce au théorème de commutation, que $(\pi(A_1)^- \hat{\otimes} \pi(A_2)^-)' = \pi(A_1)' \hat{\otimes} \pi(A_2)'$ (le $\hat{\otimes}$ signifie qu'on prend l'adhérence faible du produit tensoriel algébrique, les $'$ désignent les commutants). D'autre part, on prouve que les algèbres de von Neumann semi-finies ne sont autres que les algèbres de von Neumann isomorphes à des algèbres $\pi(A)^-$ (A, algèbre hilbertienne). On en déduit alors facilement que, <u>si</u> N_1 <u>et</u> N_2 <u>sont des algèbres de von Neumann semi-finies, on a</u> $(N_1 \hat{\otimes} N_2)' = N_1' \hat{\otimes} N_2'$.

2.5. Malheureusement, il existe des algèbres de von Neumann qui ne sont pas semi-finies (les physiciens théoriciens en exhibent même de plus en plus). Et c'était un problème ouvert depuis longtemps de savoir si la formule $(N_1 \hat{\otimes} N_2)' = N_1' \hat{\otimes} N_2'$ est valable en général. D'autre part, on s'est limité en 2.3 aux groupes unimodulaires, ce qui est regrettable. Bref, la notion d'algèbre hilbertienne n'est pas assez générale.

3. Algèbres hilbertiennes à gauche.

3.1. Reprenons G et $H = L^2(G)$ comme en 1.5, et soit Δ la fonction module de G. Soit encore $A = A(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur G, muni du produit de convolution, du produit scalaire induit par celui de H, et de l'involution $\#$ définie par $f^{\#}(x) = \Delta(x^{-1})\bar{f}(x^{-1})$. Alors les axiomes 1, 2, 3 (cf. 2.2) sont vérifiés, mais pas l'axiome 4. On pourrait penser que de légères retouches au produit, à l'involution, et au produit scalaire suffisent à arranger les choses. En fait, il n'en est rien, et d'ailleurs il existe des groupes G pour lesquels l'algèbre de von Neumann $N(G)$ n'est plus semi-finie : la situation est donc essentiellement nouvelle.

Non seulement l'involution $f \mapsto f^{\#}$ n'est plus isométrique, mais elle n'est même plus continue. Toutefois, elle n'est pas entièrement pathologique ; elle est en effet "fermable". Nous allons expliquer ce que cela signifie.

3.2. Soient H, K des espaces hilbertiens, S une application linéaire d'un sous-espace dense de H dans K. On dit que S est <u>fermable</u> si l'adhérence de son graphe est encore le graphe d'une application. Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une application linéaire T d'un sous-espace dense de K dans H, telle que $(S\xi|\eta) = (\xi|T\eta)$ pour tous les ξ, η tels que $S\xi$, $T\eta$ soient définis.

3.3. Revenons à la situation de 3.1, et posons $g^{\flat}(x) = \bar{g}(x^{-1})$ pour tout $g \in A$. Alors on a $(f^{\#}|g) = (g^{\flat}|f)$ pour tous f, $g \in A$, ce qui prouve bien que $f \mapsto f^{\#}$ est fermable.

3.4. Définition. Une algèbre hilbertienne à gauche est une algèbre involutive A (nous noterons $\xi \mapsto \xi^{\#}$ l'involution), munie d'un produit scalaire qui en fait un espace préhilbertien séparé, de telle sorte que les axiomes 1, 2, 3 de 2.2 soient vérifiés, ainsi que l'axiome suivant, qui généralise l'axiome 4 :

4') l'application $\xi \mapsto \xi^{\#}$ de A dans A est fermable.

Les algèbres hilbertiennes à droite se définissent de manière analogue.

3.5. Dans la situation de 3.1, $A(G)$ est une algèbre hilbertienne à gauche. Définissant π comme en 2.2, on a $N(G) = \pi(A(G))^{-}$ comme en 2.3.

