PIERRE GABRIEL

Représentations des algèbres de Lie résolubles

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 347, p. 1-22

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__1_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 347 Novembre 1968

REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE LIE RÉSOLUBLES

(d'après J. DIXMIER)

par Pierre GABRIEL

Le présent texte est une variation sur la première moitié de [5]. Tout anneau A sera supposé associatif et aura un élément unité. Le terme "idéal" désignera un "idéal bilatère".

1. Rappels.

1.1. Soit S une partie multiplicative de A (i.e. $1_A \in S$ et $s.t \in S$ si $s \in S$ et $t \in S$). On dit que S permet un calcul de fractions à droite si l'on a (*) et (**) :

(*) $\forall\ s \in S\ ,\forall\ a \in A\ ,\ \exists\ t \in S\ ,\ \exists\ b \in A$ tels que $a.t = s.b$;

(**) si $a \in A$ et $s \in S$ sont tels que $s.a = 0$, il existe $t \in S$ tel que

$$a.t = 0 .$$

Si ces conditions sont vérifiées, nous notons A_S l'anneau de fractions à droite défini par S ([7], p. 416, remarque 2). Un élément de A_S sera noté simplement as^{-1}, avec $a \in A$ et $s \in S$.

PROPOSITION.- Soit S une partie multiplicative de A permettant un calcul de fractions. La fraction as^{-1} appartient au centre de A_S si et seulement si, pour tout $b \in A$, il y a un $t \in S$ tel que $(abs - sba)t = 0$.

La démonstration est "tout droit en avant". Nous utiliserons ce résultat lorsque les éléments de S ne divisent pas 0 dans A .

1.2. PROPOSITION.- Si S permet un calcul de fractions à droite de A , toute dérivation de A se prolonge de manière unique en une dérivation $\bar{D}$ de A_S .

En effet, de $ss^{-1} = 1$, on tire qu'on a nécessairement $\bar{D}s^{-1} = -s^{-1}(Ds)s^{-1}$ et $\bar{D}(as^{-1}) = (Da)s^{-1} - as^{-1}(Ds)s^{-1}$ si $s \in S$. On vérifie de suite que ce dernier terme ne dépend que de as^{-1} et non pas de a et de s ([7], p. 416, remarque 2). La formule obtenue définit une dérivation.

1.3. Un idéal $\underline{p}$ de A est dit premier si $\underline{p} \neq A$ et si les relations $\underline{a} \not\subset \underline{p}$ et $\underline{b} \not\subset \underline{p}$ impliquent $\underline{ab} \not\subset \underline{p}$, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ désignant des idéaux. Il est équivalent de dire que $\underline{p} \neq A$ et que, si x , $y \in A$, les relations $x \notin \underline{p}$ et $y \notin \underline{p}$ impliquent l'existence d'un $z \in A$ tel que $xzy \notin \underline{p}$. Si $x \notin \underline{p}$ et $y \notin \underline{p}$ impliquent $x.y \notin \underline{p}$, i.e. si $A/\underline{p}$ est intègre, on dit que $\underline{p}$ est complètement premier. L'ensemble des idéaux premiers de A sera noté Spec A .

Un idéal $\underline{s}$ de A est dit semi-premier si $A/\underline{s}$ ne contient pas d'idéal nilpotent non nul. Rappelons l'énoncé du théorème de Goldie : supposons que A est noethérien à droite et que l'idéal 0 est semi-premier ; alors si $s \in A$ et si $s.x = 0$ implique $x = 0$, $y.s = 0$ implique $y = 0$; l'ensemble S de ces s (les non-diviseurs de 0 de A) permet un calcul de fractions à droite, et A_S est un anneau semi-simple ([8], [10], [7]). Cet anneau A_S sera noté Fract(A) et appelé l'anneau total des fractions de A .

1.4. Revenons au cas général d'une partie multiplicative S de A permettant un calcul de fractions à droite. Soit $\varphi : A \to A_S$ l'application canonique. L'application $d \mapsto \varphi^{-1}(d)$ met en correspondance bijective les idéaux à droite de A_S et les idéaux à droite n de A tels que $s \in S$, $x \in A$ et $x.s \in n$ impliquent $x \in n$; l'application réciproque associe à n l'idéal à droite $n_S = \{xs^{-1} \mid x \in n , s \in S\}$. Cette dernière expression est définie pour tout idéal à droite n. Lorsque n est bilatère, n_S l'est si et seulement si les relations $x \in A$, $s \in S$ et $s.x \in n$ impliquent l'existence d'un $t \in S$ tel que $x.t \in n$. Les applications $d \mapsto \varphi^{-1}(d)$ et $n \mapsto n_S$ mettent en correspondance bijective les idéaux (bilatères) de A_S et les idéaux (bilatères) $\underline{a}$ de A tels que les éléments de S ne divisent pas 0 (à gauche ou à droite) dans $A/\underline{a}$. Dans cette bijection, les idéaux complètement premiers de A_S correspondent aux idéaux complètement premiers de A qui ne rencontrent pas S.

Pour les idéaux premiers, la situation semble être un peu moins simple : en effet, soit $\underline{a}$ un idéal premier de A tel que les éléments de S ne divisent pas 0 dans $A/\underline{a}$; alors $\underline{a}_S$ est un idéal premier de A_S. Par contre, si $\underline{p}$ est un idéal premier de A_S, je n'ai pas l'impression que $\varphi^{-1}(\underline{p})$ soit en général un idéal premier de A ; cela est vrai cependant dans divers cas particuliers, en particulier si S est contenu dans le centre de A ; dans ce dernier cas, l'application $\underline{p} \mapsto \varphi^{-1}(\underline{p})$ est une bijection de $\operatorname{Spec} A_S$ sur la partie de $\operatorname{Spec} A$ formée des idéaux premiers ne rencontrant pas S.

1.5. Si A est noethérien à droite, et si $\underline{a}$ est un idéal de A, nous notons $\sqrt{\underline{a}}$ le plus grand idéal $\underline{b}$ tel qu'on ait $\underline{b}^n \subset \underline{a}$ lorsque n est assez grand.

PROPOSITION.- <u>Si</u> A <u>est noethérien à droite</u>, <u>les idéaux premiers minimaux de</u> A <u>correspondent bijectivement aux composantes simples de</u> $\mathrm{Fract}(A/\sqrt{0})$. <u>Leur nombre</u>

est fini et leur intersection est égale à $\sqrt{0}$.

