SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PIERRE CARTIER

Relèvements des groupes formels commutatifs

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 359, p. 217-230

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__217_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 359 Juin 1969

RELÈVEMENTS DES GROUPES FORMELS COMMUTATIFS

par Pierre CARTIER

Rappelons d'abord la définition d'une loi de groupe formel à un paramètre sur un anneau commutatif A ; c'est une série formelle $F(X,Y)$ en deux variables X et Y et à coefficients dans A, qui satisfait aux relations $F(X,0) = F(0,X) = X$ et $F(X,F(Y,Z)) = F(F(X,Y),Z)$; on dit que la loi de groupe F est commutative si l'on a $F(X,Y) = F(Y,X)$. Si F est une loi de groupe formel, on définit par récurrence des séries $H_r(X)$ comme suit : $H_0(X) = 0$ et $H_{r+1}(X) = F(X,H_r(X))$ pour $r \geq 0$. Enfin, si F et F' sont deux lois de groupes formels, un isomorphisme de F avec F' est une série formelle $\varphi(X) = aX + bX^2 + \ldots$ telle que a soit inversible dans A et que l'on ait $\varphi(F(X,Y)) = F'(\varphi(X),\varphi(Y))$.

On a des résultats précis sur la structure des groupes formels à un paramètre sur un corps k. Tout d'abord, si k est de caractéristique 0, toute loi de groupe formel sur k est isomorphe à la loi additive $F_a(X,Y) = X + Y$. Supposons maintenant que k soit de caractéristique $p > 0$; on démontre d'abord que toute loi de groupe formel $F(X,Y)$ sur k est commutative. De plus, ou bien F est isomorphe à la loi additive F_a, ou bien il existe un entier $h \geq 1$ tel que $H_p(X) = aX^{p^h} + bX^{p^{h+1}} + \ldots$ avec $a \neq 0$; cet entier h est la hauteur de F. On convient qu'une loi de groupe isomorphe à F_a est de hauteur infinie. Si le corps k est algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, les lois de groupes formels sur k sont classifiées par leur hauteur. Tous ces résultats sont dus à

Lazard [5].

Depuis quelques années, on a beaucoup étudié les lois de groupes formels commutatifs sur un anneau de valuation discrète A, complet et de caractéristique 0 (Lubin, Tate, Serre) ; le problème de la classification sur un tel anneau est beaucoup moins avancé que dans le cas d'un corps de base. Une des manières de l'aborder est par l'étude des relèvements. Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de A et $k = A/\underline{m}$ le corps des restes de A ; nous supposons k parfait de caractéristique $p > 0$. Soit alors $\bar{F}(X,Y)$ une loi de groupe formel sur k ; relever $\bar{F}$, c'est trouver une loi de groupe formel commutatif $F(X,Y)$ sur A qui se réduise modulo $\underline{m}$ en $\bar{F}(X,Y)$. Un problème voisin est celui des déformations en caractéristique p de la loi $\bar{F}(X,Y)$; une déformation est une série formelle $F(X,Y ; t_1,\ldots,t_r)$ à coefficients dans k qui soit une loi de groupe formel commutatif sur l'anneau $k[[t_1,\ldots,t_r]]$ et telle que $F(X,Y ; 0,\ldots,0) = \bar{F}(X,Y)$.

Une formulation commune des deux problèmes est la suivante. On suppose donnés un corps k parfait de caractéristique $p > 0$, une loi de groupe formel $\bar{F}(X,Y)$ sur k de hauteur finie $h \geq 1$, et un anneau local A, d'idéal maximal $\underline{m}$, de corps des restes $k = A/\underline{m}$, séparé et complet (pour la topologie $\underline{m}$-adique). On cherche les lois de groupes formels commutatifs (nous ne considérerons dans la suite que le cas commutatif, et nous n'éprouverons plus le besoin de le rappeler explicitement) sur l'anneau A qui se réduisent modulo $\underline{m}$ en $\bar{F}$. On dit que deux relèvements F_1 et F_2 de $\bar{F}$ à A sont <u>équivalents</u> s'il existe un isomorphisme $\varphi(X)$ de F_1 avec F_2 tel que $\varphi(X) \equiv X \mod \underline{m}$.

