J. G. M. MARS

# Les nombres de Tamagawa de groupes semi-simples

*Séminaire N. Bourbaki*, 1971, exp. n° 351, p. 79-94
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__79_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 351 Novembre 1968

# LES NOMBRES DE TAMAGAWA DE GROUPES SEMI-SIMPLES

par J. G. M. MARS

## 1. Notations.

Dans cet exposé $k$ sera un corps de nombres algébriques. On désignera par $k_v$ les complétés de $k$ et par $A$ l'anneau des adèles de $k$. On choisit une fois pour toutes un caractère $\chi$ de $A$ tel que le bicaractère $\chi(xy)$ de $A \times A$ mette $A$ en dualité avec lui-même de telle sorte que le sous-groupe discret $k$ de $A$ se corresponde à lui-même dans cette dualité. Les caractères $\chi_v$ de $k_v$ sont définis par

$$\chi(x) = \prod_v \chi_v(x_v) \qquad \text{si } x = (x_v) \in A .$$

Si $V$ est une variété algébrique définie sur $k$, les ensembles $V_v = V_{k_v}$ et $V_A$ des points de $V$ à valeurs dans $k_v$ resp. $A$ sont munis des topologies induites par la topologie de $k_v$ resp. $A$ ; ce sont des espaces localement compacts. Si $V$ est une variété sans point multiple, si $\omega$ est une jauge sur $V$ (c'est-à-dire une forme différentielle de degré maximal sur $V$, rationnelle sur $k$, partout régulière et $\neq 0$ ) et si $\lambda$ est un système de facteurs de convergence pour $V$, on note $|\lambda\omega|_A$ la mesure de Tamagawa sur $V_A$ déterminée par $\omega$ et $\lambda$. Cette mesure coïncide, sur les ensembles de la forme

$$\prod_{v\in S} V_v \times \prod_{v\notin S} V_v^o ,$$

avec le produit des mesures locales $\lambda_v|\omega|_v$ dès que $S$ est assez grand ; $S$ désigne, bien entendu, un ensemble fini de places de $k$ contenant toutes les places à l'infini et $V_v^o$ est l'ensemble des points "à coordonnées entières" dans $V_v$ (pour les détails : voir [5], [6], [7], en particulier [7], paragraphes 3 et 4).

Si $G$ est un groupe algébrique affine défini sur $k$ sans caractère rationnel, le nombre de Tamagawa de $G$ est, par définition, le volume de $G_A/G_k$ pour la mesure de Tamagawa déterminée par une jauge invariante sur $G$ et les facteurs de convergence $1$ ; on le note $\tau(G)$. Plus généralement, supposons seulement que $G$ n'admette pas de caractères rationnels définis sur $k$ ; on note $\tau_\lambda(G)$ le volume de $G_A/G_k$ pour la mesure de Tamagawa déterminée par une jauge invariante sur $G$ et un système de facteurs de convergence $\lambda$. On sait que $\tau_\lambda(G)$ est fini.

## 2. Résultats.

On va énoncer, par ordre logique plutôt que historique, les résultats connus jusqu'à présent sur les nombres de Tamagawa des groupes semi-simples.

Tout d'abord on a le théorème d'Ono [4] qui donne le rapport du nombre de Tamagawa d'un groupe semi-simple $G$ et de celui de son recouvrement universel $\tilde{G}$ :

$$\frac{\tau(G)}{\tau(\tilde{G})} = \frac{h^0(\hat{F})}{i^1(\hat{F})}$$

où $F$ est le noyau de l'homomorphisme $\tilde{G} \to G$,

$$\hat{F} = \mathrm{Hom}(F, \underline{\underline{G}}_m),$$
$$h^0(\hat{F}) = \mathrm{Card}(H^0(k,\hat{F})),$$
$$i^1(\hat{F}) = \mathrm{Card}(\mathrm{Ker}(H^1(k,\hat{F}) \to \prod_v H^1(k_v,\hat{F}))).$$

Grâce à ce théorème, on connaîtra le nombre de Tamagawa de tout groupe semi-simple dès qu'on le connaît pour au moins un groupe dans chaque classe d'isogénie (sur $k$).

Conjecture (Weil). Le nombre de Tamagawa de tout groupe semi-simple simplement connexe est $1$.

