JEAN-LOUIS KRIVINE

Théorèmes de consistance en théorie de la mesure de R. Solovay

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. n° 357, p. 187-197

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1968-1969__11__187_0>

Séminaire BOURBAKI
21e année, 1968/69, n° 357 Février 1969

THÉORÈMES DE CONSISTANCE EN THÉORIE DE LA MESURE DE R. SOLOVAY

par Jean-Louis KRIVINE

- ZF désigne la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (sans axiome du choix).

- AC désigne l'axiome du choix.

- DC désigne l'axiome du choix dépendant : si r est une relation binaire sur a ($r \subset a \times a$) telle que $(\forall x \in a)\ (\exists y \in a)\ ((x,y) \in r)$, alors, quel que soit $x_o \in a$, il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ d'éléments de a telle que $(x_i, x_{i+1}) \in r$ pour $i = 0,1,2,\ldots$.

Cet axiome est strictement plus faible que l'axiome du choix, mais strictement plus fort que l'axiome du choix dénombrable (le produit d'une famille dénombrable d'ensembles non vides est non vide).

- CI désigne l'axiome : il existe un cardinal inaccessible (c'est-à-dire un cardinal K tel que : pour tout cardinal $\alpha < K$ on a $2^{\alpha} < K$, et pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de cardinaux $< K$, indexée par un cardinal $I < K$ on a $\sup_{i \in I} \alpha_i < K$).

Solovay a montré le théorème suivant :

THÉORÈME 1.- Si la théorie ZF + AC + CI est non-contradictoire, alors la théorie suivante est non-contradictoire également :

ZF + DC + "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est mesurable pour la mesure de Lebesgue".

Noter que ce dernier axiome implique, comme il est facile de le voir, que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est universellement mesurable.

Le théorème 1 est obtenu au moyen du :

THÉORÈME 2.- Si la théorie ZF + AC + CI est non-contradictoire, alors la théorie suivante est non-contradictoire :

ZF + AC + "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ définissable en termes d'ordinaux et de réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue".

On dit qu'un ensemble a est définissable en termes d'ordinaux et de réels, si on a un énoncé $\mathcal{E}(x,\alpha,r)$ à une variable libre x , écrit avec les symboles $\exists$, $\forall$, ou , non , $\in$, $=$, des variables x , y , z ,..., un ordinal α , un réel r , qui caractérise l'ensemble a (c'est-à-dire tel que l'énoncé $\forall x \ [\mathcal{E}(x,\alpha,r) \Leftrightarrow x = a]$ soit vrai).

Le théorème 2 montre, en particulier, qu'on peut admettre sans contradiction, avec l'axiome du choix, l'axiome : "tout sous-ensemble projectif de $\mathbb{R}$ est universellement mesurable" (car un ensemble projectif est défini en termes de réels). K. Gödel a montré inversement dans [1] qu'on peut aussi admettre sans contradiction, avec l'axiome du choix, l'axiome : "il existe un sous-ensemble non mesurable de $\mathbb{R}$ qui est PCA (projection de complémentaire d'analytique)".

On passe du théorème 2 au théorème 1 au moyen du lemme suivant (dont la démonstration est simple et n'utilise pas la notion de forcing) :

LEMME 1.- Si $\mathfrak{M}$ est un modèle de ZF + DC , la classe des objets de $\mathfrak{M}$ héréditairement définissables en termes d'ordinaux et de réels est encore un modèle de ZF + DC .

La démonstration du théorème 2 est basée sur la théorie de Cohen dont nous allons rappeler les résultats essentiels (voir [2]).

La théorie de Cohen.

Un ensemble ordonné C est appelé ensemble de conditions de forcing s'il a la propriété suivante : quels que soient $p , q \in C$, si $p \not\leq q$ il existe $r \in C$, $r \leq p$ tel que q et r n'aient pas de minorant commun dans C .

Les éléments de C sont appelés conditions de forcing (ou simplement conditions) ; si $p \leq q$, on dit que la condition p est plus forte que q ; deux conditions p , q sont dites compatibles si elles ont un minorant commun.

Une partie D de C est dite dense si, pour toute condition p , il existe une condition $r \in D$ plus forte que p .

Considérons un ensemble M qui est un modèle de ZF (quand on le munit de la restriction à M de la relation $\in$) et qui est transitif ($a \in M$ et $b \in a \Rightarrow b \in M$).

Soit C un ensemble de M qui est un ensemble de conditions de forcing ; désignons par $\mathcal{P}_M(C)$ l'ensemble des parties de C qui sont dans M ($\mathcal{P}_M(C) \subset \mathcal{P}(C)$) .

Une partie G de C est dite M-générique sur C si elle satisfait les conditions :

1) $p \in G$, $q \geq p \Rightarrow q \in G$.

2) si $p , q \in G$, les conditions p , q sont compatibles.