Lubin et Tate ont donné dans [6] une classification complète des relèvements à équivalence près. Notre présentation de leurs résultats est un peu différente

de la leur, et se prête mieux aux généralisations. Soit Λ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k ; c'est un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique 0 , de corps des restes k , et dont l'idéal maximal est engendré par p . D'après le théorème de Cohen, l'anneau local A étant comme plus haut, il existe un homomorphisme local de Λ dans A et un seul qui induise l'identité sur le corps des restes k . On peut donc considérer A comme une Λ-algèbre et substituer des éléments de $\underline{m}$ dans une série formelle à coefficients dans Λ .

Posons $A_o = \Lambda[[t_1,\dots,t_{h-1}]]$. Il existe alors une loi de groupe formel "universelle" $F_o(X,Y ; t_1,\dots,t_{h-1})$ à coefficients dans A_o qui possède les propriétés suivantes :

a) la série $F_o(X,Y ; 0,\dots,0)$ admet $\bar{F}(X,Y)$ pour réduction modulo p ;

b) si F est un relèvement de $\bar{F}$ à un anneau local A comme plus haut, il existe un système d'éléments $a_1,\dots,a_{h-1}$ de $\underline{m}$ et un seul tel que $F(X,Y)$ soit équivalent au relèvement $F_o(X,Y ; a_1,\dots,a_{h-1})$ de $\bar{F}$ à A .

Un outil essentiel dans la démonstration de Lubin et Tate est fourni par les groupes de cohomologie $H^2_s(\bar{F},V)$ où V est un espace vectoriel sur k . On les définit comme suit : un 2-cocycle est une série formelle $g(X,Y)$ à coefficients dans V telle que

$$g(Y,Z) - g(\bar{F}(X,Y),Z) + g(X,\bar{F}(Y,Z)) - g(X,Y) = 0 \quad ;$$

le 2-cocycle g est symétrique si l'on a $g(X,Y) = g(Y,X)$, et c'est un 2-cobord s'il existe une série $h(X)$ à coefficients dans V telle que $g(X,Y) = h(X) - h(\bar{F}(X,Y)) + h(Y)$. Les 2-cocycles symétriques forment un espace vectoriel Z^2_s sur k , et les 2-cobords un sous-espace B^2 de Z^2_s ; on pose alors $H^2_s(\bar{F},V) = Z^2_s/B^2$. Ces définitions sont calquées sur celles de la cohomologie des

groupes, le produit dans un tel groupe étant remplacé par $\bar{F}(X,Y)$. Il est trivial qu'on a $H_s^2(\bar{F},V) = H_s^2(\bar{F},k) \otimes V$ pourvu que $H_s^2(\bar{F},k)$ soit de dimension finie sur k . Par des calculs assez compliqués, Lubin et Tate montrent que $H_s^2(\bar{F},k)$ est de dimension $h-1$ sur k ; on verra plus loin une méthode plus simple et plus générale.

Pour construire les relèvements de $\bar{F}$ à l'anneau local séparé et complet A , on commence par remarquer que A est la limite projective des anneaux $A/\underline{m}^i$ pour $i \geq 1$; cela permet de se ramener au cas où l'idéal maximal $\underline{m}$ de A est nilpotent. Par une récurrence facile sur l'ordre de nilpotence de $\underline{m}$, on se ramène à la situation élémentaire suivante : A est un anneau local d'idéal maximal $\underline{m}$, I est un idéal de A tel que $\underline{m}.I = 0$, et l'on cherche les lois de groupes formels $F(X,Y)$ dans A qui se réduisent modulo I en une loi $P(X,Y)$ dans A/I . Tout d'abord, un théorème général de Lazard assure l'existence d'au moins un relèvement $F_o(X,Y)$ de $P(X,Y)$ à A . Les divers relèvements de $P(X,Y)$ à A sont alors de la forme $F_o(X,Y) + g(X,Y)$ où g est un 2-cocycle symétrique à valeurs dans l'espace vectoriel I sur le corps $k = A/\underline{m}$; si deux relèvements F et F' sont fournis respectivement par les 2-cocycles g et g' , il existe un isomorphisme $\varphi(X)$ de F avec F' tel que $\varphi(X) \equiv X$ mod. I si et seulement si $g - g'$ est un 2-cobord. Comme $H_s^2(\bar{F},I)$ est isomorphe à I^{h-1} , on voit s'introduire les $h-1$ paramètres de déformation. Pour obtenir la loi universelle, on raisonne de manière analogue avec l'anneau A_o au lieu de A , en choisissant à chaque cran la déformation "générique".

