CLAUDE MORLET

Hauptvermutung et triangulation des variétés

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 362, p. 261-278

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__261_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 362 Juin 1969

HAUPTVERMUTUNG ET TRIANGULATION DES VARIÉTÉS

(d'après KIRBY, SIEBENMANN et aussi LEES, WALL, etc...)

par Claude MORLET

Poincaré posa le problème suivant : étant données deux variétés semi-linéaires (cf. [8]) V et V', supposons qu'il existe un homéomorphisme de V sur V', existe-t-il un isomorphisme (*) de V sur V' ? Ce problème est évidemment lié au suivant : toute variété topologique peut-elle être munie d'une structure semi-linéaire ?

Ces problèmes sont triviaux en dimension 1 . Ils furent d'abord résolus en dimension 2 , le second par Radó en 1924 (cf. [12]), le premier par Papakyriakopoulos en 1943 (cf. [11]). Ils furent résolus en dimension 3 par E. E. Moise (cf. [6]) en 1952. Tous ces travaux ne faisaient intervenir que des méthodes élémentaires ; les méthodes de la topologie différentielle moderne permirent d'abord de prouver un certain nombre de contre-exemples : Milnor montra que deux polyèdres peuvent être homéomorphes sans être isomorphes (cf. [7]). Ensuite, Sondow et Siebenmann montrèrent que deux couples (W_1, V_1) et (W_2, V_2) formés d'une variété et d'un sous-polyèdre qui est une variété (mais qui n'est pas une sous-variété localement plate) peuvent être homéomorphes sans être isomorphes (cf. [13]).

A la même époque les méthodes de Newman (cf. [10]) permirent de donner une solution positive de ces deux problèmes pour les variétés fermées qui ont le type d'homotopie de S^n (n grand). Un grand progrès fut fait en 1967 par Sullivan qui donna une solution du premier problème pour les variétés simplement connexes de dimension au moins 5 dont le quatrième groupe de cohomologie à valeur dans

(*) Pour simplifier les notations, je réserverai le nom d'isomorphisme pour désigner les homéomorphismes semi-linéaires.

$\underline{\underline{Z}}_2$ est nul (cf. [14]). Ce n'est que très récemment que Kirby et Siebenmann, utilisant une construction très astucieuse de Kirby (et aussi des résultats de Wall et Cernavskii), donnèrent une solution complète du problème en dimension au moins 5 . Ils donnèrent en particulier une réponse négative aux deux questions. Avant d'énoncer ces résultats, je vais donner quelques définitions.

I. La position du problème.

Une structure semi-linéaire sur une variété topologique V est, par définition, un couple $(\widetilde{V},\varphi)$, où $\widetilde{V}$ est une variété semi-linéaire et φ un homéomorphisme de $\widetilde{V}$ sur V . Deux structures semi-linéaires $(\widetilde{V}_1,\varphi_1)$ et $(\widetilde{V}_2,\varphi_2)$ sont dites identiques si $\varphi_2^{-1}\varphi_1 : \widetilde{V}_1 \to \widetilde{V}_2$ est un isomorphisme. On se propose d'étudier les classes d'équivalence de structures semi-linéaires sur V ; il y a plusieurs façons de définir cette équivalence : on peut dire que $(\widetilde{V}_1,\varphi_1)$ et $(\widetilde{V}_2,\varphi_2)$ sont équivalentes :

a) Si dans tout voisinage $\mathfrak{V}^{o}$ de $\varphi_2^{-1}\varphi_1$, il existe une isotopie d'homéomorphismes de $\widetilde{V}_1$ sur $\widetilde{V}_2$ qui joint $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ à un isomorphisme.

b) Si il existe une isotopie d'homéomorphismes de $\widetilde{V}_1$ sur $\widetilde{V}_2$ qui joint $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ à un isomorphisme.

c) Si $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est homotope à un isomorphisme.

d) Si il existe un isomorphisme de $\widetilde{V}_1$ sur $\widetilde{V}_2$.

On notera $PL(V)$ l'ensemble des classes modulo la relation b), et $\overline{PL}(V)$ l'ensemble des classes modulo la relation d).