3) si $D \in \mathcal{P}_M(C)$ et si D est dense dans C alors $G \cap D \neq \emptyset$.

- Si G est M-générique sur C et est dans le modèle M ($G \in \mathcal{P}_M(C)$) , on montre aisément qu'il existe un élément minimal p de C tel que $G = \{q \in C ; q \geq p\}$. Donc, si C n'a pas d'élément minimal (ce qui est le cas usuel), une partie G de C qui est M-générique, ne peut être dans le modèle M.

- Le lemme ci-dessous donne une condition suffisante pour l'existence de parties M-génériques de C.

LEMME 2.- Si l'ensemble des parties D denses de C qui sont dans M est dénombrable (en particulier si $\mathcal{P}_M(C)$ est dénombrable), pour toute condition p il existe une partie G de C qui est M-générique et telle que $p \in G$.

Soit $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ la suite des parties denses de C qui sont dans M ; on définit par récurrence une suite décroissante $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C : $p_o = p$; p_{n+1} est un élément de D_{n+1} qui minore p_n (il en existe car D_{n+1} est dense). On définit alors $G = \{q \in C$; il existe un entier $n \geq 0$ tel que $q \geq p_n\}$.

Alors la condition 1 ci-dessus est évidemment satisfaite. Si $q, q' \in G$, on a $q \geq p_n$, $q' \geq p_{n'}$ et, par exemple $n \geq n'$; alors p_n est un minorant commun de q et q'. Enfin si D_n est une partie dense de C qui est dans M on a $p_n \in D_n \cap G$, donc $D_n \cap G \neq \emptyset$. C.Q.F.D.

La propriété essentielle des parties M-génériques de C s'exprime par le

THÉORÈME 3.- Si G est une partie M-générique de C, il existe un plus petit modèle transitif N. de ZF qui contient $M \cup \{G\}$. Ce modèle, noté $M[G]$, a les mêmes ordinaux que M.

Notons de plus que $M[G]$ satisfait l'axiome du choix, si M le satisfait.

- Etant donné un énoncé clos $\mathcal{E}(\Gamma)$ de théorie des ensembles, écrit avec un symbole de constante Γ , on dit que la condition p force $\mathcal{E}(\Gamma)$ (ce qu'on note $p \Vdash \mathcal{E}(\Gamma)$) si $\mathcal{E}(G)$ est vrai dans le modèle $M[G]$ pour toute partie G M-générique de C telle que $p \in G$.

Supposons, à partir de maintenant que l'hypothèse du lemme 2 est satisfaite (ce qui est le cas, par exemple, si le modèle M est dénombrable). On montre alors qu'on a les propriétés suivantes :

- Pour chaque énoncé clos $\mathcal{E}(\Gamma)$ écrit avec le symbole de constante Γ , l'ensemble des conditions p qui forcent $\mathcal{E}(\Gamma)$ est une partie de C qui est dans le modèle M .

- Si G est M-générique sur C , et si $\mathcal{E}(G)$ est vrai dans le modèle $M[G]$, il existe $p \in G$ tel que $p \Vdash \mathcal{E}(\Gamma)$ (autrement dit $\mathcal{E}(G')$ est vrai dans $M[G']$ pour toute partie G' M-générique de C telle que $p \in G'$).

Destruction des cardinaux.

Considérons un modèle transitif dénombrable M de ZF + AC . Soit K un cardinal de M , $K \neq \aleph_0$; on prend comme conditions de forcing les applications définies sur une partie finie de $\mathbb{N}$, à valeurs dans K . Si p , q sont deux telles applications, on pose $p \leq q$ si et seulement si p est un prolongement de q .

Soit G une partie de cet ensemble C de conditions de forcing qui est M-générique. On lui associe une application $g : \mathbb{N} \to K$ en posant $g(n) = \alpha$ si et seulement s'il existe $p \in G$ telle que $p(n)$ soit définie et égale à α ;

en effet : si p , $q \in G$ et si $p(n)$ et $q(n)$ sont définies, alors $p(n) = q(n)$ puisque (condition 2 de définition des génériques) p et q sont compatibles, c'est-à-dire ont un prolongement commun. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \in G$ tel que $p(n)$ soit définie ; car $\{p \in C$; $p(n)$ est définie$\}$ est une partie dense de C puisque toute condition possède évidemment un prolongement défini en n ; d'après la condition 3 de définition des génériques, il y a une telle condition dans G .

- Notons que cette application g détermine G : car on voit aisément que G est l'ensemble des restrictions de g aux parties finies de $\mathbb{N}$. On dira que g est une application M-générique de $\mathbb{N}$ dans K .

- Or une telle application est surjective : en effet si $\alpha \in K$, l'ensemble $\{p \in C$; p prend la valeur $\alpha\}$ est dense dans C : pour toute condition p , il y a évidemment un prolongement de p qui prend la valeur α . Donc (condition 3 de définition des génériques) l'un des éléments p de G prend la valeur α , donc aussi g .