3.6. Voici un autre exemple d'algèbre hilbertienne à gauche. Soit N une algèbre de von Neumann dans H. Supposons qu'il existe $\xi_0 \in H$ séparateur et totalisateur pour N : cela veut dire que l'application $\alpha : x \mapsto x\xi_0$ de N dans H est injective et d'image dense. (L'étude des algèbres de von Neumann quelconques se ramène par des procédés simples à celle des algèbres de von Neumann pour lesquelles il existe un tel ξ_0. En outre, dans beaucoup de questions, ξ_0 fait partie des données.) Soit $A = N\xi_0$. Grâce à α, transportons à A la structure d'algèbre involutive de N. Alors, avec le produit scalaire induit par celui de H, A est une algèbre hilbertienne à gauche admettant ξ_0 pour élément unité. Les axiomes 1, 2, 3 sont immédiats ; d'autre part, pour $x \in N$ et $x' \in N'$, on a

(1) $(x^*\xi_0|x'\xi_0) = (x'^*x^*\xi_0|\xi_0) = (x^*x'^*\xi_0|\xi_0) = (x'^*\xi_0|x\xi_0)$;

or ξ_0 est totalisateur et séparateur pour N', donc l'application $x'\xi_0 \mapsto x'^*\xi_0$ a un domaine de définition dense ; on conclut alors de (1) et de 3.2 que l'application $x\xi_0 \mapsto x^*\xi_0$ est fermable, d'où notre assertion.

Si $x , y \in N$, on a $(\pi(x\xi_o))(y\xi_o) = (x\xi_o)(y\xi_o) = (xy)(\xi_o) = x(y\xi_o)$, d'où $\pi(x\xi_o) = x$. Ainsi $\pi(A) = \pi(A)^- = N$, et toute algèbre de von Neumann (possédant un vecteur séparateur et totalisateur) peut donc être considérée comme associée à une algèbre hilbertienne à gauche.

3.7. Afin de prouver $(N_1 \hat{\otimes} N_2)' = N_1' \hat{\otimes} N_2'$ pour des algèbres de von Neumann quelconques (cf. 2.4 et 2.5), il est maintenant raisonnable de chercher un théorème de commutation pour les algèbres hilbertiennes à gauche.

3.8. Soit donc A une algèbre hilbertienne à gauche. L'involution $\xi \mapsto \xi^{\#}$ admet une fermeture S , dont le domaine de définition $\mathcal{D}(S)$ contient A . L'adjoint F de S a un domaine de définition $\mathcal{D}(F)$ dense dans H . Soit A' (attention : ici le ' ne désigne pas un commutant) l'ensemble des $\eta \in \mathcal{D}(F)$ tels que l'application $\xi \mapsto \pi(\xi)\eta$ (moralement la multiplication à droite par η) soit continue, donc admette un prolongement continu à H que nous noterons $\pi'(\eta)$. Alors on fait de A' une algèbre hilbertienne à droite de la manière suivante : 1) le produit scalaire est induit par celui de H ; 2) l'involution est $F|A'$; 3) pour $\eta_1 , \eta_2 \in A'$, on pose $\eta_1\eta_2 = \pi'(\eta_2)\eta_1$. On dit que A' est <u>l'algèbre hilbertienne à droite associée à</u> A . Si on recommence l'opération, on tombe sur une algèbre hilbertienne à gauche A'' qui prolonge A , avec le même S qu'au début. On a $A''' = A'$, etc. On dit que A est achevée si $A = A''$; toute A possède un "achèvement", à savoir A'' . On a un théorème de commutation : <u>le commutant de</u> $\pi(A)^-$ <u>est</u> $\pi'(A')^-$. Il en résulte en particulier que les multiplications à gauche de A et de A'' engendrent la même algèbre de von Neumann.