Par les travaux de Tamagawa, Weil [7] et [5], Mars [à paraître], $\tau(G)$ est connu pour les groupes classiques ; Demazure ([5], Appendice) a déterminé $\tau(G)$ pour les groupes de type $G_2$ et Mars [2] pour les groupes de type $F_4$ et pour certains groupes de type $E_6$. De plus, Langlands a calculé le volume du domaine fondamental pour les groupes déployés sur $k$, ce qui donne le nombre de Tamagawa de ces groupes [1]. Il reste donc à déterminer $\tau(G)$ pour les groupes des types ${}^3D_4$, ${}^6D_4$, $E_7$, $E_8$ et les groupes non traités de type $E_6$. Il est probable qu'on peut faire cela en utilisant la méthode de [2], sauf pour $E_8$, pourvu qu'on ait le courage de faire les calculs ; comme, en tout cas, on n'atteint pas $E_8$, il vaut mieux chercher une méthode générale.... Bien entendu, ce sont les travaux classiques de Siegel sur les formes quadratiques qui sont à l'origine de la théorie.

3. L'intégrale $I(\Phi)$.

Soit $G$ un groupe algébrique linéaire défini sur $k$ n'admettant pas de caractères rationnels définis sur $k$. Soit $(\rho,X)$ une représentation rationnelle de $G$ définie sur $k$. On considère l'intégrale

$$I(\Phi) = \int_{G_A/G_k} \sum_{\xi\in X_k} \Phi(\rho(g)\xi)\, d\nu(g)$$

où $d\nu(g)$ est la mesure de Haar sur $G_A$ normée par la condition $\int_{G_A/G_k} d\nu(g) = 1$, et où $\Phi$ est une fonction sur $X_A$. On a le critère suivant pour la convergence de $I(\Phi)$ ([7], lemme 5).

Soient $T$ un tore déployé sur $k$ maximal de $G$ et $P$ un sous-groupe parabolique défini sur $k$ minimal de $G$ contenant $T$. On désigne par $T_A^+$ l'ensemble des $t \in T_A$ tels que $|\alpha(t)| \leq 1$ pour toute racine positive $\alpha$. Pour tout caractère $\lambda$ de $T$, soit $m_\lambda$ sa multiplicité en tant que poids de $\rho$, et soit $\Delta_P$ le module de $P$. L'intégrale $I(\Phi)$ est absolument convergente pour toute fonction $\Phi$ de Schwartz-Bruhat sur $X_A$ si l'intégrale

$$\int_{T_A^+/T_k} \prod_\lambda \sup(1, |\lambda(t)|^{-m_\lambda}) |\Delta_P(t)|^{-1} \, dt$$

est convergente ; et quand il en est ainsi, $I$ est une mesure positive tempérée sur $X_A$.

Cela se démontre facilement à l'aide de la théorie de la réduction.

Remarquons que $I(\Phi)$ ne change pas quand on remplace $\Phi(x)$ par :

1) $\Phi(\alpha x)$ avec $\alpha \in GL(X)_k$ commutant aux $\rho(g)$ $(g \in G)$ ;

2) $\Phi(x)\chi(f(x))$ où $f$ est une fonction régulière sur $X$ définie sur $k$ et invariante par $G$ ;

3) $\hat{\Phi}(x)$ pourvu que la représentation $(\rho^*, X^*)$ de $G$ dans le dual de $X$ soit équivalente à $(\rho, X)$. On choisit alors un $k$-isomorphisme $\gamma : X \to X^*$ tel que $\gamma\rho(g) = \rho^*(g)\gamma$ et l'on pose $\hat{\Phi} = \Phi^* \circ \gamma$ où $\Phi^*$ est la fonction sur $X_A^*$ transformée de Fourier de $\Phi$ ;

4) $\Phi(\rho(g)x)$ avec $g \in G_A$.