Ces définitions ont une forme relative. Supposons que A soit un fermé de V et que l'on se soit donné une structure semi-linéaire sur un voisinage de A ;

on notera $PL(V \bmod \mathcal{V}(A))$ l'ensemble des structures semi-linéaires sur V qui coïncident sur un voisinage de A avec la structure donnée, modulo la relation : $(\tilde{V}_1, \varphi_1)$ et $(\tilde{V}_2, \varphi_2)$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est isotope à un isomorphisme parmi les homéomorphismes de $\tilde{V}_1$ sur $\tilde{V}_2$ qui sont semi-linéaires sur un voisinage de $\varphi_1^{-1}(A)$. On notera $\overline{PL}(V \bmod \mathcal{V}(A))$ l'ensemble des classes modulo la relation : il existe un isomorphisme de $\tilde{V}_1$ sur $\tilde{V}_2$ dont la restriction à un voisinage A est semi-linéairement isotope à $\varphi_2^{-1}\varphi_1$.

On appellera Hauptvermutung le problème suivant : pour une variété V et un fermé A de V, l'ensemble $PL(V \bmod \mathcal{V}(A))$ est-il un ensemble à un seul élément ?

Il est trivialement vrai pour $\dim V = 1$; il a été résolu positivement pour $\dim V = 2$ et $\dim V = 3$. On va voir que pour $\dim V \geq 5$, $PL(V \bmod \mathcal{V}(A))$ peut être vide, et que s'il n'est pas vide il peut avoir plusieurs éléments.

<u>Remarque</u>.- Pour toute variété V, tout fermé A de V et toute structure semi-linéaire $(\tilde{V}, \varphi)$ dans $PL(V \bmod \mathcal{V}(A))$, si on note $\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A))$ (resp. $\mathrm{Aut}(\tilde{V} \bmod \mathcal{V}(A))$) l'ensemble semi-simplicial engendré par les homéomorphismes de V (resp. des automorphismes de V) qui sont l'identité sur un voisinage de A (i.e. : celui qui est noté Aut_I dans [9]), on a la suite exacte :

$$\pi_i(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A))) \to \pi_i(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A)), \mathrm{Aut}(\tilde{V} \bmod \mathcal{V}(A))) \to$$
$$\pi_{i-1}(\mathrm{Aut}(\tilde{V} \bmod \mathcal{V}(A))) \to \dots \to \pi_1(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A)), \mathrm{Aut}(\tilde{V} \bmod \mathcal{V}(A)))$$
$$\to \pi_0(\mathrm{Aut}(\tilde{V} \bmod \mathcal{V}(A))) \to \pi_0(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A))) \to PL(V \bmod \mathcal{V}(A)) \to$$
$$\overline{PL}(V \bmod \mathcal{V}(A)) \to 0 .$$

II. Les résultats de Siebenmann et Kirby.

Avant de les énoncer, je vais donner une définition. Soit X un polyèdre et ξ un microfibré (*) topologique (de dimension n) de base X ; une structure semi-linéaire sur ξ est la donnée d'un couple $(\tilde{\xi},\alpha)$, où $\tilde{\xi}$ est un microfibré semi-linéaire de base X et α un isomorphisme de microfibrés topologiques de $\tilde{\xi}$ sur ξ. Si Y est un fermé de X et si on s'est donné une structure semi-linéaire (η,β) sur la restriction de ξ à un voisinage de Y, on considèrera les structures semi-linéaires sur ξ qui coïncident avec (η,β) sur un voisinage de Y. On notera $PL(\xi \bmod \mathcal{V}(Y))$ l'ensemble des classes d'équivalence de ces structures modulo la relation : $(\tilde{\xi}_1,\alpha_1)$ est équivalent à $(\tilde{\xi}_2,\alpha_2)$ si et seulement si $\alpha_2^{-1}\alpha_1 : \tilde{\xi}_1 \to \tilde{\xi}_2$ est homotope à un isomorphisme semi-linéaire parmi les isomorphismes de microfibrés topologiques de $\tilde{\xi}_1$ dans $\tilde{\xi}_2$ qui sont semi-linéaires au voisinage de Y. Il est clair que si l'on note $[\xi]$ l'application classifiante de X dans $BTop_n$ associée à ξ, une structure semi-linéaire sur ξ définit un relèvement de $[\xi]$ dans BPL_n ; ceci définit une bijection de $PL(\xi \bmod \mathcal{V}(Y))$ sur les classes d'homotopie de relèvements de $[\xi]$ dans BPL_n qui coïncident avec $[\eta]$ sur un voisinage de Y. Par extension, si X est un espace topologique quelconque, si ξ est un microfibré topologique de base X, Y un fermé de X et $[\eta]$ un relèvement de $[\xi]$ dans BPL_n défini au voisinage de Y, on note $PL(\xi \bmod \mathcal{V}(Y))$ les classes d'homotopie des relèvements de $[\xi]$ dans BPL_n qui coïncident avec $[\eta]$ sur un voisinage de Y.