En effet, quitte à remplacer A par $A/\sqrt{0}$, on peut supposer que 0 est semi-premier. Si 0 n'est pas premier, il y a des idéaux non nuls a et b tels que $a.b = 0$. Alors $a \cap b$ est nilpotent ; donc $a \cap b = 0$ et $\sqrt{a} \cap \sqrt{b} = 0$. Si $\sqrt{a}$ n'est pas premier, on voit de même que $\sqrt{a}$ est l'intersection de 2 idéaux semi-premiers distincts de $\sqrt{a}$. Par récurrence noethérienne, on établit donc l'existence d'une suite irrédondante d'idéaux premiers $p_1, \ldots, p_r$ tels que $p_1 \cap \ldots \cap p_r = 0$; alors, avec les notations de 1.3, un élément $s \in S$ ne divise pas 0 dans A/p_i (supposons par exemple que $x.t \in p_i$ avec $x \notin p_i$; soit $y \in \bigcap_{j \neq i} p_j$ tel que $y \notin p_i$; il y a alors un $a \in A$ tel que $yax \notin p_i$; comme $x.t \in p_i$, on a $yaxt = 0$ et $t \in S$) ; pour tout i , p_{iS} est donc un idéal premier de A_S (1.4) et l'intersection $0 = p_{1S} \cap \ldots \cap p_{rS}$ est irrédondante ; les p_{iS} coïncident donc avec les idéaux premiers de Fract(A) .

Remarque.- Mac Coy et Levitzki ont montré que, dans tout anneau, un idéal semi-premier est une intersection d'idéaux premiers ([9], chap. VIII, théor. 1).

2. Extensions de corps gauches.

2.1. Pour tout anneau K et toute dérivation D de K , nous désignons par $K_D[T]$ l'anneau engendré par K et par une lettre T soumise aux "seules relations"

$$Ta = aT + D(a) \qquad \text{si } a \in K .$$

Tout élément non nul de $K_D[T]$ se met d'une manière et d'une seule sous la forme $a_o + Ta_1 + \ldots + T^n a_n$, où $n \in \mathbb{N}$, $a_o , a_1 , \ldots, a_n \in K$ et $a_n \neq 0$. Les anneaux $K_D[T]$ et $K_E[T]$ sont isomorphes lorsque $D - E$ est une dérivation intérieure de K : en effet, si l'on a $D(x) = E(x) + ax - xa$ pour tout $x \in K$, on a un isomorphisme $u : K_D[T] \to K_E[T]$ tel que $u(y) = y$ si $y \in K$ et $u(T) = T + a$. En particulier, si D est une dérivation intérieure, $K_D[T]$ est isomorphe à $K_o[T] = K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T]$.

Lorsque K est un anneau noethérien à droite, $K_D[T]$ est noethérien à droite (même démonstration que dans le cas où $D = 0$). Nous nous intéressons plus spécialement au cas où K est un corps gauche. Dans ce cas, tout idéal à gauche de $K_D[T]$ est monogène, ainsi que tout idéal à droite.

2.2. PROPOSITION.- Si K est un corps gauche de caractéristique 0, $K_D[T]$ possède un idéal bilatère distinct de 0 et de $K_D[T]$ si et seulement si la dérivation D est intérieure. Si Z désigne le centre de K, et si $D = 0$, tout idéal bilatère de $K_D[T]$ est engendré par un élément de $Z[T]$.

En effet, soit $\underline{a}$ un idéal bilatère distinct de 0 et de $K_D[T]$. Soit $P = T^n + T^{n-1}p_1 + \dots + p_n$ un élément tel que $\underline{a} = PK_D[T]$. Pour tout $x \in K$, on a

$$\begin{aligned} xP &= xT^n + xT^{n-1}p_1 + \dots + xp_n \\ &= (T^n x - \tbinom{n}{1} T^{n-1} D(x) + \tbinom{n}{2} T^{n-2} D^2(x) - \dots) + \\ &\qquad (T^{n-1}x - \tbinom{n-1}{1} T^{n-2} D(x) + \dots)p_1 + \dots + xp_n \\ &= T^n x + T^{n-1}(xp_1 - nDx) + \dots \ . \end{aligned}$$

Comme $Px \in PK_D[T]$, on a nécessairement $Px = xP$, d'où $nDx = xp_1 - p_1x$ et $D = -\frac{1}{n}\,\mathrm{ad}(p_1)$. Enfin, si $D = 0$, la relation $Px = xP$ équivaut à

$p_i x = x p_i$ pour tout i ; donc $p_i \in Z$.

2.3. THÉORÈME.- Soit K un corps gauche de centre Z :

a) Le centre de $\mathrm{Fract}(K_o[T])$ est le corps des fractions rationnelles $Z(T)$.

b) Si K est de caractéristique 0 , et si D est une dérivation non intérieure de K , le centre de $\mathrm{Fract}(K_D[T])$ est l'ensemble des $z \in Z$ tels que $Dz = 0$.

b) En effet, soient $Q = T^n q_o + T^{n-1} q_1 + \dots$ et $P = T^m p_o + T^{m-1} p_1 + \dots$ des éléments de $K_D[T]$ tels que PQ^{-1} soit central $(q_o \neq 0 , p_o \neq 0)$. D'après 1.1, il revient au même de dire qu'on a $PTQ = QTP$ et $PaQ = QaP$ pour tout $a \in K$. Considérons la seconde relation : on a

$$PaQ = T^{m+n} p_o a q_o + T^{m+n-1}(p_o a q_1 + p_1 a q_o - nD(p_o a) q_o) + \dots$$

d'où

$$(1) \qquad p_o a q_o = q_o a p_o$$

et

$$(2) \qquad p_o a q_1 + p_1 a q_o - nD(p_o a) q_o = q_o a p_1 + q_1 a p_o - mD(q_o a) p_o .$$

On a de même

$$PTQ = T^{m+n+1} p_o q_o + T^{m+n}(p_o q_1 + p_1 q_o - (n+1)(Dp_o) q_o) + \dots$$

d'où

$$(3) \qquad p_o q_1 + p_1 q_o - (n+1)(Dp_o) q_o = q_1 p_o + q_1 p_o - (m+1)(Dq_o) p_o .$$

Faisons $a = 1$, on en tire de (2) et (3) $(Dp_o) q_o = (Dq_o) p_o$. De là et de (1), on déduit $q_o = p_o z$, avec $z \in Z$ et $Dz = 0$. Quitte à remplacer P par Pp_o^{-1} et Q par $Qq_o^{-1} = Qp_o^{-1} z^{-1}$, on peut donc supposer que $p_o = q_o = 1$. De (2) on tire alors $(m - n)Da = [q_1 - p_1 , a]$. Comme D n'est pas une dérivation intérieure, on a donc $m = n$.