LEMME.- Soit $G$ un groupe algébrique défini sur $k$ et soit $H$ un sous-groupe $k$-fermé de $G$. On suppose $G$ et $H$ unimodulaires. Soit $f$ l'application canonique de $G$ sur $U = G/H$. Supposons que $f(G_A)$ soit ouvert dans $U_A$. Alors $G$, $H$, $U$ admettent des systèmes de facteurs de convergence $\lambda$, $\mu$, $\nu$ respectivement avec $\lambda = \mu\nu$. De plus, si $dg$, $dh$ sont des jauges invariantes sur $G$, $H$ et si $du = dg/dh$ est la jauge invariante par $G$ sur $U$ qui s'en déduit, on a

$$|\lambda \, dg|_A = |\nu \, du|_A \, |\mu \, dh|_A .$$

Démonstration. L'espace $f(G_A)$ s'identifie à $G_A/H_A$ et $f(G_v)$ s'identifie à $G_v/H_v$. Comme $f(G_A)$ est ouvert dans $U_A$, $f(G_v)$ est ouvert dans $U_v$ pour tout $v$ et $f(G_v^o) = U_v^o$ pour presque tout $v$. On sait que $G_v \to U_v$ admet, localement, des sections analytiques. Cela implique que $|dg|_v = |du|_v|dh|_v$ et le lemme résulte immédiatement de là.

Dans la situation du début de ce paragraphe, soit $\xi_o$ un point de $X_k$ et soit $H$ le stabilisateur de $\xi_o$ dans $G$ ; $H$ est un sous-groupe $k$-fermé de $G$. L'application $g \mapsto \rho(g)\xi_o$ de $G$ dans $X$ définit par passage au quotient un $k$-isomorphisme de $G/H$ sur l'orbite $U$ de $\xi_o$. Supposons que $H$ soit unimodulaire et que $\rho(G_A)\xi_o$ soit ouvert dans $U_A$. D'après le lemme précédent, on peut choisir des systèmes de facteurs de convergence $\lambda$, $\mu$, $\nu$ pour $G$, $H$, $U$ tels que $\lambda = \mu\nu$. Soient $dg$, $dh$, $du = dg/dh$ des jauges invariantes. On a, d'après le même lemme et le théorème de Fubini,

$$\int_{G_A/G_k} \sum_{\rho(G_k)\xi_o} \Phi(\rho(g)\xi)|\lambda\, dg|_A = \tau_\mu(H) \int_{\rho(G_A)\xi_o} \Phi|\nu\, du|_A ,$$

si $\Phi$ est positive et intégrable sur $\rho(G_A)\xi_o$.

## 4. Le groupe linéaire spécial et groupe symplectique.

Dans ce paragraphe $G$ désigne soit le groupe linéaire spécial $SL(m,D)$ soit le groupe symplectique $Sp(m,D)$ ; dans le premier cas, $D_k$ est un corps de centre $k$, $m \geq 2$ si $D$ est commutatif, $m \geq 1$ sinon, et dans le second cas, $D_k = k$, $m$ est pair, $m \geq 2$. On considère la représentation de $G$ dans $X = D^m$.

Si $m \geq 2$, $G$ possède une orbite ouverte $U$ dans $X$. Choisissons $\xi_o \in U_k$, par exemple $\xi_o = (1,0,\dots,0)$. Le stabilisateur $H$ de $\xi_o$ dans $G$ est produit semi-direct de $SL(m-1,D)$ resp. $Sp(m-2,D)$ et d'un groupe unipotent ;

$H$ est unipotent si $D$ est commutatif et $m = 2$. Comme la fibration de $G$ par $H$ est localement triviale, on a $G_A\xi_o = U_A$.

L'intégrale $I(\Phi)$ converge pour tout $\Phi$ de Schwartz-Bruhat. D'après le paragraphe 3 on a donc, puisque $X_k = U_k \cup \{0\}$,

(1) $$I(\Phi) = \tau(H)\tau(G)^{-1}\int_{U_A} \Phi|du|_A + \Phi(0).$$

Soit $dx$ une jauge sur $X$. Alors $du$ est, à un facteur dans $k^*$ près, identique à la restriction de $dx$ à $U$. Comme, de plus, $X$ et $U$ ont le même système de facteurs de convergence, à savoir $1$, la mesure $|du|_A$ sur $U_A$ est la restriction à $U_A$ de la mesure $|dx|_A$ sur $X_A$ et le complémentaire $X_A - U_A$ de $U_A$ est de mesure nulle ([5], lemme 3.4.1). Par conséquent

(2) $$\int_{U_A} \Phi|du|_A = \int_{X_A} \Phi|dx|_A = \hat{\Phi}(0)$$

où $\hat{\Phi}$ désigne la fonction sur $X_A$ définie par

$$\hat{\Phi}(y) = \int_{X_A} \Phi(x)\,\chi(\mathrm{trd}({}^t yx))\,|dx|_A .$$

On voit tout de suite, en appliquant la formule de Poisson à la somme qui figure dans la définition de $I(\Phi)$, qu'on a