Si Y est une variété topologique et $\tilde{V} \to V$ une structure semi-linéaire

---

(*) Pour la définition des microfibrés, cf. [8] et [3].

sur V , on a un diagramme commutatif ($\tau(\widetilde{V})$ et $\tau(V)$ étant les microfibrés tangents) :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{V} \arrow[r, "{[\tau(\widetilde{V})]}"] \arrow[d, "\varphi"'] & BPL_n \arrow[d] \\ V \arrow[r, "{[\tau(V)]}"'] \arrow[ur, "{[\tau(\widetilde{V})]\varphi^{-1}}"] & BTop_n \end{tikzcd}$$

donc $[\tau(\widetilde{V})]\varphi^{-1}$ est une structure semi-linéaire sur $\tau(V)$; ceci définit pour toute variété V , tout fermé A de V et toute structure semi-linéaire sur un voisinage de A dans V , une application :

$$PL(V \bmod \mathcal{V}(A)) \rightarrow PL(\tau(V) \bmod \mathcal{V}(A)) .$$

Nota.- Si A ne contient pas dV , les structures semi-linéaires que l'on considère sur $\tau(V)$ sont celles dont la restriction à dV est induite par une structure semi-linéaire sur $\tau(dV)$.

Le premier théorème démontré par Kirby et Siebenmann s'énonce :

THÉORÈME 1.- *L'application naturelle*

$$PL(V \bmod \mathcal{V}(A)) \rightarrow PL(\tau(V) \bmod \mathcal{V}(A))$$

est une bijection si $\dim V \neq 4$.

COROLLAIRE 1.- *Toute variété topologique compacte a le type d'homotopie d'un complexe fini.*

On sait en effet que si on plonge une variété topologique V dans $\underline{\underline{R}}^N$, pour N assez grand, le plongement a un fibré en boules fermées normal W . Ce fibré en boules fermées est une variété compacte qui a le type d'homotopie de V et dont le microfibré tangent est trivial, il peut donc être muni d'une structure semi-linéaire, W également, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2.- Soient V_1 et V_2 des variétés semi-linéaires de dimension n, W_1 et W_2 des variétés semi-linéaires de dimension $n-1$, et $f_1 : W_1 \to dV_1$ et $f_2 : W_2 \to dV_2$ des plongements qui induisent des équivalences d'homotopie de W_1 sur V_1 et de W_2 sur V_2. S'il existe un homéomorphisme de $(V_1, f_1(W_1))$ sur $(V_2, f_2(W_2))$, les torsions de f_1 et de f_2 ($\in Wh(\pi_1(V_1))$) sont égales.

En effet, par un argument analogue à celui qui a permis de démontrer le corollaire 1, on se ramène au cas où tous les fibrés tangents sont triviaux. L'homéomorphisme $h : V_1 \to V_2$ correspond, d'après le théorème 1, à une application de V_1 dans BPL_n qui relève l'application classifiante du microfibré topologique tangent à V_1 ; comme ce microfibré tangent est trivial, le relèvement apparaît comme une application α de V dans Top_n/PL_n. L'image de α dans BPL_n est homotope à l'application constante, puisque c'est l'application classifiante du microfibré semi-linéaire $\tau(V_1) - h^*\tau(V_2)$; donc α provient d'une application β de V dans Top_n. Cette application définit un automorphisme du microfibré topologique $V_1 \times \underline{\underline{R}}^n$, donc aussi un automorphisme γ du fibré topologique en boules fermées $V_1 \times D^{n+1}$. Considérons alors l'homéomorphisme composé

$$V_1 \times D^{n+1} \times D^N \xrightarrow{\gamma^{-1} \times Id} V_1 \times D^{n+1} \times D^N \xrightarrow{h \times Id} V_2 \times D^{n+1} \times D^N .$$

Par construction de γ, pour N assez grand, son image dans $PL(\tau(V_1 \times D^{n+N+1}))$ est la même que celle de l'application identique, donc, d'après le théorème 1, il est isotope à un isomorphisme. On voit facilement que cet isomorphisme envoie $W_1 \times D^{n+N+1}$ sur $W_2 \times D^{n+N+1}$; d'où le corollaire.

Remarque.- Ce résultat est assez curieux ; en effet il devient faux si l'on remplace V_1 , V_2 , W_1 et W_2 par des polyèdres (cf. [7]) ; il est également faux dans le cas relatif (non localement plat) en codimension 2 (cf. [13]).