Nous allons montrer qu'on a nécessairement $P = Q$; supposons donc que $P = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1} + T^{n-s}p + T^{n-s-1}p' + \dots$ et $Q = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1} + T^{n-s}q + T^{n-s-1}q' + \dots$. Posons $R = T^n + T^{n-1}r_1 + \dots + T^{n-s+1}r_{s-1}$. On a alors

$$PaQ = RaR + T^{2n-s}(aq + pa) + T^{2n-s-1}(aq' + p'a + r_1aq + par_1 - (n - s)(Da)q - nD(pa)) + \dots$$

d'où $aq + pa = ap + qa$, i.e. $q - p = u \in Z$ et $[q' - p' - r_1u,a] + (n - s)(Da)u - nD(ua) = 0$. Faisant $a = 1$, on voit que $Du = 0$, donc $s(Da)u = [q' - p' - r_1u,a]$. Comme D n'est pas une dérivation intérieure, on a $u = 0$, donc $q = p$. (*)

a) Reprenons maintenant les notations précédentes dans le cas où $D = 0$. On se ramène comme ci-dessus au cas où $p_o = q_o = 1$. La relation (2) s'écrit alors $aq_1 + p_1a = ap_1 + q_1a$, d'où $[q_1 - p_1,a] = 0$ et $q_1 - p_1 = z_1 \in Z$. Supposons prouvée l'existence d'éléments $z_1, \dots, z_s$ de Z tels qu'on ait $q_t = p_t + p_{t-1}z_1 + p_{t-2}z_2 + \dots + p_1z_{t-1} + z_t$ pour $t \leq s$. Comparant alors les coefficients de $T^{m+n-s-1}$ dans PaQ et QaP, on trouve sans peine que $[q_{s+1} - p_{s+1} - p_sz_1 - \dots - p_1z_s, a] = 0$, i.e. que $q_{s+1} - p_{s+1} - p_sz_1 - \dots - p_1z_s = z_{s+1} \in Z$ (on pose évidemment $q_i = 0$ si $i > n$ et $p_j = 0$ si $j > m$). Si l'on suppose que $n \leq m$, ce qui est loisible, on a donc en particulier les relations

(*) On peut donner de a) et b) une démonstration plus simple en prouvant directement que le centre de $\mathrm{Fract}(K_D[T])$ coïncide avec le corps des fractions du centre de $K_D[T]$. Pour cela on associe à tout $a \in \mathrm{Fract}(K_D[T])$ la dérivation intérieure ∂_a de $\mathrm{Fract}(K_D[T])$ telle que $\partial_a(x) = ax - xa$; le centre de $\mathrm{Fract}(K_D[T])$ est alors l'ensemble des x tels que $\partial_a(x) = 0$ dans chacun des cas suivants : $a = T$ ou $a \in K$. On peut donc appliquer [1], chap. I, § 4, prop. 5.

$$
\begin{array}{rl}
p_{n+1} + p_n z_1 + \dots + p_1 z_n + z_{n+1} & = 0 \\
p_{n+2} + p_{n+1} z_1 + p_n z_2 + \dots + p_1 z_{n+1} + z_{n+2} & = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
(R) \quad p_m + p_{m-1} z_1 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + p_1 z_{m-1} + z_m & = 0 \\
p_m z_1 + p_{m-1} z_2 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + p_1 z_m + z_{m+1} & = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
p_m z_n + p_{m-1} z_{n+1} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + p_1 z_{m+n-1} + z_{m+n} & = 0 .
\end{array}
$$

Si $m = n$ et si tous les z_i sont nuls, on a $P = Q$. Sinon, nous allons déduire de ces relations que P est divisible par un polynôme de degré ≥ 1 de $Z[T]$. Divisant P par ce polynôme, et raisonnant par récurrence sur $m + n$, on pourra alors terminer la preuve.

Soit (x_α) une base de l'espace vectoriel $Z + Zp_1 + \dots + Zp_n$ sur Z et posons $p_i = \sum_\alpha p_i^\alpha x_\alpha$ pour $1 \leq i \leq m$. Remplaçant p_i par p_i^α dans les relations (R), on obtient des relations (R^α). Soit d'autre part T_α l'endomorphisme de Z^m tel que $T_\alpha(x_1, \dots, x_m) = (x_2, \dots, x_m, x)$ avec $p_m^\alpha x_1 + p_{m-1}^\alpha x_2 + \dots + p_1^\alpha x_m + x = 0$. Si l'on pose $z = (0, \dots, 0, 1, z_1, \dots, z_n)$, les relations (R^α) montrent que, pour $0 \leq i \leq m$, $T_\alpha^i(z)$ est indépendant de i. Si V est l'espace vectoriel engendré par ces $T_\alpha^i(z)$, il s'ensuit que la restriction de T_α à V ne dépend pas de α. Le polynôme unitaire et de degré minimal $M \in Z[T]$ tel que $M(T_\alpha|V) = 0$ ne dépend donc pas de α. Or, si l'on pose $P_\alpha = p_m^\alpha + \dots + p_1^\alpha T^{m-1} + T^{m-1}$, on a $P_\alpha(T^\alpha) = 0$, de sorte que M divise P_α. Si l'on pose $P_\alpha = MN_\alpha$, on a donc $P = \sum_\alpha P_\alpha x_\alpha = M(\Sigma N_\alpha x_\alpha)$, C.Q.F.D.

2.4. Soient k un corps commutatif et K une k-algèbre dont l'anneau sous-jacent est un corps. On dit que K est une *extension résoluble de* k si K contient une suite finie $t_o, t_1, \dots, t_n$ possédant les propriétés suivantes :

l'extension de corps $K|k$ est engendrée par $t_o, \dots, t_n$;

pour tout $i \geq 1$, la sous-extension $k(t_o, \dots, t_i)$ de K, qui est engendrée par $t_o, \dots, t_i$ est stable pour la dérivation intérieure $\mathrm{ad}\, t_{i+1} = t_{i+1} ? - ? t_{i+1}$. *Dans le cas où* K *n'est pas commutatif, on peut évidemment supposer que la dérivation* $\mathrm{ad}\, t_n$ *de* $k(t_o, \dots, t_{n-1})$ *n'est pas intérieure* (en effet si l'on avait $[t_n, x] = [a, x]$ pour tout $x \in k(t_o, \dots, t_{n-1})$ et pour un certain $a \in k(t_o, \dots, t_{n-1})$, on pourrait remplacer la suite donnée par $t_n - a, t_o, \dots, t_{n-1}$).