(3) $$I(\Phi) = I(\hat{\Phi})$$

pour toute fonction $\Phi$ de Schwartz-Bruhat sur $X_A$. Les formules (1), (2), (3) donnent alors

$$\tau(G) = \tau(H).$$

On en conclut, par récurrence sur $m$ et observant que le nombre de Tamagawa d'un groupe unipotent est $1$, qu'on a $\tau(G) = 1$ si $D$ est commutatif. Si $D$ n'est pas commutatif on trouve seulement $\tau(SL(m,D)) = \tau(SL(1,D))$ pour tout $m$. D'autre part, on démontre à l'aide de la fonction-$\zeta$ de $D_k$ qu'on a $\tau(SL(1,D)) = 1$ (voir [5], Th. 3.1.1 (iii), qu'on applique deux fois : une fois à $k$ et une fois à $D_k$). On a donc $\tau(G) = 1$ pour tous les groupes $G$ considérés dans ce paragraphe.

## 5. Les autres groupes classiques.

On désigne par $G$ un groupe de l'un des types suivants :

a) le groupe orthogonal spécial d'une forme quadratique sur $k$ ;

b) le groupe unitaire spécial d'une forme antihermitienne sur un corps de quaternions sur $k$, par rapport à l'involution usuelle ;

c) le groupe unitaire d'une forme hermitienne sur un corps de quaternions sur $k$, par rapport à l'involution usuelle ;

d) le groupe unitaire spécial d'une forme hermitienne sur un corps muni d'une involution de 2ème espèce.

Dans tous ces cas, on a une forme $F$ sur un espace $X = D^m$ et $G$ est le sous-groupe de $GL_D(X)$ formé des transformations qui laissent $F$ invariante et dont la norme réduite est $1$. La forme $F$ est toujours supposée être non dégénérée. Dans le cas (a) on a $D_k = k$, dans les cas (b) et (c) $D_k$ est un corps de quaternions de centre $k$, et dans le cas (d) $D_k$ est un corps dont le centre $\ell$ est une extension quadratique de $k$ et $D_k$ est muni d'une involution qui induit sur $\ell$ le $k$-automorphisme non trivial. $F$ a ses valeurs dans un espace affine $I$ tel que $I_k = k$ dans les cas (a) et (c), $I_k = D_k^-$ resp. $D_k^+$ dans les cas (b) resp. (d) (où $D_k^+$ est l'ensemble des invariants de l'involution donnée et $D_k^-$ l'ensemble des éléments qui sont transformés en leur opposé par l'involution). Le groupe $G$ est semi-simple dans les cas suivants :

(a) $m \geq 3$ (b) $m \geq 2$ (c) $m \geq 1$ (d) $m \geq 2$ si $D$ est commutatif, $m \geq 1$ sinon.

Convenons de dire que $x \in D^m$ est de rang maximal si l'on a $M_m(D)x = D^m$. Soit, pour tout $i \in I$, $U(i)$ le sous-ensemble de $X$ formé des points $x$ de rang maximal tels que $F(x) = i$. Dans les cas (a), (b), (c) les $U(i)$ sont des orbites de

$G$, et si $i \in I_K$, où $K$ est une extension quelconque de $k$, $U(i)_K$ est soit vide soit une orbite de $G_K$ : cela résulte du théorème de Witt. C'est encore vrai dans le cas (d) si l'on remplace $G$ par le groupe réductif $\Gamma$ des transformations (de norme quelconque) qui laissent $\underline{F}$ invariante. Dans tous les cas, si $\xi_i \in U(i)_k$ et si $H(i)$ est le stabilisateur de $\xi_i$ dans $G$, $H(i)$ est un groupe du même type que $G$ avec $m-1$ au lieu de $m$ si $i \neq 0$, et $H(0)$ est produit semi-direct d'un groupe du même type que $G$ avec $m-2$ au lieu de $m$ et d'un groupe unipotent.

L'intégrale $I(\Phi)$ est absolument convergente pour tout $\Phi$ dans les conditions suivantes :

(a) $m \geq 5$ ou $m = 4$, $F$ d'indice $\leq 1$ ou $m = 3$, $F$ d'indice $0$

(b) $m \geq 3$ ou $m = 2$, $F$ d'indice $0$

(c) $m \geq 1$

(d) $m \geq 3$ ou $F$ d'indice $0$.