Si l'on tient compte de la remarque qui termine le I, pour toute variété topologique V , toute structure semi-linéaire $(\widetilde{V},\varphi)$ sur V et tout fermé A de V , le théorème 1 donne une "majoration" de $\pi_0(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A)),\mathrm{Aut}(\widetilde{V} \bmod \mathcal{V}(A)))$. En utilisant une méthode que j'ai employée dans [9] pour lisser les automorphismes semi-linéaires, je peux démontrer le

THÉORÈME 1 bis.- *Pour toute variété topologique* V , *toute structure semi-linéaire* $(\widetilde{V},\varphi)$ *sur* V , *et tout fermé* A *de* V , *l'application naturelle* :

$$\pi_i(\mathrm{Aut}(V \bmod \mathcal{V}(A)),\mathrm{Aut}(\widetilde{V} \bmod \mathcal{V}(A)))$$
$$\downarrow$$
$$\pi_i(\mathrm{Aut}(\tau(V) \bmod \mathcal{V}(A)),\mathrm{Aut}(\tau(\widetilde{V}) \bmod \mathcal{V}(A)))$$

est un isomorphisme pour tout $i > 0$, *si* $\dim V \neq 4$. [$\mathrm{Aut}(\tau(V) \bmod \mathcal{V}(A))$ (resp. $\mathrm{Aut}(\tau(\widetilde{V}) \bmod \mathcal{V}(A))$) désignant l'ensemble semi-simplicial des automorphismes du microfibré topologique $\tau(V)$ (resp. du microfibré semi-linéaire $\tau(\widetilde{V})$) qui sont l'identité sur un voisinage de A .]

Le second théorème démontré par Kirby et Siebenmann est le

THÉORÈME 2.- *Pour tout* $n \geq 5$, *il existe une équivalence d'homotopie*, *compatible avec la stabilisation* :

$$\mathrm{Top}_n/\mathrm{PL}_n \rightarrow K(\mathbb{Z}_2,3) .$$

COROLLAIRE 1.- *La seule obstruction à munir une variété topologique* V *de dimension au moins* 6 (*au moins* 5 *si elle est sans bord*) *d'une structure semi-*

linéaire est un élément de $H^4(V, \underline{\underline{Z}}_2)$.

COROLLAIRE 2.- Pour toute variété V de dimension au moins 6 (au moins 5 si elle est sans bord) qui possède une structure semi-linéaire, $PL(V) = H^3(V, \underline{\underline{Z}}_2)$.

COROLLAIRE 3.- Pour toute variété topologique V de dimension au moins 6 (au moins 5 si elle est sans bord), et toute structure semi-linéaire $(\tilde{V}, \varphi)$ sur V, on a pour tout $i > 0$ un isomorphisme $\pi_i(\mathrm{Aut}(V), \mathrm{Aut}(\tilde{V})) = H^{3-i}(V, \underline{\underline{Z}}_2)$.

Remarques.- 1) En fait dans le théorème 1, on démontrera que si deux structures semi-linéaires $(\tilde{V}_1, \varphi_1)$ et $(\tilde{V}_2, \varphi_2)$ sur V ont la même image dans $PL(\tau(V))$, elles sont équivalentes au sens a). Comme, d'autre part, l'image de $(\tilde{V}, \varphi)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de φ , les trois relations d'équivalence a), b) et c) sont identiques.

2) Du théorème 2, on déduit immédiatement que, pour i différent de 2 et de 3 , $\pi_i(\mathrm{Top}) = \pi_i(\mathrm{PL})$. On peut montrer que $\pi_2(\mathrm{Top}) = \pi_2(\mathrm{PL})$, et que $\pi_3(\mathrm{Top}) = \pi_3(\mathrm{PL}) \oplus \pi_3(\mathrm{Top}/\mathrm{PL}) = \underline{\underline{Z}} \oplus \underline{\underline{Z}}_2$.

3) Il existe des variétés topologiques qui ne possèdent aucune structure semi-linéaire. Par exemple, un microfibré de dimension $n \geq 5$ et de base S^4 , qui correspond à un élément de $\pi_3(\mathrm{Top}_n)$ qui n'est pas dans l'image de $\pi_3(\mathrm{PL}_n)$. Cette variété n'est pas compacte ; mais on peut construire une variété de dimension 6 , ayant le type d'homotopie de $S^4 \times S^2$ et qui n'admet aucune structure semi-linéaire.