COROLLAIRE.- *Si* k *est de caractéristique* 0, *si* $K|k$ *est une extension résoluble de corps, le centre de* K *est une extension de type fini de* k.

En effet, supposons, avec les notations ci-dessus, que la dérivation de $k(t_o, \dots, t_{n-1})$, qui est induite par t_n, n'est pas intérieure. Alors le centre de K est contenu dans celui de $k(t_o, \dots, t_{n-1})$ (2.3).

2.5. COROLLAIRE.- *Soient* k *un corps commutatif,* $K|k$ *une extension de corps,* Z *le centre de* K, *et* L *une* Z-*algèbre commutative.*

a) *L'application* $I \mapsto I \cap L$ *est une bijection de* $\mathrm{Spec}(K \otimes_Z L)$ *sur* $\mathrm{Spec}\, L$.

b) *Si* $I \in \mathrm{Spec}(K \otimes_Z L)$, *soit* S *l'ensemble des non diviseurs de* 0 *de* $(K \otimes_Z L)/I$. *Alors* S *permet un calcul de fractions* (*à gauche et à droite*), *et le centre de* $((K \otimes_Z L)/I)_S$ *s'identifie à* $\mathrm{Fract}(L/I \cap L)$.

c) *Si l'extension* $K|k$ *est résoluble, et si* k *est de caractéristique* 0, *tout idéal premier* I *de* $K \otimes_Z L$ *est complètement premier.*

a) En effet, tout idéal bilatère de $K \otimes_Z L$ est de la forme $K \otimes_Z J$, où J est un idéal de L ([2], § 4, n° 5, prop. 7).

b) Il suffit évidemment de considérer le cas où L est une Z-algèbre de type fini et où $I = 0$. Alors $K \otimes_Z L$ est noethérien à gauche et à droite et l'on sait que S permet un calcul de fractions (Goldie). De plus, on peut supposer que L est un module de type fini sur une sous-algèbre de polynômes $L' = Z[T_1, \ldots, T_r]$. On a alors manifestement $\mathrm{Fract}(K \otimes_Z L) = \mathrm{Fract}(K \otimes_Z L') \otimes_F (F \otimes_{L'} L)$, avec $F = \mathrm{Fract}(L')$. Quitte à remplacer K par $\mathrm{Fract}(K \otimes_Z L')$, Z par $Z(T_1, \ldots, T_r)$ (2.3 a)) et L par $F \otimes_{L'} L$, on peut supposer que $L|Z$ est une extension finie de corps. La dernière assertion de b) est alors triviale.

Si, de plus, $K|k$ est résoluble, nous pouvons reprendre les notations de 2.4, poser $K' = k(t_o, \ldots, t_{n-1})$ et supposer que $t = t_n$ n'induit pas une dérivation intérieure dans K' . On a alors $K \otimes_Z L = (\mathrm{Fract}\, K'[t]) \otimes_Z L = \mathrm{Fract}(K'[t] \otimes_Z L) = \mathrm{Fract}((K' \otimes_Z L)[t])$. Raisonnant par récurrence sur n , on sait que $K' \otimes_Z L$ est intègre, donc que $(K' \otimes_Z L)[t]$ l'est (appliquer 2.2). Ceci prouve c).

3. <u>Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble.</u>

Nous désignons désormais par k un <u>corps de caractéristique</u> 0 , par g une <u>k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie</u>, par $U(g)$ l'algèbre enveloppante de g . Si M est un g-module et si $\lambda \in g^*$, on dit que λ est une <u>valeur propre</u> de g dans M s'il y a un élément non nul $x \in M$ tel que $\gamma x = \lambda(\gamma).x$, $\forall \gamma \in g$. On dit alors que x est un <u>vecteur propre</u>. Si $[M:k] < +\infty$, on dit que M est <u>trigonalisable</u> lorsque les facteurs simples de M sont de dimension 1 .

3.1. LEMME.- Soient M et N deux g-modules trigonalisables et P un sous-g-module de $M \otimes_k N$. Si P contient un vecteur décomposable non nul $a \otimes b$ ($a \in M$, $b \in N$), alors P contient un vecteur décomposable $m \otimes n$ tel que m et n soient des vecteurs propres de M et N.

Pour la démonstration, on pourra se reporter à celle du lemme 1.1 de [5].

3.2. THÉORÈME.- Tout idéal premier I de $U(g)$ est complètement premier.

En effet, supposons d'abord que la représentation adjointe de g dans g est trigonalisable. Soient alors a et b des éléments non nuls de $U(g)/I$ tels que $a.b = 0$. Soient M et N les g-modules engendrés par a et b, et P le noyau de la multiplication $M \otimes_k N \to U(g)/I$. Il est clair que M et N sont trigonalisables. D'après 3.1, il y a donc des vecteurs propres $m \in M$ et $n \in N$ tels que $m \otimes n \in P$, i.e. $m.n = 0$. Si λ est la valeur propre associée à m, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r+1}$ sont des éléments de g, et si $\bar{\gamma}_i$ est l'image de γ_i dans $U(g)/I$, on a donc

$m\bar{\gamma}_{r+1}\bar{\gamma}_r \ldots \bar{\gamma}_1 n = \bar{\gamma}_{r+1} m\bar{\gamma}_r \ldots \bar{\gamma}_1 n - \lambda(\bar{\gamma}_{r+1}) m\bar{\gamma}_r \ldots \bar{\gamma}_1 n$. Par récurrence sur r, on voit donc que $m\bar{\gamma}_{r+1}\bar{\gamma}_r \ldots \bar{\gamma}_1 n = 0$, donc que $m(U(g)/I)n = 0$; ceci est absurde, par définition des idéaux premiers.

Dans le cas général, soit K une extension galoisienne finie de k telle que la représentation adjointe de $g \otimes_k K$ soit trigonalisable. Soit J le plus grand idéal nilpotent de $(U(g)/I) \otimes_k K \simeq U(g \otimes_k K)/I \otimes_k K$. Comme J est stable sous l'action du groupe de Galois, J est de la forme $L \otimes_k K$, où L est un idéal nilpotent de $U(g)/I$. On a donc $L = J = 0$; si $q_1 \ldots q_s$ sont les idéaux premiers minimaux de $(U(g)/I) \otimes_k K$, on a donc $q_1 \cap \ldots \cap q_s = 0$, d'où $\prod_i ((U(g)/I) \cap q_i) = 0$, d'où $(U(g)/I) \cap q_i = 0$ pour un i. On voit donc que 0

est l'image réciproque d'un idéal complètement premier, donc est complètement premier.