Considérons d'abord les cas (a), (b), (c). Il résulte de ce qu'on a dit plus haut que la fibration de $G$ par $H(i)$ est localement triviale ; par conséquent, on a $G_A \xi_i = U(i)_A$ et, en appliquant les résultats du paragraphe 3,

$$\int_{G_A/G_k} \sum_{U(i)_k} \Phi(g\xi)\,|dg|_A = \tau(H(i)) \int_{U(i)_A} \Phi\,|du|_A .$$

Cette formule est donc valable pour tout $i \in I_k$ tel que $U(i)_k$ soit non vide. En sommant sur $i$ on obtient

$$(4) \qquad I(\Phi) = \sum_{i \in I_k} c_i \int_{U(i)_A} \Phi\,|du|_A + \Phi(0) ,$$

où $c_i = \tau(H(i))\tau(G)^{-1}$ si $U(i)_k$ est non vide,

$c_i = 0$ si $U(i)_k$ est vide et $U(i)_A$ non vide,

$c_i$ = arbitraire si $U(i)_A$ est vide.

On va maintenant appliquer les propositions 1 et 2 de [7].

PROPOSITION 1.- Soient $X$ et $Y$ des groupes abéliens localement compacts, munis de mesures de Haar $dx$ et $dy$ respectivement. On note $Y^*$ le dual de $Y$ et $dy^*$ la duale de $dy$. Soit $F$ une application continue de $X$ dans $Y$ satisfaisant à la condition suivante :

(A) quelle que soit la fonction $\Phi$ de Schwartz-Bruhat sur $X$, la fonction $F_\Phi^*$ définie par

(5) $$F_\Phi^*(y^*) = \int_X \Phi(x) \langle F(x), y^* \rangle \, dx$$

est intégrable sur $Y^*$, et l'intégrale $\int |F_\Phi^*| \, dy^*$ converge uniformément sur toute partie compacte de l'espace $S(X)$ de Schwartz-Bruhat.

Alors on peut, d'une manière et d'une seule, faire correspondre à tout $y \in Y$ une mesure positive $\mu_y$ sur $X$, de support contenu dans $F^{-1}(y)$, de telle sorte que, pour toute fonction $\Phi$ continue à support compact sur $X$, la fonction $F_\Phi$ sur $Y$ définie par $F_\Phi(y) = \int \Phi \, d\mu_y$ soit continue et satisfasse à $\int F_\Phi \, dy = \int \Phi \, dx$. De plus, les $\mu_y$ sont des mesures tempérées ; et, pour tout $\Phi \in S(X)$, $F_\Phi$ est continu, appartient à $L^1(G)$, satisfait à $\int F_\Phi \, dy = \int \Phi \, dx$ et est la transformée de Fourier de $F_\Phi^*$.

PROPOSITION 2.- Soient $Y$ un groupe abélien localement compact, $\Delta$ un sous-groupe discret de $Y$ tel que $Y/\Delta$ soit compact, et $\Delta_*$ le sous-groupe discret de $Y^*$ qui correspond par dualité à $\Delta$. Soient $X$ un groupe abélien localement compact et $F$ une application continue de $X$ dans $Y$ satisfaisant à la condition suivante :

(B) quels que soient $\Phi \in S(X)$ et $y^* \in Y^*$, la série

$$\sum_{\delta^* \in \Delta_*} |F_\Phi^*(y^* + \delta^*)|$$

est convergente et elle l'est uniformément sur toute partie compacte de $S(X) \times Y^*$ .

Alors $F$ satisfait à la condition (A) de la proposition 1. De plus, si $F_\Phi$ désigne de nouveau la transformée de Fourier de la fonction $F_\Phi^*$ définie par (5), on a, pour toute fonction $\Phi \in S(X)$ ,

$$\sum_{\delta\in\Delta} F_\Phi(\delta) = \sum_{\delta^*\in\Delta_*} F_\Phi^*(\delta^*) \quad ,$$

les séries des deux membres étant absolument convergentes.

On applique d'abord la proposition 1 à l'application $F : X_v \to I_v$ . Soit $I^*$ le dual de $I$ et posons

$$F_\Phi^*(i^*) = \int_{X_v} \Phi(x)\, \chi_v([F(x),i^*])\, |dx|_v \qquad\qquad (i^* \in I_v^*) \ .$$

La condition (A) de la proposition 1 est satisfaite dans les cas suivants :

(a) $m \geq 3$ (b) $m \geq 2$ (c) $m \geq 1$ (d) $m \geq 2$ .