III. Les démonstrations.

Elles reposent sur l'étude du problème suivant : Soient V une variété semi-linéaire de dimension n, et f un homéomorphisme de $D^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sur un ouvert de V (ce qu'on appellera dans la suite un plongement de $D^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans V) qui est semi-linéaire sur un voisinage de $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$. Existe-t-il une isotopie f_t de tels plongements telle que f_t et f coïncident au voisinage de $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$ et hors d'un compact, que $f_o = f$ et que f_1 soit semi-linéaire au voisinage de $D^k \times \{0\}$?

Démonstration du théorème 1.

C'est une conséquence immédiate du

LEMME 1.- *Soit* (V,f) *un problème comme ci-dessus, il a une solution si et seulement si l'élément* $\hat{f} \in \pi_k(\mathrm{Top}_n, \mathrm{PL}_n)$ *donné par l'application tangente à* f, *est nul, si* $n \neq 4$. *De plus, pour tout* $\alpha \in \pi_k(\mathrm{Top}_n, \mathrm{PL}_n)$, *il existe un couple* (V,f) *tel que* $\hat{f} = \alpha$.

Pour démontrer ce lemme, j'utiliserai les deux théorèmes suivants démontrés par Lees dans [5]. On remarquera que le théorème 4 résulte du théorème 3 par un argument classique. On trouvera des indications sur la démonstration du théorème 3 à la fin de cet exposé.

THÉORÈME 3.- *Soient* V *une variété topologique,* K *un compact de* V *et* U *un voisinage de* K ; *pour tout plongement* $f : \Delta_p \times U \to \Delta_p \times V$ *commutant avec la projection sur* Δ_p, *il existe un automorphisme* $g : \Delta_p \times V \to \Delta_p \times V$ *qui est l'identité hors d'un compact et commute avec la projection sur* Δ_p, *et tel que* f *et* g *coïncident sur un voisinage de* $\Delta_p \times K$.

THÉORÈME 4.- Soit V une variété topologique de dimension n, et soit W l'intérieur d'une variété compacte connexe à bord (i.e. dont le bord est non vide) de dimension n ; alors le passage à l'application tangente donne une équivalence d'homotopie de l'ensemble semi-simplicial des immersions de W dans V sur l'ensemble semi-simplicial des applications fibrées de $\tau(W)$ dans $\tau(V)$. (*)

Ce théorème 4 entraîne évidemment la seconde assertion du lemme 1, et prouve que dans la première la condition $\hat{f} = 0$ est nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, on remarque d'abord que, grâce au théorème 3, on n'a pas à s'occuper de la condition " $f_t = f$ hors d'un compact ". D'après le théorème 4, si $\hat{f} = 0$, il existe un 1-simplexe $F : I \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k} \to I \times V$ de l'espace des immersions de $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ dans V qui coïncident avec f sur un voisinage de $S^{k-1} \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$, qui joint f à une immersion semi-linéaire. On peut alors trouver une suite de points $0 = t_o < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ dans I, telle que, quel que soit $i < n$, il existe un plongement

$$\varphi_i : [t_i, t_{i+1}] \times D^k \times B^{n-k} \to [t_i, t_{i+1}] \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$$

(B^{n-k} = boule ouverte = intérieur de D^{n-k}) qui commute avec la projection sur $[t_i, t_{i+1}]$, et est l'identité sur un voisinage de $[t_i, t_{i+1}] \times S^{k-1} \times B^{n-k}$, et tel que, quel que soit t, $F_t | D^k \times B^{n-k} = F_{t_i} \varphi_{i,t}$. Il suffit donc de démontrer le

LEMME 2.- Soit $F : I \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k} \to I \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ un 1-simplexe de l'espace des immersions de $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ dans lui-même qui sont l'identité sur un voisinage de $S^{k-1} \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$. On suppose que $F | I \times D^k \times B^{n-k}$ est un plongement. S'il existe une isotopie de plongements g_θ de $D^k \times B^{n-k}$ dans $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$, qui joint l'identité à un plongement g_1 tel que $(F | \{1\} \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}) g_1$ soit semi-linéaire et si $n \neq 4$; il

(*) W étant semi-linéaire.

<u>existe une isotopie parmi les plongements de</u> $D^k \times B^{n-k}$ <u>dans</u> $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ <u>qui sont l'identité au voisinage de</u> $S^{k-1} \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$, <u>qui joint</u> $F|\{0\} \times D^k \times B^{n-k}$ <u>à un plongement semi-linéaire</u>.