3.3. PROPOSITION.- Soient A une k-algèbre, D une k-dérivation de A et I un idéal premier de $A_D[T]$. Alors $A \cap I$ est un idéal premier de A si l'une des conditions suivantes est réalisée :

a) A est la réunion de ses sous-espaces de dimension finie stables sous D ;

b) A est noethérien à droite.

a) On peut évidemment supposer que $I \cap A = 0$. Soient alors a, b des éléments non nuls de A tels que $aAb = 0$. Soient M et N les sous-espaces de A engendrés respectivement par les itérés $D^i a$ et $D^i b$. Quitte à remplacer k par une extension galoisienne finie, on peut supposer que les facteurs simples de M et N pour l'opération de D sont de dimension 1 (raisonner comme en 3.2). Appliquons 3.1 aux représentations de l'algèbre de Lie de dimension 1 définies par D dans M et N. Soit P le sous-espace de $M \otimes_k N$ formé des $\Sigma\, m_j \otimes n_j$ tels qu'on ait $\Sigma\, m_j c n_j = 0$ pour tout $c \in A$. Il est clair que P est stable pour l'endomorphisme $m \otimes n \mapsto Dm \otimes n + m \otimes Dn$. D'après 3.1 on peut donc supposer que a et b sont des vecteurs propres pour D, de valeurs propres λ et μ. On a alors $aT^{n+1}Ab = TaT^nAb - \lambda aT^nAb$, ce qui montre par récurrence sur n que $aT^nAb = 0$, donc que $aA_D[T]b = 0 \subset I$, ce qui est absurde.

b) Nous supposons encore que $A \cap I = 0$. D'après le lemme ci-dessous, les idéaux premiers minimaux $p_1 \dots p_r$ de A sont stables sous D. Leur intersection s est donc stable et elle est nilpotente. On en déduit de suite que l'idéal $s_D[T] = \{s_o + Ts_1 + \dots + T^n s_n \mid s_i \in s\}$ de $A_D[T]$ est nilpotent, donc contenu dans I ; donc $s = 0$, et l'on a

$p_{1D}[T].p_{2D}[T] \dots p_{rD}[T] \subset (p_1 \cap \dots \cap p_r)_D[T] = 0 \subset I$. On a donc $p_{iD}[T] \subset I$ pour un i , d'où $p_i = 0$.

3.4. LEMME.- Soient A une k-algèbre et D une k-dérivation de A . Alors tout idéal premier minimal de A est stable sous D .

En effet, soit $A[[T]]$ l'anneau des séries formelles en une variable T commutant avec les éléments de A . Pour tout idéal $\underline{a}$ de A , $\underline{a}[[T]] = \{a_o + a_1T + \dots , a_i \in \underline{a}\}$ est un idéal fermé pour la topologie naturelle de $A[[T]]$; si $\underline{a}$ est premier, $\underline{a}[[T]]$ l'est ; réciproquement, si $\underline{p}$ est un idéal premier fermé de $A[[T]]$, alors $\underline{p} \cap A$ est premier et $\underline{p}$ contient $(\underline{p} \cap A)[[T]]$. L'application $\underline{a} \mapsto \underline{a}[[T]]$ met donc en correspondance bijective les idéaux premiers minimaux de A , et les idéaux premiers fermés minimaux de $A[[T]]$.

Soit maintenant $\bar{D}$ le prolongement de D à $A[[T]]$ tel que $\bar{D}(a_o + a_1T + \dots) = D(a_o) + D(a_1)T + \dots$. On sait que $\exp T\bar{D}$ est un automorphisme de l'anneau topologique $A[[T]]$. Si $\underline{a}$ est un idéal premier minimal de A , il s'ensuit que $(\exp T\bar{D})(\underline{a}[[T]]) = \underline{p}$ est un idéal premier minimal fermé de $A[[T]]$. Comme, de plus, on a $\underline{p} \cap A = \underline{a}$, on voit que $\underline{p} = \underline{a}[[T]]$, donc que $\underline{a}$ est stable sous D (l'idée d'utiliser l'exponentielle m'a été "soufflée" par P. Cartier).

3.5. Pour tout idéal premier I de $U(\mathfrak{g})$, $U(g)/I$ est un anneau intègre (3.2). Nous notons $k(I)$ son corps des fractions et $C(I)$ le centre de $k(I)$; on dira que $C(I)$ est le coeur de I .

PROPOSITION.- Pour tout idéal premier I de $U(g)$, $k(I)|k$ est une extension

<u>résoluble de corps</u>, <u>donc</u> $C(I)|k$ <u>est une extension de type fini</u> (2.4).

En effet, soit $s(g)$ le socle de g , i.e. le plus grand sous-g-module semi-simple de g supposé muni de l'opération adjointe. Si g est trigonalisable, $s(g)$ est le sous-espace engendré par les vecteurs propres ; donc $s(g)$ est toujours un idéal commutatif (remarquer que la construction de $s(g)$ commute avec l'extension du corps de base ; se ramener ainsi au cas trigonalisable).

Définissons $s^i(g)$ par récurrence sur i : $s^{i+1}(g)/s^i(g) = s(g/s^i(g))$. En raffinant la chaîne $0 \subset s(g) \subset s^2(g) \subset \ldots$ on obtient une suite de sous-algèbres de Lie $0 = g_{-1} \subset g_o \subset g_1 \subset \ldots \subset g_n = g$ telle que $[g_{i+1}/g_i : k] = 1$ et que g_i soit un idéal de g_{i+1} pour tout i . Si $x_i \in g_i$ et $x_i \notin g_{i-1}$ pour tout $i \geq 0$, et si t_i désigne l'image canonique de x_i dans $k(I)$, la suite $t_o, \ldots, t_n$ vérifie les conditions de 2.4.

3.6. Soient $K|k$ une extension de corps commutatifs et $i : U(g) \to U(g \otimes_k K) \simeq U(g) \otimes_k K$ l'application canonique. Si I est un idéal premier de $U(g) \otimes_k K$, $i^{-1}(I)$ est un idéal premier de $U(g)$ (3.2). On définit ainsi une application $\mathrm{Spec}\ i : \mathrm{Spec}\ U(g) \otimes_k K \to \mathrm{Spec}\ U(g)$, qui associe $i^{-1}(I)$ à I .