Grothendieck a remarqué que les résultats précédents s'étendent facilement au cas des groupes formels de dimension $n \geq 1$ quelconque. Un tel groupe formel G est fourni par un système de n séries formelles $F_i(X_1,\ldots,X_n ; Y_1,\ldots,Y_n)$ (avec

$1 \leq i \leq n$) satisfaisant à des relations que le lecteur écrira facilement par analogie avec le cas de la dimension 1 . La série $H_r(X)$ est remplacée par un système de n séries $H_{r,i}(X_1,\ldots,X_n)$ $(1 \leq i \leq n)$. Un groupe formel (commutatif !) G sur le corps parfait k de caractéristique $p > 0$ est dit de hauteur finie si $k[[X_1,\ldots,X_n]] = B$ est un module de type fini sur le sous-anneau $k[[H_{p,1},\ldots,H_{p,n}]] = B'$; s'il en est ainsi, B est un module libre sur B' , dont le rang est une puissance p^h de p ; l'entier $h \geq 1$ s'appelle la <u>hauteur</u> de G . Naturellement, on peut formuler toutes ces définitions de manière plus savante, en parlant suivant les idiosyncrasies des auteurs de schémas formels en groupes ou de foncteurs en groupes. Le problème des relèvements se formule comme dans le cas de la dimension 1 . On peut encore définir le groupe de cohomologie $H^2_s(G,k)$; il s'interprète de manière plus sympathique comme le groupe $Ext^1(G,G_a)$ des extensions de G par le groupe formel additif à une variable G_a . On peut déterminer facilement $Ext^1(G,G_a)$ en fonction du module de Dieudonné (M,f,v) de G ; c'est l'espace vectoriel dual de M/fM , d'où aussitôt sa dimension $n' = h - n$. En reprenant les raisonnements esquissés plus haut, on définit alors un relèvement universel de G , défini sur un anneau de séries formelles en $n(h-n)$ variables à coefficients dans Λ .

Nous mentionnerons en passant une autre généralisation des résultats de Lubin et Tate, due à Mumford et Oort [7] ; il s'agit des relèvements des schémas en groupes commutatifs finis. Mumford et Oort utilisent aussi le théorème général de relèvement de Lazard, et ne font pas usage des modules de Dieudonné ; l'utilisation de ces derniers permet de simplifier considérablement leurs raisonnements.

* *

*

L'inconvénient des méthodes précédentes est que les paramètres de déformation $t_1,\ldots,t_{n(h-n)}$ n'ont pas de caractère intrinsèque. Certains contre-exemples dus à Grothendieck laissent peu d'espoir d'obtenir en général des paramètres intrinsèques, bien que nous ayions pu le faire dans certains cas particuliers. Nous allons maintenant décrire la manière dont Grothendieck a reformulé le problème des relèvements.

Dans toute la suite de cet exposé, on suppose donnés un corps k parfait de caractéristique $p > 0$ et un groupe formel Γ de dimension n, hauteur h et codimension $n' = h - n$ sur le corps k. On note Λ l'anneau des vecteurs de Witt sur k et (M,f,v) le module de Dieudonné de Γ ; rappelons que M est un module libre de rang h sur Λ, et que f et v sont des endomorphismes du groupe additif M, satisfaisant aux relations $f(\lambda m) = \lambda^{\sigma} f(m)$, $v(\lambda^{\sigma} m) = \lambda v(m)$, $vf(m) = fv(m) = p.m$ pour $\lambda \in \Lambda$ et $m \in M$ (σ est l'automorphisme de Frobenius de Λ). Alors M/vM est l'algèbre de Lie de Γ, M/fM est l'espace vectoriel dual de l'algèbre de Lie du groupe formel Γ' (de dimension n' et codimension n) dual de Γ au sens de Tate [8], et l'on a une suite exacte