Ce lemme est évident si l'image de g_θ $(0 \leq \theta \leq 1)$ est dans $D^k \times B^{n-k}$; si non on s'y ramène grâce au

LEMME 3.- <u>Soient</u> W <u>une variété semi-linéaire et</u> h <u>un homéomorphisme de</u> W <u>sur</u> $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ $(n \neq 4)$. <u>Soit</u> $W' = h^{-1}(D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k})$. <u>Il existe un plongement semi-linéaire de</u> W <u>dans lui-même, isotope à l'identité parmi les plongements semi-linéaires qui sont l'identité sur un voisinage de</u> $h^{-1}(D^k \times \{0\})$ <u>et dont l'image est</u> W' .

Ce lemme est une conséquence facile de la théorie de l'engulfing topologique (cf. [10]) si $n \geq 5$, et des résultats de Newman si $n \leq 3$.

<u>Démonstration du théorème 1 bis.</u>

Pour démontrer le théorème 1 bis, en utilisant les théorèmes 3 et 4 et le lemme 3, on démontre de façon analogue le

LEMME 1 bis.- <u>Soit</u> X <u>l'ensemble semi-simplicial dont les</u> p-<u>simplexes sont les plongements</u> $f : \Delta_p \times D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k} \to \Delta_p \times V$ <u>qui commutent avec la projection sur</u> Δ_p <u>et sont semi-linéaires sur un voisinage de</u> $\Delta_p \times S^{k-1} \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$; <u>soit</u> Y <u>le sous-ensemble de</u> X <u>formé des plongements semi-linéaires. L'application naturelle de</u> X/Y <u>dans</u> $\Omega^k(Top_n, PL_n)$ <u>induit un isomorphisme sur les</u> π_i <u>pour</u> $i > 0$, <u>et</u> (d'après le lemme 1) <u>une injection sur les</u> π_0 <u>si</u> $n \neq 4$.

<u>Démonstration du théorème 2.</u>

Elle repose sur le résultat suivant, dû à C. T. C. Wall (cf. [15] et [4]) et dont la démonstration utilise les méthodes de la chirurgie pour les variétés non simplement connexes.

THÉORÈME 5.- Soit T^n le tore à n dimensions ; considérons les couples (V,φ) où V est une variété semi-linéaire et φ une application de V sur $D^k \times T^n$ qui est un isomorphisme d'un voisinage de dV sur un voisinage de $S^{k-1} \times T^n$, et qui est une équivalence d'homotopie parmi les applications qui sont des isomorphismes au voisinage des bords ; deux couples (V,φ) et (V',φ') seront considérés comme équivalents si il existe un isomorphisme f de V sur V' tel que φ et $\varphi'.f$ coïncident au voisinage de dV et soient homotopes parmi les applications qui possèdent cette propriété. Notons $\theta_k(T^n)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Alors, pour $n + k \geq 5$, il existe une bijection de $\theta_k(T^n)$ sur $H^{3-k}(T^n, \underline{\underline{Z}}_2)$, naturelle par rapport aux revêtements.

Ce résultat étant supposé connu, on reprend le problème posé ci-dessus. Soit (V,f) sa donnée. Soit ψ un isomorphisme de $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$ sur $D^k \times B^{n-k}$; on pose $g = f.\psi$. Considérons une immersion semi-linéaire j de $D^k \times (T^{n-k} - D^{n-k})$ (produit de D^k par un tore troué, qui est une variété ouverte parallélisable) dans $D^k \times \underline{\underline{R}}^{n-k}$; gj est une immersion topologique (semi-linéaire au voisinage du bord) ; elle définit une structure semi-linéaire $W \xrightarrow{\eta} D^k \times (T^{n-k} - D^{n-k})$ qui coïncide avec la structure naturelle au voisinage du bord. Si $n \geq 6$, d'après [3], on peut compléter la variété semi-linéaire W en une variété à bord en ajoutant un morceau de bord isomorphe à $D^k \times S^{n-1}$. Si $n = 5$, on peut faire la même opération en utilisant le lemme 3 et le fait que toute variété semi-linéaire qui a le type d'homotopie de $S^4 \times S^1$, est isomorphe à $S^4 \times S^1$ (cf. [1]). La variété ainsi complétée se complète elle-même en une variété semi-linéaire X, homéomorphe (par un homéomorphisme φ qui prolonge η

et est semi-linéaire au voisinage du bord) à $D^k \times T^{n-k}$.