3.9. Dans l'exemple de 3.6, on a $A = A'' = N\xi_o$, $A' = N'\xi_o$, $\pi(A) = \pi(A)^- = N$ comme on l'a déjà dit, et $\pi'(A') = \pi'(A')^- = N'$.

3.10. Tout cela, sans être très difficile, prend une dizaine de pages (et est indispensable pour la suite). Malheureusement, nous sommes encore très peu avancés. Pour pouvoir déduire la formule $(N_1 \hat{\otimes} N_2)' = N_1' \hat{\otimes} N_2'$ de ce qui précède, il faudrait savoir, étant données des algèbres hilbertiennes à gauche A_1 et A_2 , quelle est l'algèbre hilbertienne à droite associée à l'algèbre hilbertienne à gauche $A_1 \otimes A_2$; or on peut seulement dire qu'elle contient $A_1' \otimes A_2'$, et cela ne suffit pas. Il nous faudrait donc, comme en 2.2, un théorème de commutation faisant intervenir A seulement (et pas A'), avec les multiplications à gauche et à droite de A ; mais les multiplications à droite de A ne sont pas continues, ce qui est fort désagréable.

4. Algèbres hilbertiennes à gauche modulaires.

4.1. Reprenons le groupe non nécessairement unimodulaire G . Comme les éléments de $A(G)$ sont des fonctions continues à support compact, on remarque que les multiplications à droite dans $A(G)$ sont en fait continues. Mais c'est là un coup de chance : on aurait très raisonnablement pu définir les éléments de $A(G)$ par des conditions un peu moins restrictives, et cette remarque n'aurait plus été valable. (En tous cas, cette remarque n'est plus valable dans l'exemple 3.6.) Toutefois cela suggère l'idée suivante : partant d'une algèbre hilbertienne à gauche A , nous essaierons de définir une sous-algèbre involutive dense de A qui vérifiera, outre les axiomes 1, 2, 3, 4', des axiomes supplémentaires, lesquels permettront entre autres choses d'avoir des multiplications à droite continues et d'énoncer un théorème de commutation satisfaisant.

4.2. La nature de ces axiomes supplémentaires est suggérée par une étude plus approfondie du groupe G . Nous avons déjà défini dans l'algèbre $A(G)$ les involutions $f \mapsto f^{\#}$ et $f \mapsto f^{\flat}$ (cf. 3.1 et 3.3). En réalité, il y a toute une famille d'involutions :

$$f(x) \mapsto \Delta(x)^{\alpha}\, \bar{f}(x^{-1}) \qquad (\alpha \in \mathbf{C})\ ;$$

pour $\alpha = -1$, on retrouve $\#$; pour $\alpha = 0$, on retrouve $\flat$; pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient une involution isométrique. D'ailleurs, les applications

$$\Delta(\alpha)\ :\ f(x) \mapsto \Delta(x)^{\alpha} f(x)$$

de $A(G)$ dans $A(G)$ sont elles-même intéressantes ; elles forment un groupe à un paramètre complexe d'automorphismes de l'algèbre $A(G)$, vérifiant les conditions suivantes :

$$(\Delta(\alpha)f)^{\#} = \Delta(-\bar{\alpha})f^{\#} \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbf{C}\ ,\ f, g \in A(G)$$

$$(\Delta(\alpha)f \mid g) = (f \mid \Delta(\bar{\alpha})g) \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbf{C}\ ,\ f, g \in A(G)$$

$$(\Delta(1)f^{\#} \mid g^{\#}) = (g \mid f) \qquad \text{pour } f, g \in A(G)$$

$\alpha \mapsto (\Delta(\alpha)f \mid g)$ est analytique pour f , $g \in A(G)$

$(1 + \Delta(\alpha))(A(G))$ est dense dans $A(G)$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

4.3. Définition. On appelle algèbre hilbertienne à gauche modulaire une algèbre hilbertienne à gauche B munie d'un groupe $(\Delta(\alpha))_{\alpha \in \mathbf{C}}$ d'automorphismes vérifiant les axiomes suggérés de manière évidente par 4.2.