(1) $$0 \to M/fM \xrightarrow{v} M/pM \to M/vM \to 0 .$$

Soient A un anneau local séparé et complet, d'idéal maximal $\underline{m}$ avec $k = A/\underline{m}$, G un relèvement de Γ à A, et G' le dual de Tate de G. On note $\underline{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\underline{g}'$ celle de G'. Pour tout A-module libre de type fini H, on note H^+ le groupe formel correspondant, isomorphe à $G_a \times \ldots \times G_a$ (m facteurs) si H est de rang m. Il est facile de voir que le foncteur $H \mapsto \mathrm{Ext}^1(G,H^+)$ est représentable par le module $\underline{g}'^* = P$ dual de $\underline{g}'$; on a donc une suite exacte canonique de groupes formels

(2) $\quad 0 \to P^+ \to E_A \to G \to 0$

qui possède une propriété universelle évidente par rapport aux extensions de G par un groupe formel du type H^+. On notera M_A l'algèbre de Lie du groupe E_A ; c'est un module libre de rang h sur A, et la suite exacte (2) donne pour les algèbres de Lie une suite exacte

(3) $\quad 0 \to \underline{g}'^* \to M_A \to \underline{g} \to 0$.

On montre facilement que la suite exacte (3) redonne (1) par réduction modulo $\underline{m}$.

Le problème évident est de décrire le module M_A. L'idée essentielle de Grothendieck est que M_A ne dépend que de A et du groupe Γ, mais non du relèvement G de Γ, pourvu que A admette des puissances divisées. Expliquons d'abord ce que l'on entend par là. C'est une suite d'applications $\gamma_n : \underline{m} \to \underline{m}$ (pour $n \geq 1$), qui satisfont aux identités suivantes :

$$\gamma_1(x) = x$$

$$\gamma_n(ax) = a^n \gamma_n(x)$$

$$\gamma_n(x + y) = \gamma_n(x) + \gamma_n(y) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y)$$

$$\gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(m + n)!}{m!n!} \gamma_{m+n}(x)$$

pour x, y dans $\underline{m}$, a dans A et m, $n \geq 1$. On obtient ces identités en écrivant formellement $\gamma_n(x) = x^n/n!$. Lorsque A est un anneau de valuation discrète de caractéristique 0, les puissances divisées existent si et seulement si l'on a $p \notin \underline{m}^p$, c'est-à-dire si A n'est pas trop ramifié sur Λ ; il y a alors unicité des γ_n. Lorsque A est une algèbre sur le corps k, l'existence des puissances divisées signifie que tout élément de $\underline{m}$ est de puissance p-ème nulle.

Nous pouvons maintenant formuler les conjectures de Grothendieck sur les relèvements de groupes formels, conjectures qui ne sont "qu'un tout petit sous-produit

de ses conjectures sur la cohomologie cristalline" :

On suppose que l'anneau local A est muni de puissances divisées. Alors,

a) le groupe formel E_A ne dépend que de A et de Γ, mais non du relèvement G de Γ à A ;

b) l'algèbre de Lie M_A de E_A est égale à $A \otimes_\Lambda M$, où M est le module de Dieudonné de Γ ;

c) les divers relèvements de Γ à A correspondent aux diverses manières de relever la suite exacte (1) en une suite exacte (2), avec $M_A = A \otimes_\Lambda M$ conformément à b).

Nous faisons grâce au lecteur de la formulation précise de diverses compatibilités fonctorielles qu'il convient d'exiger.

* *
*

Le reste de cet exposé est consacré à la description de la méthode par laquelle nous avons pu récemment démontrer les conjectures de Grothendieck. Les résultats sont annoncés dans [3] et un exposé détaillé [4] paraîtra un jour prochain. Nous allons énoncer le résultat principal de [4], dont le reste se déduit assez facilement. Soit donc A un anneau local séparé et complet, de corps des restes k, dont l'idéal maximal $\underline{m}$ est muni de puissances divisées γ_n. On se donne d'abord un relèvement de l'algèbre de Lie M/vM de Γ, c'est-à-dire un couple $(\underline{g},\varepsilon)$ où $\underline{g}$ est un A-module libre et ε un isomorphisme de M/vM avec $\underline{g}/\underline{m}.\underline{g}$. Nous précisons de la manière suivante la notion de relèvement de Γ à A : c'est un triplet (G,γ,δ) où G est un groupe formel sur A, γ un isomorphisme de $\underline{g}$ avec l'algèbre de Lie de G et δ un isomorphisme de Γ avec la réduction modulo $\underline{m}$ du groupe formel G ; on impose à γ et δ de redonner ε en un sens facile

à préciser. On peut alors définir une bijection de l'ensemble des relèvements (G,γ,δ) de Γ sur l'ensemble des applications Λ-linéaires θ de M dans g qui induisent l'isomorphisme ε par passage aux quotients.