On a alors une famille de mesures $\mu_i$ sur $X_v$ de support contenu dans $F^{-1}(i)$ telle que

$$\int_{X_v} \Phi|dx|_v = \int_{I_v} |di|_v \int_{X_v} \Phi(x)\, d\mu_i(x) \ . \tag{6}$$

Utilisant la propriété d'unicité des $\mu_i$ on déduit aussitôt de la relation (6) qu'on a

$$d\mu_{\bar{a}ia}(gxa) = |g|_{X_v}\, |a|_{X_v}\, |a|_{I_v}^{-1}\, d\mu_i(x)$$

pour $g \in G_v$ , $a \in D_v^*$ ( $|a|_{I_v}$ désigne le module de la transformation $i \mapsto \bar{a}ia$ de $I_v$ , $|a|_{X_v}$ celui de la transformation $x \mapsto xa$ de $X_v$ ). En particulier, si $\bar{a}ia = i$ :

$$d\mu_i(gxa) = |g|_{X_v}\, |a|_{X_v}\, |a|_{I_v}^{-1}\, d\mu_i(x) \ . \tag{7}$$

Soit $A_i$ le groupe des éléments $a$ de $D_v^*$ tels que $\bar{a}ia = i$ . Alors $F^{-1}(i)$ est réunion d'un nombre fini d'orbites de $G_v \times A_i$ ; par conséquent, la mesure $\mu_i$ s'écrit comme somme de mesures respectivement portées par ces orbites et satisfaisant toutes à la même relation (7) que $\mu_i$ . Or, un calcul des modules des sous-groupes de stabilité de $G_v \times A_i$ montre que la seule orbite qui puisse porter une telle mesure est $U(i)$ .

D'autre part, si $X'$ est l'ensemble des points de $X$ où l'application $F : X \to I$ est submersive, on sait qu'il existe une jauge $\theta_i$ sur $X' \cap F^{-1}(i)$ telle que $\theta_i(x)$ coïncide au voisinage de chaque point $x_o$ de $X' \cap F^{-1}(i)$ avec la forme induite sur $X' \cap F^{-1}(i)$ par n'importe quelle forme différentielle $\eta(x)$ dans $X$ satisfaisant au voisinage de $\dot{x}_o$ à la relation $dx = \eta(x) \wedge dF(x)$ . Notation :

$$\theta_i(x) = \left(\frac{dx}{dF(x)}\right)_i \quad . \tag{8}$$

Quand on prend $k_v$ comme corps de base, ces jauges $\theta_i$ sont définies pour tout $i \in I_v$ , et on a

$$\int_{X_v'} \Phi \, |dx|_v = \int_{I_v} |di|_v \int_{X_v' \cap F^{-1}(i)} \Phi \, |\theta_i|_v$$

pour $\Phi$ continue à support compact dans $X_v'$ . Comme $U(i) \subset X'$ , on déduit de cette remarque et du fait que $\mu_i$ est portée par $U(i)$ que $\mu_i$ coïncide avec la mesure $|\theta_i|_v$ sur $U(i)_v$ $(i \in I_v)$ .

Considérons maintenant l'application adélique $F : X_A \to I_A$ . On veut lui appliquer les propositions 1 et 2. On pose

$$F_\Phi^*(i^*) = \int_{X_A} \Phi(x)\, \chi([F(x),i^*])\, |dx|_A \qquad (i^* \in I_A^*) . \tag{9}$$

La condition (B) de la proposition 2 est satisfaite dans les cas suivants :

(a) $m \geq 5$ (b) $m \geq 4$ (c) $m \geq 2$ (d) $m \geq 3$ .