PROPOSITION.- <u>Soit</u> J <u>un idéal premier de</u> $U(g)$. <u>Il y a une bijection canonique de</u> $\mathrm{Spec}(C(J) \otimes_k K)$ <u>sur la fibre de</u> $\mathrm{Spec}\ i$ <u>au-dessus de</u> J . <u>Si</u> $I \in \mathrm{Spec}\ U(g) \otimes_k K$ <u>est associé à</u> $p \in \mathrm{Spec}\ C(J) \otimes_k K$, <u>on a de plus</u> $C(I) \simeq \mathrm{Fract}((C(J) \otimes_k K)/p)$.

En effet, posons $A = U(g)/J$. La fibre de $\mathrm{Spec}\ i$ au-dessus de J s'identifie à la fibre de $\mathrm{Spec}\ A \otimes_k K \to \mathrm{Spec}\ A$ au-dessus de 0 . Soit $S = A - \{0\}$.

Alors S permet un calcul de fractions (à droite et à gauche) dans $A \otimes_k K$, de sorte que la fibre de $\operatorname{Spec} A \otimes_k K \to \operatorname{Spec} A$ s'identifie d'après 1.4 à l'ensemble des idéaux complètement premiers de $(A \otimes_k K)_S \xrightarrow{\sim} k(J) \otimes_k K \xrightarrow{\sim} k(J) \otimes_{C(J)} (C(J) \otimes_k K)$. Notre assertion résulte donc de 2.5.

3.7. Nous disons qu'un idéal premier I de $U(g)$ est un <u>idéal rationnel</u> si $C(I) = k$. Pour toute extension de corps commutatifs, et pour tout idéal rationnel I de $U(g)$, il résulte alors de 3.6 qu'il y a exactement un idéal premier J de $U(g \otimes_k K)$ tel que $J \cap U(g) = I$; de plus J est rationnel. Si $\mathcal{R}_g(K)$ désigne l'ensemble des idéaux rationnels de $U(g \otimes_k K)$, on a donc défini un foncteur $\mathcal{R}_g : K \mapsto \mathcal{R}_g(K)$, où K parcourt la catégorie des extensions de corps de k .

COROLLAIRE.- <u>Le foncteur des idéaux rationnels</u> $\mathcal{R}_g$ <u>est isomorphe à la somme directe des foncteurs représentés par les coeurs</u> $C(I)$ <u>des idéaux premiers de</u> $U(g)$.

En effet, si J est un idéal rationnel de $U(g \otimes_k K)$, soit $I = J \cap U(g)$. L'application canonique $U(g) \to U(g \otimes_k K)$ induit des homomorphismes $k(I) \to k(J)$ et $\varphi : C(I) \to C(J) \xrightarrow{\sim} K$. L'isomorphisme cherché applique $J \in \mathcal{R}_g(K)$ sur le couple $(I,\varphi) \in \coprod_I \operatorname{Hom}(C(I),K)$. Le corollaire est trivial modulo 3.6.

On voit ainsi que l'<u>étude des idéaux premiers de</u> $U(g)$ <u>et des coeurs associés équivaut à celle du foncteur des idéaux rationnels.</u>

4. Caractérisation des idéaux primitifs.

4.1. LEMME DE QUILLEN.- *Soient* h *une algèbre de Lie de dimension finie sur* k *et* M *un* h*-module simple. Le commutant de* h *est une extension algébrique de* k.

En effet, sinon le commutant de M contient un élément x transcendant sur k et l'opération donnée de x sur M se prolonge à tout le corps des fractions rationnelles $k(x)$. D'un autre côté, on peut définir sur M une structure de module sur l'anneau $V = k[x] \otimes_k U(h)$ en posant $(p \otimes u).m = p(u.m) = u.p(m)$ si $p \in k[x]$, $u \in U(h)$ et $m \in M$. Si $(U_r(h))_{r \geq 0}$ est la filtration naturelle de $U(h)$, on posera $V_r = k[x] \otimes_k U_r(h)$ et $M_r = V_r.m$, où m est un élément non nul de M que l'on se fixe. On fait ainsi de M un module filtré sur l'anneau filtré V. Le gradué associé $Gr(M)$ est un $Gr(V)$-module engendré par $m \in M_o$. Par conséquent, $Gr(M)$ est de type fini sur $Gr(V)$, qui est une algèbre de polynômes sur $k[x]$. D'après *le théorème de platitude générique* ([14], chap. IV, 6.9.2), il y a donc un $f \in k[x]$ tel que $Gr(M)_f = Gr(M_f)$ soit libre sur l'anneau de fractions $k[x]_f$. Alors chaque $(M_{r+1}/M_r)_f$ est libre sur $k[x]_f$, ainsi que M_f. Ceci contredit le fait que M est un $k(x)$-module.

4.2. Rappelons qu'un idéal I d'un anneau A est dit *primitif* si I est l'annulateur d'un A-module simple.

LEMME.- *Soit* g *une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur* k. *Tout idéal semi-premier* I *de* $U(g)$ *est une intersection d'idéaux primitifs.*

D'après 1.5, on peut supposer que I est premier. Le lemme 4.3 ci-dessous nous permet de nous ramener, par une extension finie de k, au cas où g est trigonalisable pour la représentation adjointe.

Posons alors $A = U(g)/I$; il s'agit de montrer que le radical de Jacobson de A est nul. Supposons le contraire : comme le radical est un idéal bilatère, c'est un sous-g-module de A pour la représentation adjointe de g dans A. Le radical contient donc un vecteur propre a, de valeur propre λ.

Montrons que a est algébrique sur k : en effet, sinon $k[a]$ est isomorphe à l'algèbre des polynômes en a. Comme $1 - \mu a$ est inversible pour tout $\mu \in k$, A contient donc l'anneau de fractions $k[a]_S$ relativement à la partie multiplicative S engendrée par les polynômes irréductibles $1 - \mu a$, $\mu \neq 0$ (en nombre infini). Considérons d'autre part le produit tensoriel $V = k[T] \otimes_k U(g)$ muni de la structure de k-algèbre telle que $(1 \otimes \gamma)(T \otimes 1) = T \otimes \gamma + \lambda(\gamma)T \otimes 1$ si $\gamma \in g$. Alors A est un V-module à gauche si l'on pose $(p \otimes u)m = p(a)\bar{u}m$ lorsque $p \in k[T]$, $m \in A$, $u \in U(g)$, et que $\bar{u}$ désigne l'image canonique de u dans A. On filtre V à l'aide des sous-espaces $V_r = k[T] \otimes_k U_r(g)$, et M à l'aide des sous-espaces $V_r.1_A$ (1_A étant l'élément unité de A). La démonstration se termine alors comme en 4.2.