Hypothèse : Il existe un isomorphisme φ_1 de X sur $D^k \times T^{n-k}$, homotope à φ parmi les applications qui coïncident avec φ au voisinage du bord.

Si cette hypothèse est vérifiée, en passant aux revêtements universels, on obtient un isomorphisme $\widetilde{\varphi}_1$ de $\widetilde{X}$ sur $D^k \times \mathbb{R}^n$; et il existe une constante M telle que, pour tout point x dans $\widetilde{X}$, $d(\widetilde{\varphi}(x),\widetilde{\varphi}_1(x)) \leq M$ (d étant la distance ordinaire sur $D^k \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^n$) ; donc l'application f_1 de $D^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans V , définie par $f_1(x) = f(x)$ si $x \notin D^k \times B^{n-k}$ et par $f_1(x) = g.\widetilde{\varphi}^{-1}.\widetilde{\varphi}_1.\psi^{-1}(x)$ si $x \in D^k \times B^{n-k}$, est continue donc c'est un homéomorphisme de $D^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sur son image ; elle est semi-linéaire sur $D^k \times B^{n-k}$; elle coïncide avec f sur un voisinage du bord et hors d'un compact, et est isotope à f parmi les plongements de $D^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans V qui possèdent ces propriétés (car l'espace des homéomorphismes de D^n modulo son bord est contractile). Le problème posé est donc résolu. On remarquera d'ailleurs que pour le résoudre il suffit de vérifier l'hypothèse plus faible :

Hypothèse faible : Dans un certain revêtement d'ordre fini de $D^k \times T^{n-k}$ et de X , φ devient homotope à un isomorphisme.

Or, d'après le théorème 5, la première hypothèse est vérifiée si $n > k > 3$, et l'hypothèse faible l'est si $k < 3$. Pour $k = 3$, on a une obstruction dans $H^o(T^{n-k},\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$; on vérifie facilement que cette obstruction définit une injection de $\pi_3(\mathrm{Top}_n,\mathrm{PL}_n)$ dans $\mathbb{Z}_2$, compatible avec la stabilisation. Pour $k \geq n$, $\pi_k(\mathrm{Top}_n,\mathrm{PL}_n) = 0$ à cause du théorème 1 bis et du fait que l'espace des homéomorphismes de D^n modulo son bord est contractile.

Il reste à montrer que $\pi_3(Top_n, PL_n)$ n'est pas nul. S'il était nul, d'après le théorème 1 bis, pour toute variété topologique V et toute structure semi-linéaire $(\widetilde{V},\varphi)$ sur V, on aurait : $\pi_o(Aut(\widetilde{V})) = \pi_o(Aut(V))$. Ceci est faux pour $\widetilde{V} = T^n$; en effet, le groupe, modulo pseudo-isotopie, des automorphismes de T^n, s'identifie à $\theta_1(T^n) = H^2(T^n, \underline{\underline{Z}}_2)$. Pour tout entier p, on note T^n_p le revêtement de T^n correspondant au sous-groupe $pZ \oplus \dots \oplus pZ \subset Z \oplus \dots \oplus Z = \pi_1(T^n)$. Soit h un automorphisme de T^n qui donne un élément non nul de $\theta_1(T^n)$; d'après le théorème 5, pour tout p impair, le relèvement $h_p : T^n_p \to T^n_p$ de h définit un élément non nul de $\theta_1(T^n_p) = \theta_1(T^n)$; donc, pour p impair, h_p n'est pas semi-linéairement isotope à l'identité. Mais si p tend vers l'infini, h_p tend (au sens C^o) vers l'identité, donc, puisque le groupe des homéomorphismes d'une variété compacte est un espace contractile (pour la topologie C^o) (cf. [2]), pour p assez grand, h_p est topologiquement isotope à l'identité. Ce qui prouve qu'il existe un isomorphisme de T^n qui est topologiquement isotope à l'identité, mais pas semi-linéairement isotope à l'identité ; donc $\pi_3(Top_n, PL_n) \neq 0$.

Remarque.- Pour $n = 1$, 2 ou 3, les arguments ci-dessus (et les résultats de Moïse) montrent que $\pi_i(Top_n, PL_n) = 0$ pour tout i.

Démonstration du théorème 3.