Prenons pour $\Phi$ une fonction de la forme $\Phi(x) = \Pi\, \Phi_v(x_v)$ $(x = (x_v) \in X_A)$ , où $\Phi_v$ est une fonction de Schwartz-Bruhat sur $X_v$ pour tout $v$ , et où, pour presque tout $v$ , $\Phi_v$ est la fonction caractéristique de $X_v^o$ . On a évidemment

$$F_\Phi^*(i^*) = \prod_v F_{\Phi_v}^*(i_v^*) \qquad \text{pour } i^* = (i_v^*) \in I_A^* ,$$

d'où l'on déduit facilement que la transformée de Fourier $F_\Phi$ de $F_\Phi^*$ est le produit des transformées de Fourier $F_{\Phi_v}$ des $F_{\Phi_v}^*$ . Mais, d'après la proposition 1, on a

$$F_\Phi(i) = \int \Phi(x)\, d\mu_i(x) \qquad (i \in I_A)$$

où les $\mu_i$ sont des mesures sur $X_A$ . Cela montre que $\mu_i$ est le produit des mesures $|\theta_{i_v}|_v$ , si $i = (i_v) \in I_A$ . Comme $1$ est un système de facteurs de convergence pour $U(i)$ , on voit que $\mu_i = |\theta_i|_A$ si $i \in I_k$ . On obtient donc le résultat suivant.

PROPOSITION.- Soit $F_\Phi^*$ la fonction sur $I_A^*$ définie par (9) et soit $F_\Phi$ sa transformée de Fourier. Alors, on a

$$F_\Phi(i) = \int_{U(i)_A} \Phi |\theta_i|_A \qquad (i \in I_k) \tag{10}$$

où $\theta_i$ est la jauge sur $U(i)$ définie par (8). De plus, on a, pour toute fonction $\Phi$ de Schwartz-Bruhat sur $X_A$ ,

$$\sum_{i \in I_k} F_\Phi(i) = \sum_{i^* \in I_k^*} F_\Phi^*(i^*) , \tag{11}$$

les séries des deux membres étant absolument convergentes.

DÉFINITION.-

$$E(\Phi) = \sum_{i^* \in I_k^*} F_\Phi^*(i^*) + \Phi(0) \qquad (\Phi \in S(X_A)) .$$

E est une mesure tempérée positive sur $X_A$ possédant les propriétés d'invariance qu'on va énoncer. Tout d'abord, il est clair que $E(\Phi)$ ne change pas quand on remplace $\Phi(x)$ par :

1) $\Phi(\alpha x)$ avec $\alpha \in k^*$ ;

2) $\Phi(x)\chi([F(x),i^*])$ avec $i^* \in I_k^*$ .

Ensuite, on a

3) $E(\Phi) = E(\hat{\Phi})$ où $\hat{\Phi}$ est la transformée de Fourier de $\Phi$ (on identifie $X$ avec son dual au moyen de $F$ ). Pour le voir, on identifie $I^*$ à $I$ au moyen de la forme bilinéaire $\mathrm{trd}(xy)$ sur $D \times D$ . On a alors, pour $i \in I_k$ , $i \neq 0$ ,

$$\int_{X_A} \Phi(x)\, \chi([F(x),i])\,|dx|_A = \int_{X_A} \hat{\Phi}(x)\, \chi([F(x),-i^{-1}])\,|dx|_A$$

ce qui entraîne évidemment l'invariance de $E$ par transformation de Fourier.

4) $E(\Phi)$ ne change pas quand $\Phi(x)$ est remplacé par $\Phi(gx)$ , $g \in G_A$ .

THÉORÈME.- Soit $E'$ une mesure tempérée positive sur $X_A$ possédant les propriétés d'invariance énoncées ci-dessus et telle que $E' - E$ soit somme de mesures portées par les $U(i)_A$ pour $i \in I_k$ . Alors on a $E' = E$ .

C'est un cas particulier du théorème 4 de [7]. On ne reproduira pas la démonstration ici. Elle repose essentiellement sur une estimation de $E''(\Phi_t)$ , où $E'' = E' - E$ et où $\Phi_t(x) = \Phi(tx)$ ($x \in X_A$ , $t \in A^\times$ = groupe des idèles de $k$ ).

Le théorème entraîne la <u>formule de Siegel-Weil</u> :

$$E = I .$$

COROLLAIRE 1 (Principe de Hasse).- Si $U(i)_k$ est vide, $U(i)_A$ est vide.

COROLLAIRE 2 (Nombres de Tamagawa).- On a $\tau(H(i)) = \tau(G)$ pour tout $i \in I_k$ tel que $U(i)_k$ soit non vide.

Ces corollaires résultent immédiatement de la formule de Siegel-Weil lorsqu'on compare la définition de $E(\Phi)$ avec la formule (4) pour $I(\Phi)$ tenant compte des relations (10) et (11) et observant que $\theta_i$ et du ne diffèrent que par un facteur dans $k^*$ (puisqu'elles sont toutes les deux invariantes par $G$ ), qu'on a donc $|\theta_i|_A = |du|_A$ .