Les outils que nous utilisons dans [4] sont de trois sortes. Premièrement, nous décrivons une manière générale d'associer à un module de Dieudonné un groupe formel sur l'anneau Λ ; convenablement modifiée, cette méthode permet de définir des groupes de Lubin-Tate de dimension > 1 et d'étudier les coefficients de certaines formes automorphes, mais nous nous abstiendrons d'entrer ici dans ces questions. Deuxièmement, nous introduisons un substitut de l'application exponentielle pour les groupes formels sur un anneau à puissances divisées. Troisièmement, nous faisons une étude de certaines suites exactes de VF-modules (c'est-à-dire de modules munis d'opérateurs V et F un peu plus généraux que les modules de Dieudonné). Nous allons donner quelques détails sur les deux premiers outils, le troisième étant trop technique pour un exposé comme celui-ci.

Soient K le corps des fractions de Λ, T un groupe formel sur Λ et $T_{/K}$ le groupe formel sur K déduit de T par extension des scalaires. On note $\underline{t}$ l'algèbre de Lie de T et $\underline{t}_{/K}$ celle de $T_{/K}$. On a donc $\underline{t}_{/K} = K \otimes_{\Lambda} \underline{t}$ et comme K est un corps de caractéristique 0, le logarithme est un isomorphisme de groupes formels de $T_{/K}$ sur $\underline{t}^{+}_{/K}$. On note $C_{/K}$ le groupe additif des séries formelles de la forme $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{p^i}$ à coefficients dans $\underline{t}_{/K}$, et l'on définit dans $C_{/K}$ des opérateurs F, V et $[\lambda]$ (pour λ dans Λ) par les formules

$$Fu(t) = \sum_{i=0}^{\infty} pa_{i+1} t^{p^i} \quad , \quad Vu(t) = u(t^p) \quad , \quad [\lambda]u(t) = u(\lambda t) .$$

Le module logarithmique de T est le sous-groupe C de $C_{/K}$ formé des séries $u(t)$ telles que $\exp u(t)$ soit définie sur Λ, c'est-à-dire soit une courbe du

groupe T .

En utilisant la théorie générale des courbes typiques que nous avons résumée dans [1] et [2], on obtient la caractérisation suivante : Soit t un module libre de type fini sur Λ ; pour que deux groupes formels T et T' d'algèbres de Lie t sur l'anneau Λ soient isomorphes (par un isomorphisme induisant l'identité sur t), il faut et il suffit qu'ils aient même module logarithmique ; pour qu'un sous-groupe C de $C_{/K}$ soit le module logarithmique d'un groupe formel T d'algèbre de Lie t , il faut et il suffit qu'il soit fermé et stable par les opérateurs F , V et $[\lambda]$ et que t soit l'ensemble des coefficients de t dans l'ensemble des séries appartenant à C .

Nous pouvons maintenant décrire notre construction générale de groupes formels. Nous disposons de l'anneau local A d'idéal maximal $\underline{m}$ et des puissances divisées γ_n sur $\underline{m}$, du module de Dieudonné (M,f,v) de Γ , du relèvement $(\underline{g},\varepsilon)$ de M/vM et d'une application Λ-linéaire θ de M sur $\underline{g}$ induisant ε par passage aux quotients. Le critère précédent permet d'affirmer qu'il existe un groupe formel $L(M)$ sur l'anneau Λ , d'algèbre de Lie M et dont le module logarithmique se compose des séries $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \, t^{p^i}$ à coefficients dans $M_{/K} = K \otimes_{\Lambda} M$ telles que a_o et $a_{i+1} - f(a_i)/p$ appartiennent à M pour $i \geq 0$. Par extension des scalaires de Λ à A , on déduit de $L(M)$ un groupe formel E_A sur l'anneau A , dont l'algèbre de Lie M_A est égale à $A \otimes_{\Lambda} M$. Par ailleurs, l'application Λ-linéaire θ de M dans le A-module $\underline{g}$ définit une application A-linéaire $\bar{\theta}$ de M_A sur $\underline{g}$; son noyau sera noté P .