On peut toujours supposer que K est un polyèdre ; on fait alors une récurrence sur le nombre des simplexes d'une triangulation de K en utilisant le

LEMME 4.- Soit $h : \Delta_p \times \underline{\underline{R}}^n \to \Delta_p \times \underline{\underline{R}}^n$ un homéomorphisme qui est l'identité sur un voisinage du bord. Alors, si h est assez voisin de l'identité (au sens de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact), il existe un homéomorphisme $k : \Delta_p \times \underline{\underline{R}}^n \to \Delta_p \times \underline{\underline{R}}^n$ qui est l'identité au voisinage du bord et hors d'un compact, et qui est égal à h au voisinage de $\Delta_p \times \{0\}$. De plus, on peut choisir k de façon que la correspondance qui, à h, associe k soit continue dans un voisinage de l'identité.

Pour démontrer ce lemme, on utilise la construction qui a servi à démontrer le théorème 2. On se ramène ainsi à démontrer que si H est un plongement de $\Delta_p \times T^n - D^{n+p}$ (où D^{n+p} est une boule fermée intérieure à $\Delta_p \times D^n$) dans $\Delta_p \times T^n$, assez voisin de l'injection naturelle, et égal à cette injection sur un voisinage du bord, il existe un automorphisme de $\Delta_p \times T^n$ qui coïncide avec H sur un compact (choisi à l'avance) de $\Delta_p \times T^n - D^{n+p}$; et que l'on peut choisir cet automorphisme de façon qu'il dépende continûment de H. Ceci se fait par un procédé classique en diminuant pas à pas le rayon du disque D^{n+p} que l'on a enlevé.

-:-:-:-

D'après un papier de R. C. Kirby et L. C. Siebenmann qui s'intitule "On the triangulation of manifolds and the Hauptvermutung", et d'après une lettre de Siebenmann à Wall.

Tout ceci n'est qu'une petite partie des résultats que donne la construction de Kirby. Citons quelques-uns de ces autres résultats :

a) Toute variété topologique de dimension au moins 6 admet une présentation par anses - d'où le théorème de Smale. Par contre, il existe une variété de dimension 4 n'admettant pas de présentation par anses.

b) On peut définir pour tout plongement topologique $f : W \to V$ (localement plat et de codimension au moins 3) une notion de pseudofibré normal ; on en déduit des théorèmes de transversalité topologiques en codimension au moins 3.

c) Pour tout couple de variétés semi-linéaires (W,V) l'espace des plongements semi-linéaires de W dans V et l'espace des plongements topologiques (localement plats, ...) de W dans V ont même type d'homotopie ; en particulier, tout plongement topologique peut être approché par un plongement semi-linéaire. (On suppose que $\dim V - \dim W \geq 3$.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BROWDER and J. LEVINE - Fibering a manifolds over a circle, Comment. Math. Helv., vol. 40 (1965), p. 153-160.

[2] A. V. CERNAVSKII - Local contractibility of groups of homeomorphisms of a manifold, Soviet. Math., vol. 9 (1968), p. 1171-1174.

[3] A. GRAMAIN - L'invariance topologique des classes de Pontrjagin rationnelles, Sém. Bourbaki, 1965/66, n° 304.

[4] W. C. HSIANG and J. L. SHANESON - Fake tori, the annulus conjecture and the conjecture of Kirby, (à paraître).

[5] J. A. LEES - Immersions and surgery of topological manifolds, (à paraître).

[6] E. E. MOÏSE - Affine structure in 3-manifolds, Ann. of Math., vol. 56 (1952), p. 96-114.

[7] B. MORIN - Un contre-exemple de Milnor à la Hauptvermutung, Sém. Bourbaki, 1961/62, n° 226.

[8] C. MORLET - Microfibrés et structure différentiables, Sém. Bourbaki, 1963/64, n° 263.

[9] C. MORLET - Plongements et automorphismes de variétés, Notes du cours Peccot (miméographié).

[10] M. H. A. NEWMAN - The engulfing theorem for topological manifolds, Ann. of Math., vol. 84 (1966), p. 555-571.

[11] PAPAKYRIAKOPOULOS - A new proof of the invariance of the homology groups of a complex, Bull. Soc. Math. Grèce, vol. 22 (1943), p. 1-154.

[12] RADÓ - Uber den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Univ. Szeged, vol. 2 (1924/1926), p. 101-121.

[13] J. SONDOW and L. C. SIEBENMANN - Some homeomorphic sphere pairs that are combinatorially distinct, Comment. Math. Helv., (1966/67) vol. 41, p. 261-272.

[14] D. P. SULLIVAN - On the Hauptvermutung for manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 63 (1967), p. 598-600.

[15] C. T. C. WALL - Surgery of compact manifolds, (à paraître).