La même méthode s'applique dans le cas (d) quand on prend, au lieu de $G$ , le groupe réductif $\Gamma$ (qui a un système $\lambda$ de facteurs de convergence $\not\equiv 1$ ) et elle donne des résultats analogues.

La formule de Siegel-Weil est alors valable dans les conditions suivantes :

(a) $m \geq 5$ (b) $m \geq 4$ (c) $m \geq 2$ (d) $m \geq 3$ .

On en conclut, dans le cas (c), que $\tau(G) = 1$ pour $m \geq 1$ , dans les cas (a) et (b) que $\tau(G)$ est indépendant de $F$ et de $m$ ($m \geq 3$ dans le cas (a), $m \geq 2$ dans le cas (b)). Les isomorphismes canoniques pour $m = 3$ dans le cas (a) et pour $m = 2$ dans le cas (b) permettent de déterminer $\tau(G)$ dans ces cas : $\tau(G) = 2$ pour tous les groupes $G$ des types (a) et (b). Enfin, dans le cas (d), la formule de Siegel entraîne que $\tau_\lambda(\Gamma)$ est indépendant de $F$ et de $m$ ($m \geq 1$) . Si $D$ est commutatif, on a donc $\tau_\lambda(\Gamma) = \tau_\lambda(Z)$ , où $Z$ désigne le centre de $\Gamma$ . Pour $D$ non commutatif, j'ai démontré qu'on a $\tau_\lambda(\Gamma) = \tau_\lambda(Z)$ en étudiant la forme $F$ en deux variables d'indice 1 (la démonstration est compliquée, parce que $I(\Phi)$ et $E(\Phi)$ sont, pour cette forme $F$ , toutes les deux divergentes ; cf. [3]). On peut en déduire que $\tau(G) = 1$ pour tous les groupes $G$ de type (d) en utilisant le principe de Hasse pour $H^1(k,G)$ .

Il y a encore d'autres groupes classiques, à savoir les groupes de la forme $G = R_{K/k}(G')$ où $K$ est une extension finie de $k$ , où $G'$ est un groupe classique de l'un des types considérés ici défini sur $K$ , et où $R_{K/k}$ est l'opérateur de Weil qui associe à une variété affine définie sur K une variété définie sur k (voir [5], Chap. I). On a $G_k = G'_K$ et $G_A = G'_{A'}$, si A' désigne l'anneau des adèles de K, et le nombre de Tamagawa du k-groupe G est égal au nombre de Tamagawa du K-groupe G'.

## 6. Groupes exceptionnels.

Soit G le groupe des invariants de la forme cubique F d'une algèbre de Jordan simple exceptionnelle. On définit $I(\Phi)$ comme au paragraphe 3. La définition de $E(\Phi)$ est analogue à celle donnée, au paragraphe 5, pour les groupes classiques, mais il y a plus d'une orbite singulière, et par conséquent, il faut ajouter quelques termes supplémentaires correspondant aux orbites singulières. Dans la formule (9), $\chi([F(x),i^*])$ est maintenant un caractère cubique, dont je ne connais pas la transformée de Fourier. On peut, pourtant, démontrer la formule $E = I$ en estimant explicitement $E(\Phi_t)$ (sans démontrer de théorème d'unicité). Comme parmi les sous-groupes de stabilité figurent tous les groupes de type $F_4$ et certains groupes classiques, la relation $E = I$ donne le nombre de Tamagawa de G et celui des groupes de type $F_4$.

L'étude des autres groupes exceptionnels est laissée au lecteur.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] R. P. LANGLANDS - The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. Proc. Symp. Pure Math., vol. IX, A. M. S. (1966), 143-148.

[2] J. G. M. MARS - Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels. Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 97-140.

[3] J. G. M. MARS - Solution d'un problème posé par A. Weil. C. R. Acad. Sc. Paris, 266 (1968), 484-486.

[4] T. ONO - On the relative theory of Tamagawa numbers. Ann. of Math., 82 (1965), 88-111.

[5] A. WEIL - Adèles and algebraic groups. Institute for Advanced Study, Princeton (1961).

[6] A. WEIL - Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. Acta Math., 111 (1964), 143-211.

[7] A. WEIL - Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. Acta Math., 113 (1965), 1-87.

-:-:-:-