(Par exemple, une algèbre hilbertienne est hilbertienne à gauche modulaire avec $\Delta(\alpha) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$.)

Alors $\xi \mapsto \xi^* = \Delta(\frac{1}{2})\xi^{\#}$ est une involution isométrique, et comme elle transforme les multiplications à gauche en les multiplications à droite, ces dernières sont continues. Pour tout $\xi \in B$, soit $\rho(\xi)$ le prolongement continu à H de la multiplication à droite par ξ . Le théorème de commutation dit que

$\pi(B)^-$ et $\rho(B)^-$ sont le commutant l'un de l'autre. Cela n'est pas très difficile à montrer. Mais un très gros travail technique (utilisant entre autres quantité d'intégrales de Cauchy) est nécessaire pour prouver le théorème suivant.

4.4. THÉORÈME (Tomita).- Soit A une algèbre hilbertienne à gauche achevée. Il existe une sous-algèbre involutive B dense dans A, et un groupe $(\Delta(\alpha))_{\alpha\in\mathbf{C}}$ d'automorphismes de B, tels que

(i) B, munie des $\Delta(\alpha)$, est une algèbre hilbertienne à gauche modulaire ;

(ii) $B'' = A$.

4.5. Pour donner une très vague idée de la démonstration de Tomita, il faut expliquer comment, partant de A, on arrive à construire les $\Delta(\alpha)$. Or l'exemple de $A(G)$ permet de le comprendre. L'involution donnée de $A(G)$ est alors l'application $f(x) \longmapsto \Delta(x)^{-1}\,\bar{f}(x^{-1})$. Sa fermeture S est encore l'application $f(x) \longmapsto \Delta(x)^{-1}\,\bar{f}(x^{-1})$, définie cette fois pour toutes les $f \in L^2(G)$ telles que $\Delta(x)^{-1}\,\bar{f}(x^{-1}) \in L^2(G)$. On peut écrire $S = \Delta^{\frac{1}{2}}J$, où

$$(Jf)(x) = \Delta(x)^{-\frac{1}{2}}\bar{f}(x^{-1})$$

$$(\Delta^{\frac{1}{2}}g)(x) = \Delta^{\frac{1}{2}}(x)\; g(x)\ .$$

Comme J est une involution isométrique définie sur tout $L^2(G)$, et que $\Delta^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur auto-adjoint positif, l'égalité $S = \Delta^{\frac{1}{2}}J$ n'est autre que la décomposition polaire de S. Or, dans la situation abstraite générale, la fermeture S de $\#$ (qui existe d'après l'axiome 4') admet une décomposition polaire, comme tout opérateur fermé ; on peut ainsi construire l'analogue abstrait de $\Delta^{\frac{1}{2}}$, puis le groupe $(\Delta(\alpha))$. On prend ensuite pour B la sous-algèbre de A engendrée par les $f(\Delta(1))\xi$, où $\xi \in A$ et où f est une fonction complexe indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$, à support compact contenu dans $]0,+\infty[$.

5. Applications.

5.1. Soient N une algèbre de von Neumann dans H, ξ un élément de H séparateur et totalisateur pour N. Il existe une algèbre hilbertienne à gauche modulaire B, admettant ξ pour élément unité, telle que N soit l'algèbre de von Neumann associée à B.

(Il suffit de combiner 3.6, 3.8 et 4.4.)