Donc a est algébrique sur k et, pour toute extension finie K de k et tout $\mu \in K$, $1 - \mu a$ est inversible dans $k[a] \otimes_k K \subset A \otimes_k K$. Il s'ensuit que a est nilpotent ; or, si $a^r = 0$, on a aussi $(AaA)^r = 0$ (par exemple si $r = 2$, on a $a\gamma_1 \ldots \gamma_n a = a\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1} a \gamma_n + \lambda(\gamma_n) a\gamma_1 \ldots \gamma_{n-1} a$, lorsque $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in g$; ceci montre par récurrence sur n que $a\gamma_1 \ldots \gamma_n a = 0$). Ceci contredit le fait que A n'a pas d'idéal nilpotent non nul.

4.3. LEMME.- Soient A une algèbre sur k, I un idéal semi-premier de A, et K une extension galoisienne finie de k. Alors $I \otimes_k K$ est semi-premier ; si $I \otimes_k K$ est une intersection d'idéaux primitifs, I l'est.

La première assertion résulte simplement de ce que $\sqrt{I \otimes_k K}$ est stable sous l'action du groupe de Galois, donc est de la forme $J \otimes_k K$.

La deuxième assertion résulte de ce que, si P est un idéal à gauche maximum de $A \otimes_k K$, alors $A/A \cap P$ est semi-simple (de sorte que $A \cap P$ est une intersection d'idéaux à gauche maximaux de A) : en effet, si δ parcourt le groupe de Galois Γ de $K|k$, $\bigcap_{\delta} \delta(P)$ est stable sous Γ, donc coïncide avec $(A \cap P) \otimes_k K$; si $A/A \cap P$ n'était pas semi-simple, $(A/A \cap P) \otimes_k K = (A \otimes_k K)/\bigcap_{\delta} \delta(P)$ ne le serait pas ([2], § 7, n° 3, cor. 2 de la prop. 3).

4.4. LEMME.- Supposons g trigonalisable pour la représentation adjointe, et soit I un idéal premier de $U(g)$. Alors tout élément non nul $z \in C(I)$ s'écrit $z = b^{-1}a$, où b et a sont deux vecteurs propres (de même valeur propre) de $A = U(g)/I$ (muni de l'opération adjointe).

En effet, l'opération adjointe se prolonge à $k(I)$ (1.2) ; soit donc M le sous-g-module de $A \times A$ formé des (x,y) tels que $x = yz$. Comme $(a,b) \in M$, on a $M \neq 0$. Comme $A \times A$ est une réunion de sous-g-modules trigonalisables, M l'est. Donc M contient un vecteur propre.

4.5. LEMME.- Soient g' et g'' des idéaux de g tels que $g'' \subset g'$ et $[g'/g'':k] = 1$. Soit enfin I' un idéal premier de $U(g')$ qui soit stable pour l'opération adjointe de g et tel que k soit le corps des invariants de g dans $C(I')$. Il y a alors au plus un idéal premier I'_o de $U(g')$ qui soit stable sous g, et tel que $I' \subset I'_o$, $I' \neq I'_o$ et $I' \cap U(g'') = I'_o \cap U(g'')$.

En effet, soient $t \in g' - g''$ et D la dérivation induite par t dans

$A'' = U(g'')/I' \cap U(g'')$. Soient $\bar{t}$ l'image de t dans $A' = U(g')/I'$ et $p : A''_D[T] \to A'$ l'application telle que $p(x) = x$ si $x \in A''$ et $p(T) = \bar{t}$. Alors $\mathrm{Ker}\, p$ est un idéal complètement premier de $A''_D[T]$ et l'on a $\mathrm{Ker}\, p \cap A'' = 0$; d'après 1.4, $\mathrm{Ker}\, p$ est donc associé à un idéal complètement premier J de $K_D[T]$, avec $K = \mathrm{Fract}(A'')$. Si $J \neq 0$, J est maximal d'après 2.2, et il n'y a pas de I'_o . Si $J = 0$, p est un isomorphisme, et I'_o est associé à un idéal complètement premier J_o de $K_D[T]$, qui est stable sous g et non nul.

Il suffit de montrer alors qu'il y a au plus un J_o vérifiant ces conditions : or, d'après 2.2, il y a un $a \in K$ tel que $D(x) = [a,x]$ pour tout $x \in K$. Si l'on pose $S = T - a$, S est central ; de plus, g opère sur $K_D[T] = K_o[S]$ de telle manière que $\gamma(S) = \lambda(\gamma)S + \nu(\gamma)$ pour tout $\gamma \in g$ ($\lambda \in g^*$ et $\nu(\gamma) \in K$) . On est donc ramené au lemme 4.6 :

4.6. LEMME.- *Soient* K *une* k-*algèbre dont l'anneau sous-jacent est un corps de centre* Z . *Soit* g *une algèbre de dérivations de* $K_o[T]$ *telle que* K_o *soit stable sous* g , *telle que* k *soit le corps* $Z(T)^g$ *des invariants de* g *dans* $Z(T)$, *et telle qu'on ait* $\gamma(T) = \lambda(\gamma)T + \nu(\gamma)$ *pour tout* $\gamma \in g$ ($\lambda \in g^*$ *et* $\nu(\gamma) \in K$). *Alors il y a au plus un idéal premier non nul* J_o *de* $K_o[T]$ *qui soit stable sous* g .

En effet, d'après 2.2, J_o est engendré par un polynôme irréductible $P = T^n + z_1T^{n-1} + \dots + z_n \in Z[T]$. Si $\gamma \in g$, on a
$\gamma(P) = (nT^{n-1} + (n-1)z_1T^{n-2} + \dots)\gamma(T) + \gamma(z_1)T^{n-1} + \dots + \gamma(z_n) =$
$n\lambda(\gamma)T^n + (n\nu(\gamma) + (n-1)z_1\lambda(\gamma) + \gamma(z_1))T^{n-1} + \dots$. D'où, par comparaison des

coefficients de $\gamma(P)$ et de $n\lambda(\gamma)P$, $n\nu(\gamma) + (n-1)z_1\lambda(\gamma) + \gamma(z_1) = nz_1\lambda(\gamma)$; d'où $\gamma(z_1) = \lambda(\gamma)z_1 - n\nu(\gamma)$ et $\gamma(z_1 + nT) = \lambda(\gamma)(z_1 + nT)$. Quitte à remplacer T par $T + \frac{z_1}{n}$, on peut donc supposer que $\nu(\gamma) = 0$ pour tout γ . On a alors $\gamma(T) = \lambda(\gamma)T$, d'où $\gamma(T^n) = n\lambda(\gamma)T^n$ et $\gamma(P) = n\lambda(\gamma)P$; d'où $P^{-1}T^n \in Z(T)^g = k$, $T^n \in J_o$, $T \in J_o$ et finalement $J_o = (T)$.