Le pas suivant est la construction d'une application A-linéaire u de P dans le A-module $\mathrm{Hom}(G_a, E_A)$ des homomorphismes du groupe additif à un paramètre

G_a dans le groupe E_A . Elle se définit par recollement :

a) Nous définissons une application linéaire e de $\underline{m}.M_A$ dans $\mathrm{Hom}(G_a,E_A)$ en utilisant les puissances divisées dans $\underline{m}$. D'une manière générale, pour tout groupe formel H sur A , d'algèbre de Lie $\underline{h}$, nous définissons une application A-linéaire e_H de $\underline{m}.\underline{h} = \underline{m} \otimes_A \underline{h}$ dans $\mathrm{Hom}(G_a,H)$; c'est la pseudo-exponentielle dont il fut question plus haut. Soient U la bigèbre de G_a et U(H) celle de H ; les homomorphismes de G_a dans H correspondent bijectivement aux homomorphismes de bigèbres de U dans U(H) . Or, U admet une base $(z_i)_{i \geq 0}$ par rapport à laquelle le produit $m : U \otimes U \to U$ et le coproduit $c : U \to U \otimes U$ se calculent ainsi :

$$m(z_i \otimes z_j) = \frac{(i+j)!}{i!j!} z_{i+j} \quad , \quad c(z_n) = \sum_{i=0}^{n} z_i \otimes z_{n-i} .$$

On voit alors immédiatement que pour tout $a \in \underline{m}$ et tout $x \in \underline{h}$, il existe un homomorphisme de bigèbres envoyant z_i sur $\gamma_i(a)x^i$ (on a $\underline{h} \subset U(H)$) ; l'homomorphisme correspondant de groupes formels est $e_H(a.x)$.

b) Pour tout m dans vM , il existe un homomorphisme h_m de G_a dans $L(M)$ défini par $h_m(t) = \exp mt$; par extension des scalaires de Λ à A , on déduit de h_m un homomorphisme h'_m de G_a dans E_A . De plus, on a $e(1 \otimes m) = h'_m$ si $1 \otimes m$ appartient au sous-module $\underline{m}.M_A$ de $M_A = A \otimes_\Lambda M$.

c) L'hypothèse faite sur θ entraîne que tout élément de P est de la forme $x = y + 1 \otimes m$ avec $y \in \underline{m}.M_A$ et $m \in vM$. D'après b), on peut poser $u(x) = e(y) + h'_m$, ceci ne dépendant pas de la décomposition $x = y + 1 \otimes m$ choisie.

A partir de $u : P \to \mathrm{Hom}(G_a,E_A)$, on définit un homomorphisme u^+ de P^+ dans E_A . On vérifie facilement que u^+ induit sur les algèbres de Lie l'inclu-

sion de P dans M_A ; comme les modules P et M_A/P sont libres de type fini, on peut définir le groupe formel quotient $G = E_A/u^+(P^+)$. On définit sans mal un isomorphisme γ de $\underline{g}$ sur l'algèbre de Lie de G . Par une analyse des liens entre l'exponentielle e et la réduction modulo $\underline{m}$, on peut définir un isomorphisme canonique δ de Γ avec la réduction modulo $\underline{m}$ de G . On a donc construit un relèvement (G,γ,δ) de Γ à A et une suite exacte

$$0 \to P^+ \to E_A \to G \to 0 .$$

Pour terminer la démonstration des conjectures de Grothendieck, il faut montrer que tout relèvement de Γ s'obtient par la construction précédente et que la suite exacte précédente est universelle. Cela se fait par une analyse très technique des VF-modules de courbes typiques des groupes formels envisagés ; en particulier, il faut établir une propriété universelle des groupes du type $L(M)$.