5.2. Soient N_1 et N_2 des algèbres de von Neumann. On a $(N_1 \hat{\otimes} N_2)' = N_1' \hat{\otimes} N_2'$.

On se ramène aisément au cas où N_1 et N_2 admettent chacune un vecteur séparateur et totalisateur. Il existe alors des algèbres hilbertiennes à gauche modulaires B_1, B_2 telles que $N_1 = \pi(B_1)^-$, $N_2 = \pi(B_2)^-$ (cf. 5.1). Alors $B_1 \otimes B_2$ est facilement munie d'une structure d'algèbre hilbertienne à gauche modulaire, et l'on a

$$\begin{aligned}(N_1' \hat{\otimes} N_2')' &= (\rho(B_1) \otimes \rho(B_2))' = (\rho(B_1 \otimes B_2))' \\ &= \pi(B_1 \otimes B_2)^- \qquad \text{(th. de commutation)} \\ &= N_1 \hat{\otimes} N_2 .\end{aligned}$$

5.3. Soit N une algèbre de von Neumann dans H, admettant un vecteur totalisateur et séparateur. Il existe une bijection semi-linéaire isométrique $J : H \to H$ telle que $J^2 = 1$, $JNJ = N'$, $JN'J = N$.

C'est une conséquence immédiate de 5.1 et du th. de commutation.

5.4. Soient N une algèbre de von Neumann, φ une forme linéaire positive sur N. On dit que φ est normale si $\varphi(\sup(x_\alpha)) = \sup(\varphi(x_\alpha))$ pour toute famille filtrante croissante majorée d'éléments de N. On dit que φ est fidèle si $(x \in N^+$ et $\varphi(x) = 0) \Rightarrow x = 0$. Soit $t \mapsto \sigma_t$ un groupe à un paramètre réel d'automorphismes de N , continu (en ce sens que, pour tout $x \in N$, l'application $t \longmapsto \sigma_t(x)$ soit fortement continue). On dit que φ vérifie la condition KMS (de Kubo-Martin-Schwinger) relativement à (σ_t) si, pour tous a , $b \in N$, il existe une fonction $z \longmapsto F(z)$, définie, continue et bornée pour $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, holomorphe dans la bande ouverte, telle que

$$F(t) = \varphi(\sigma_t(a)b) \quad , \quad F(t+i) = \varphi(b\sigma_t(a))$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$. (Cette condition sort de la mécanique statistique quantique, cf. par exemple [1].) Si φ vérifie la condition KMS, φ est invariante par les σ_t . Lorsque $\sigma_t = 1$ pour tout t , la condition KMS signifie simplement que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ pour tous a , $b \in N$, autrement dit que φ est une trace.

L'apparition de la condition KMS peut s'expliquer de la manière suivante. Soit $N = L(H)$. Soit p un opérateur positif traçable injectif sur H . Posant $\varphi(x) = \operatorname{Tr}(px)$ pour tout $x \in N$, on obtient une forme positive normale fidèle sur N (d'ailleurs toute forme positive normale fidèle sur N s'obtient de cette façon). Pour $t \in \mathbf{R}$, p^{it} est unitaire et définit l'automorphisme $\sigma_t : x \longmapsto p^{-it} x p^{it}$ de N . Soient a , $b \in N$ et posons

$$F(t) = \varphi(a\sigma_t(b)) = \operatorname{Tr}(p\,a\,p^{-it}\,b\,p^{it}) = \operatorname{Tr}(p^{1+it}\,a\,p^{-it}\,b) \ .$$

Pour $z \in \mathbf{C}$, l'opérateur p^z est défini, mais il est borné seulement si $\operatorname{Re} z \geq 0$. Pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, on voit que $p^{1-z}\,a\,p^z\,b$ est un opérateur traçable. On démontre que la fonction $z \longmapsto \operatorname{Tr}(p^{1+iz}\,a\,p^{-iz}\,b)$ est continue bornée pour $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$, analytique pour $0 < \operatorname{Im} z < 1$; et l'on a

$$F(t+i) = \operatorname{Tr}(p^{it}\,a\,p^{-it+1}\,b) = \operatorname{Tr}(p^{1-it}\,b\,p^{it}\,a) = \varphi(\sigma_t(b)a) \ .$$

5.5. Les définitions de 5.4 permettent d'énoncer le résultat suivant.

THÉORÈME.- Soient N une algèbre de von Neumann, φ une forme positive normale fidèle sur N. Il existe un groupe à un paramètre continu $t \mapsto \sigma_t$ $(t \in \mathbf{R})$ d'automorphismes de N, et un seul, tel que φ vérifie la condition KMS relativement à (σ_t).