4.7. THÉORÈME.- Soit g une algèbre de Lie résoluble de dimension finie sur un corps k de caractéristique 0 , et soit I un idéal premier de $U(g)$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) I est primitif.

(ii) $C(I)$ est une extension algébrique de k .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : en effet, soit $K|k$ une extension galoisienne finie telle que $g \otimes_k K$ soit trigonalisable. Si M est un g-module simple d'annulateur I , $M \otimes_k K$ est un $(g \otimes_k K)$-module semi-simple d'annulateur $I \otimes_k K$. Si $P_1, \ldots, P_r$ sont les annulateurs des composantes isotypiques de $M \otimes_k K$, on a donc $I \otimes_k K = \bigcap_i P_i$, d'où $I = \bigcap_i (P_i \cap U(g))$, d'où $I = P_i \cap U(g)$ pour un i . Alors $C(I) \subset C(P_i)$, et il suffit de montrer que $C(P_i)|K$ est une extension algébrique. Ceci nous ramène au cas où g est trigonalisable.

Dans ce cas, soit $z = b^{-1}a \in C(I)$, a et b étant des vecteurs propres de $A = U(g)/I$ de même valeur propre λ (4.4). Soit a_M l'application $m \mapsto am$ de M dans M . La formule $\gamma_M a_M - a_M \gamma_M = \lambda(\gamma)a_M$, où $\gamma \in g$, montre que $\mathrm{Im}\, a_M$ et $\mathrm{Ker}\, a_M$ sont des g-sous-modules de M . Il s'ensuit que a_M est bijectif, ainsi que b_M ; par conséquent $b_M^{-1}a_M = f$ est défini et appartient au commutant de M , donc est algébrique sur k (4.1). Si l'on a

$f^n + \alpha_1 f^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$, $\alpha_i \in k$, on a aussi $a_M^n + \alpha_1 a_M^{n-1} b_M + \dots + \alpha_n b_M^n = 0$ (a et b commutent), d'où $(a^n + \alpha_1 a^{n-1} b + \dots + \alpha_n b^n)_M = 0$ ... .

(ii) $\Rightarrow$ (i) : en effet, d'après 4.2, il suffit de montrer que l'intersection $\hat{I}$ des idéaux premiers J tels que $I \subset J$ et $I \neq J$, est distincte de I : soit $\bar{k}$ une extension galoisienne finie de k contenant $C(I)$. Pour tout idéal premier P de $U(g)$, l'ensemble des $\bar{P} \in \operatorname{Spec} U(g) \otimes_k \bar{k}$ tels que $\bar{P} \cap U(g) = P$ est fini (3.6) ; comme $\cap \bar{P}$ est stable sous l'action du groupe de Galois de $\bar{k}|k$, on a $\cap \bar{P} = P \otimes_k \bar{k}$. Dans le cas particulier où $P = I$, notons $I_1, \dots, I_r$ les idéaux $\bar{P}$ ainsi obtenus ; les I_i sont rationnels (3.6) ; de plus, si $Q \in \operatorname{Spec} U(g) \otimes_k \bar{k}$, les relations $I_i \subset Q$ et $I_i \neq Q$ impliquent $U(g) \cap Q \neq I$ (3.6) ; enfin, si $Q \cap U(g) = J$, Q contient $I \otimes_k \bar{k} = \cap I_i$, donc contient l'un des I_i . On a donc $\hat{I} \otimes_k \bar{k} = \cap (J \otimes_k \bar{k}) = \bigcap_{Q \to J} Q = \hat{I}_1 \cap \dots \cap \hat{I}_r$.

Si nous montrons que $I_i \neq \hat{I}_i$ pour tout i , on aura $\hat{I}_1 \cap \dots \cap \hat{I}_r \neq I_1 \cap \dots \cap I_r$ d'où $\hat{I} \otimes_k \bar{k} \neq I \otimes_k \bar{k}$.

Nous pouvons donc supposer I rationnel et g trigonalisable : soit g' un idéal de g . Faisons parcourir à J' les idéaux premiers de $U(g')$ qui sont stables pour l'opération adjointe de g et tels que $I' = I \cap U(g') \subsetneq J'$. Nous allons montrer, par récurrence sur $[g':k]$, que $\hat{I}' = \cap J' \neq I'$: en effet, soit g'' un idéal de g tel que $g'' \subset g'$ et $[g'/g'':k] = 1$; posons $I'' = I' \cap U(g'')$. On a alors soit $J' \cap U(g'') \neq I''$ (dans ce cas $J' \supset \hat{I}''$, ce dernier idéal étant défini, mutatis mutandis, comme $\hat{I}'$), soit $J' \cap U(g'') = I''$ (dans ce cas $J' = I'_o$, avec les notations de 4.5). On a donc finalement $\hat{I}' = \cap J' \supset U(g')\hat{I}'' \cap I'_o$; cette intersection n'est pas contenue dans I' .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNAT - Sur le corps enveloppant d'une Algèbre de Lie résoluble. Bull. Soc. Math. France, supplément, mémoire 7.

[2] BOURBAKI - Algèbre, chap. VIII. Hermann.

[3] BOURBAKI - Algèbre Commutative. Hermann.

[4] DIXMIER - Représentations irréductibles des algèbres de Lie nilpotentes. Anais Acad. Brasil Ciencias, 1963.

[5] DIXMIER - Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles. J. math. pures et appl., 1966.

[6] DIXMIER - Sur les algèbres de Weyl. A paraître.

[7] GABRIEL - Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France, 1962.

[8] GOLDIE - Semi-prime rings with maximum condition. Proc. London Math. Soc., 1960.

[9] JACOBSON - Structure of Rings. Amer. Math. Soc. Coll. Publications.

[10] LESIEUR et CROISOT - Anneaux premiers noethériens à gauche. Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 1959.

[11] NOUAZÉ et GABRIEL - Idéaux premiers de l'Algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. J. of Algebra, 1967.

[12] QUILLEN - On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra. A paraître.

[13] RENTSCHLER et GABRIEL - Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 265, p. 712 (1967).

[14] DIEUDONNÉ et GROTHENDIECK - Eléments de Géométrie algébrique. Pub. Math., n° 24.