Par suite l'ordinal K , qui est un cardinal non dénombrable dans M est dénombrable dans le modèle $M[g]$ (et n'est donc plus un cardinal dans ce modèle).

On peut, de même, au moyen d'ensembles génériques "détruire" tous les cardinaux d'une famille $(K_i)_{i\in I}$ de cardinaux de M . On prend comme ensemble C de conditions l'ensemble des familles finies $(f_i)_{i\in J}$, chaque f_i étant une application définie sur une partie finie de $\mathbb{N}$ à valeurs dans K_i .

Une partie G de C qui est M-générique est alors donnée par une famille $(g_i)_{i\in I}$, chaque g_i étant une application de $\mathbb{N}$ <u>sur</u> K_i (condition nécessaire mais non suffisante pour que la famille $(g_i)_{i\in I}$ soit M-générique).

Si on cherche par cette méthode à détruire tous les cardinaux de M qui sont $< \aleph_\alpha$ (α étant un ordinal limite) sans pour cela détruire $\aleph_\alpha$, il faut que $\aleph_\alpha$ ne soit cofinal à aucun ordinal $< \aleph_\alpha$: car si

$\aleph_\alpha = \sup_{\lambda<\mu} K_\lambda$ avec $K_\lambda < \aleph_\alpha$ et $\mu < \aleph_\alpha$, dans $M[G]$, μ devient dénombrable, donc la famille $(K_\lambda)_{\lambda<\mu}$ devient une suite d'ordinaux dénombrable, et donc $\aleph_\alpha$ devient aussi dénombrable. Donc $\aleph_\alpha$ doit être faiblement inaccessible (c'est-à-dire α est un ordinal limite et $\aleph_\alpha$ n'est cofinal à aucun ordinal strictement inférieur) ; si M satisfait l'hypothèse généralisée du continu, cela revient à dire que $\aleph_\alpha$ est inaccessible.

Le modèle de Solovay.

On suppose la théorie ZF + AC + CI non-contradictoire. Alors, au moyen d'une technique classique (schéma de réflexion et théorème de Löwenheim-Skolem) on en déduit que la théorie suivante (écrite à l'aide des symboles $\in$, $=$, et d'un symbole de constante M) est aussi non-contradictoire :

$ZF + AC + CI + ZF^M + AC^M + CI^M$ + " M est un ensemble transitif dénombrable ". (Pour chaque axiome A , A^M désigne l'axiome " M satisfait A ".) M est donc un modèle transitif dénombrable de ZF + AC + CI . Désignons par π $(=\aleph_\pi)$ le premier cardinal inaccessible de M . Soit C l'ensemble de conditions de forcing formé des familles finies (f_α) $(\alpha<\pi)$, f_α étant une application d'une partie finie de $\mathbb{N}$ dans $\aleph_\alpha$. Soit G un ensemble M-générique sur C ; G est donné par une famille $(g_\alpha)_{\alpha<\pi}$, chaque g_α étant une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\aleph_\alpha$.

On montre que $M[G]$ est le modèle cherché, c'est-à-dire qu'il satisfait l'axiome "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ définissable en termes d'ordinaux et de réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue". Donnons brièvement les étapes de la démonstration.

- Le fait que π est inaccessible permet de montrer le

LEMME 3.- <u>Tout ensemble de conditions deux à deux incompatibles est de cardinal</u> $< \pi$.

Notons que le lemme 3 implique que le cardinal π de M reste un cardinal dans $M[G]$ (comme c'est le premier cardinal de M qui n'est pas détruit, c'est le cardinal $\aleph_1$ de $M[G]$).

- Pour chaque $\alpha < \pi$ on a $C = C_\alpha \times C^\alpha$, où C_α est l'ensemble des familles (f_β) $(\beta<\alpha)$ et C^α l'ensemble des familles (f_β) $(\beta\geq\alpha)$ (f_β étant une application définie sur une partie finie de $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\aleph_\beta$). C_α et C^α sont des ensembles de conditions de forcing. On a alors, pour chaque $\alpha < \pi$, $M[G] = M[G_\alpha][G^\alpha]$, où $G_\alpha = (g_\beta)_{\beta<\alpha}$ est M-générique sur C_α , et $G^\alpha = (g_\gamma)_{\gamma\geq\alpha}$ est $M[G_\alpha]$-générique sur C^α .

- On considère dans $M[G]$ un sous-ensemble X de $[0,1]$ définissable en termes d'ordinaux et de réels ; d'où un énoncé $\mathcal{E}(x,\delta,t)$ à une variable libre x , écrit avec $\in$, $=$, un ordinal δ et un réel t de $M[G]$, tel que dans $M[G]$ on ait $\forall x\ [x \in X \Leftrightarrow \mathcal{E}(x,\delta,t)]$.