Par la construction de Gelfand-Naimark-Segal, on réalise N dans un espace hilbertien H de manière que φ soit de la forme $x \mapsto (x\xi|\xi)$, où ξ est un vecteur séparateur et totalisateur pour N. On applique 5.1. Alors $t \mapsto \Delta(it)$ $(t \in \mathbf{R})$ est un groupe continu à un paramètre d'opérateurs unitaires, et $\Delta(it)\, N\, \Delta(-it) = N$ pour tout $t \in \mathbf{R}$; donc chaque $\Delta(it)$ définit un automorphisme σ_t de N. D'autre part, $\Delta(\alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, du moins sur un sous-espace dense de H. Cela, et les propriétés algébriques des $\Delta(\alpha)$, permet de construire les fonctions holomorphes requises.

Le groupe $t \mapsto \sigma_t$ s'appelle le groupe d'automorphismes de N associé à φ.

5.6. On vient de voir que φ détermine le groupe $t \mapsto \sigma_t$ de manière unique. Réciproquement, soient N une algèbre de von Neumann et $t \mapsto \sigma_t$ un groupe continu à un paramètre réel d'automorphismes de N. Il n'existe pas toujours de forme positive normale fidèle φ sur N vérifiant la condition KMS relativement à (σ_t). Supposons qu'il en existe une. Alors on peut décrire toutes les autres. Pour simplifier, nous énoncerons le résultat seulement lorsque N est un facteur, c'est-à-dire lorsque le centre de N est réduit aux scalaires.

THÉORÈME.- Dans ce cas, les seules formes positives normales fidèles sur N vérifiant la condition KMS relativement à (σ_t) sont les multiples scalaires de φ.

5.7. THÉORÈME.- <u>Soient</u> N <u>une algèbre de von Neumann,</u> φ <u>une forme positive normale fidèle sur</u> N , $t \mapsto \sigma_t$ <u>le groupe d'automorphismes associé à</u> φ . <u>Pour que</u> N <u>soit semi-finie,</u> <u>il faut et il suffit que</u> $t \mapsto \sigma_t$ <u>soit intérieur</u> (c'est-à-dire qu'il existe un groupe continu $t \mapsto U(t)$ d'opérateurs unitaires de N tel que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, σ_t soit l'automorphisme intérieur défini par $U(t)$).

Ce genre de résultats sert à démontrer, par exemple, que l'algèbre de von Neumann associée à un groupe localement compact connexe est semi-finie. Il sert à étudier les produits tensoriels infinis d'algèbres de von Neumann [2]. Il donne aussi le résultat négatif suivant :

5.8. THÉORÈME.- <u>Un facteur non semi-fini dans un espace hilbertien séparable admet des automorphismes extérieurs.</u>

La condition de séparabilité assure l'existence d'une forme positive normale fidèle φ sur le facteur. On considère le groupe (σ_t) associé. Si tous les σ_t étaient intérieurs, on conclurait que N est semi-fini.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Les résultats de 3.1 à 5.3 sont dus à Tomita, avec présentation améliorée dans [3]. Les th. 5.5, 5.6, 5.7, 5.8 sont dus à Takesaki.

[1] R. HAAG, N. M. HUGENHOLTZ and M. WINNINK - On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Commun. math. phys., 5 (1967), p. 215-236.

[2] E. STØRMER - On infinite tensor products of von Neumann algebras, à paraître.

[3] M. TAKESAKI - Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, à paraître.

[4] M. TOMITA - Quasi-standard von Neumann algebras, miméographié, 1967.

- Standard forms of von Neumann algebras, Vth functional analysis symposium of the Math. Soc. of Japan, Sendai, 1967.