* *
*

Nous allons reformuler les résultats obtenus en termes de la "variété des modules" du groupe formel Γ . On définit d'abord une catégorie C ; ses objets sont les couples (A,u) formés d'un anneau local séparé et complet A et d'un homomorphisme u de A sur k ; les morphismes de (A,u) dans (A',u') sont les homomorphismes d'anneaux $f : A \to A'$ tels que $u = u'f$. Soit (A,u) un objet de C ; nous considérons des couples (G,δ) où G est un groupe formel sur A et δ un isomorphisme de Γ avec le groupe formel G^u sur k déduit de G par le changement de base $u : A \to k$; deux couples (G,δ) et (G',δ') sont dits équivalents s'il existe un isomorphisme f de G avec G' tel que $\delta' = f^u\delta$; les classes d'équivalence de couples (G,δ) forment un ensemble $\Phi_\Gamma(A,u)$. Le foncteur en ensembles Φ_Γ sur la catégorie C est appelé le <u>fonc-</u>

teur des modules de Γ . Par ailleurs, pour tout entier $r \geq 0$, on considère le foncteur en ensembles D^r sur C qui associe à tout objet (A,u) de C l'ensemble des vecteurs à r composantes dans l'idéal maximal de A . La généralisation par Grothendieck des résultats de Lubin-Tate peut se reformuler ainsi : Le foncteur Φ_Γ est représentable par l'anneau de séries formelles $\Lambda[[t_1,\ldots,t_{n(h-n)}]]$, ou encore : il existe un isomorphisme f du foncteur Φ_Γ avec le foncteur $D^{n(h-n)}$.

De manière analogue à C , on définit la catégorie C' des anneaux locaux à puissances divisées "en-dessous de k ", les morphismes respectant les puissances divisées. Si A est un tel anneau, on définit $\Psi_M(A)$ comme l'ensemble des sous-modules P de $A \otimes_\Lambda M$ qui sont libres de rang $h-n$ sur A et tels que $P + \underline{m} \otimes_\Lambda M = A \otimes_\Lambda vM + \underline{m} \otimes_\Lambda M$, où $\underline{m}$ est l'idéal maximal de A . On obtient ainsi un foncteur en ensembles Ψ_M sur C' et l'on peut considérer Φ_Γ comme un foncteur en ensembles sur C' . Notre théorème fondamental définit un isomorphisme g de Ψ_M sur Φ_Γ .

Prenons en particulier $A = \Lambda$. Alors $\Psi = \Psi_M(\Lambda)$ est l'ensemble des sous-modules P de M qui sont libres de rang $h-n$ sur Λ et tels que $P + pM = vM$. La grassmannienne des $(h-n)$-plans de M est une variété analytique sur le corps des fractions K de Λ et Ψ en est une sous-variété ouverte. En combinant les isomorphismes $\Psi_M \xrightarrow{g} \Phi_\Gamma \xrightarrow{f} D^{n(h-n)}$, on déduit des fonctions coordonnées sur $D^{n(h-n)}(\Lambda)$ des fonctions analytiques $q_1,\ldots,q_{n(h-n)}$ sur Ψ . L'anneau $\Lambda[[q_1,\ldots,q_{n(h-n)}]]$ de fonctions analytiques sur Ψ est défini de manière intrinsèque. Il importerait d'en donner une description simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. CARTIER - Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 265 (1967), p. 50-52.

[2] P. CARTIER - Modules associés à un groupe formel commutatif. Courbes typiques, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 265 (1967), p. 129-132.

[3] P. CARTIER - Relèvement des groupes formels de hauteur finie, à paraître aux C. R. Acad. Sc., Paris.

[4] P. CARTIER - Groupes formels commutatifs IV. Relèvement des groupes de hauteur finie, à paraître aux Pub. Math. de l'I.H.E.S..

[5] M. LAZARD - Sur les groupes de Lie formels à un paramètre, Bull. Soc. Math. France, 83 (1955), p. 251-274.

[6] J. LUBIN and J. TATE - Formal moduli for one-parameter formal Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), p. 49-60.

[7] D. MUMFORD and F. OORT - Deformations and Liftings of Finite, Commutative Group Schemes, Inventiones Math., 5 (1968), p. 317-334.

[8] J. TATE - p-divisible groups, Ecole d'Eté de Driebergen, 1966.