Le lemme 2 permet de montrer qu'il existe un ordinal $\alpha < \pi$ tel que $t \in M[G_\alpha]$. Donc si on pose $M' = M[G_\alpha]$, $C' = C^\alpha$, $G' = G^\alpha$, on a $M[G] = M'[G']$ et l'ensemble X est défini dans $M'[G']$ par un énoncé $\mathcal{E}(x)$ à une variable libre x , écrit avec $\in$, $=$, et des éléments δ , t de M' . De plus π est encore inaccessible dans M' , et G' détruit tous les cardinaux de M' qui sont $< \pi$.

- L'outil essentiel pour la suite de la démonstration est la notion de réel aléatoire : un réel r de $M[G]$, $0 \leq r \leq 1$ est dit aléatoire sur M' s'il appartient à tous les boréliens de $[0,1]$ de mesure 1 définissables dans M' . Comme dans M' il y a $\aleph_1$ boréliens, et que le cardinal $\aleph_1$ de M' est détruit dans $M[G]$, l'ensemble des réels aléatoires sur M' est un borélien de mesure 1 dans $M[G]$: car c'est l'intersection d'une famille dénombrable de boréliens de mesure 1 .

Soit $\mathcal{B}_{M'}$ l'algèbre de Boole des boréliens de $[0,1]$ dans M' (modulo les boréliens de mesure nulle), et soit $\mathcal{B}^*_{M'} = \mathcal{B}_{M'} - \{0\}$. Alors $\mathcal{B}^*_{M'}$ est un ensemble de conditions de forcing, et on montre que les M'-génériques sur $\mathcal{B}^*_{M'}$ sont canoniquement associés aux réels aléatoires sur M' . La correspondance se fait de la façon suivante : si H est M'-générique sur $\mathcal{B}^*_{M'}$, il lui est associé le réel aléatoire r tel que, pour tout borélien B de $M[G]$ défini dans M' , on ait $B \in H \Leftrightarrow r \in B$.

On montre alors qu'on peut construire un énoncé $\mathcal{E}'(x)$ à une variable libre, à paramètres dans M' qui a la propriété suivante : pour tout réel r de $M[G]$ aléatoire sur M' , $\mathcal{E}(r)$ est vrai dans $M[G]$ si et seulement si $\mathcal{E}'(r)$ est vrai dans le modèle $M'[r]$ (c'est le point le plus technique, mais essentiel dans la démonstration).

Il en résulte que, si r est un réel aléatoire sur M' on a :

$$r \in X \Leftrightarrow \mathcal{E}'(r) \text{ est vrai dans } M'[r] .$$

Or, pour que $\mathcal{E}'(r)$ soit vrai dans $M'[r]$, il faut et il suffit qu'il existe une condition B de $\mathcal{B}^*_{M'}$, appartenant au M'-générique associé à r

(c'est-à-dire telle que $r \in B$) qui force l'énoncé $\mathcal{E}'(\rho)$ (écrit avec un symbole de constante ρ).

Or $\{B \in \mathcal{B}^*_{M'} \; ; \; B \Vdash \mathcal{E}'(\rho)\}$ est un ensemble de M' . Donc la réunion Δ des boréliens B de $M[G]$ définis dans M' tels que B force $\mathcal{E}'(\rho)$ est un ensemble de $M[G]$. Comme c'est la réunion d'une famille dénombrable de boréliens (dans M' il y a $\aleph_1$ boréliens, donc dans $M[G]$ il y a $\aleph_0$ boréliens définis dans M'), Δ est lui-même un borélien de $M[G]$.

Or pour tout réel r de $M[G]$ aléatoire sur M' on a $r \in X \Leftrightarrow r \in \Delta$. Comme l'ensemble des réels aléatoires sur M' est un borélien de mesure 1 , on voit que $|X - \Delta|$ est de mesure nulle, ce qui montre que X est mesurable pour la mesure de Lebesgue.

Remarque.

Le problème suivant reste ouvert : la non-contradiction de ZF implique-t-elle celle de ZF + DC + "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est mesurable" (ou, ce qui revient au même, celle de ZF + AC + "tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$, définissable en termes d'ordinaux et de réels, est mesurable"). Dans cette direction, Solovay a montré le théorème suivant : la non-contradiction de ZF implique celle de ZF + DC + "il existe une mesure dénombrablement additive sur la σ-algèbre de toutes les parties de $\mathbb{R}$, qui est invariante par translation et prolonge la mesure de Lebesgue".

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. GÖDEL - <u>The consistency of the continuum hypothesis</u>, Annals of Math. Studies n° 3.

[2] P. J. COHEN - <u>Set theory and the continuum hypothesis</u>, (Benjamin).