MICHEL DEMAZURE

# Structure des groupes réductifs

*Séminaire N. Bourbaki*, 1968, exp. n° 313, p. 5-11
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__5_0>

Séminaire BOURBAKI

19e année, 1966/67, nº 313 Novembre 1966

# STRUCTURE DES GROUPES RÉDUCTIFS

(d'après BOREL-TITS)

par Michel DEMAZURE

Cet exposé est une liste incomplète des résultats contenus dans l'article de A. BOREL et J. TITS : Groupes réductifs, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., nº 27, p. 55-150. En particulier, les paragraphes 6, 7, 11 et 12 de cet article ne sont pas exposés ci-dessous.

Dans la suite, $k$ désigne un corps commutatif, $\bar{k}$ une clôture algébrique de $k$, et $G$ un $k$-groupe réductif connexe. Si $H$ est un $k$-groupe algébrique, on désigne par $H(k)$ le groupe des points de $H$ rationnels sur $k$ et par $H_{\bar{k}}$ le groupe obtenu par extension du corps de base de $k$ à $\bar{k}$.

## 1. Groupes paraboliques.

1.1. On appelle <u>sous-groupe parabolique</u> de $G$ un sous-groupe lisse $P$ de $G$ tel que $P_{\bar{k}}$ contienne un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{k}}$.

1.2. Un sous-groupe parabolique $P$ de $G$ est connexe, est son propre normalisateur, et $G/P$ est projectif.

1.3. Un sous-groupe parabolique $P$ de $G$ possède un plus grand sous-groupe invariant unipotent connexe, son <u>radical unipotent</u> $R^u(P)$. Le quotient $P/R^u(P)$ est réductif. De plus, $P$ possède des sous-groupes de Levi, c'est-à-dire des sous-groupes $L$ tels que le morphisme composé $L \longrightarrow P \longrightarrow P/R^u(P)$ soit un isomorphisme.

Si $L$ et $L'$ sont deux sous-groupes de Levi de $P$, ils sont conjugués : plus précisément, il existe un unique $x \in R^u(P)(k)$ tel que $L' = x L x^{-1}$.

1.4. Le groupe $R^u(P)$ possède une suite de composition dont les quotients sont "des espaces vectoriels" ; en particulier $H^1(k, R^u(P)) = 0$.

1.5. Soient $P$ un sous-groupe parabolique de $G$ et $L$ un sous-groupe de Levi de $P$ ; il existe un unique sous-groupe parabolique $P'$ de $G$ tel que $P' \cap P = L$. Le morphisme induit par le produit dans $G$

$$R^u(P') \times P \longrightarrow G$$

est une immersion ouverte et $G = R^u(P)(k).R^u(P')P$.

1.6. Par conséquent, les fibrations $G \longrightarrow G/P$ et $G \longrightarrow G/L$ sont localement triviales, et $(G/P)(k) = G(k)/P(k)$, $(G/L)(k) = G(k)/L(k)$.

## 2. <u>Théorèmes de conjugaison.</u>

2.1. Soient $P$ et $P'$ deux sous-groupes paraboliques de $G$. Si $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ contiennent le même sous-groupe de Borel de $G$, $P \cap P'$ est un sous-groupe parabolique de $G$. Si de plus $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ sont conjugués par un élément de $G(\bar{k})$, alors $P = P'$.

2.2. <u>Si</u> $P$ <u>et</u> $P'$ <u>sont deux sous-groupes paraboliques de</u> $G$, <u>il existe</u> $x \in G(k)$ <u>tel que</u> $x P x^{-1} \cap P'$ <u>soit un sous-groupe parabolique de</u> $G$.

2.3. En particulier, si $P_{\bar{k}}$ et $P'_{\bar{k}}$ sont conjugués, alors $P$ et $P'$ sont conjugués.

2.4. Les sous-groupes paraboliques <u>minimaux</u> de $G$ sont <u>conjugués.</u>

## 3. Tores triviaux.

3.1. Soit $S$ un sous-tore trivial de $G$, et $L$ le centralisateur de $S$. Il existe un sous-groupe parabolique $P$ de $G$ dont $L$ soit un sous-groupe de Levi. Réciproquement, si $P$ est un sous-groupe parabolique de $G$ et $L$ un sous-groupe de Levi de $P$, $L$ est le centralisateur de l'unique sous-tore trivial maximal de son centre (qui est de type multiplicatif).

3.2. En particulier, les sous-groupes de Levi $L$ des sous-groupes paraboliques minimaux de $G$ et les sous-tores triviaux maximaux $S$ de $G$ se correspondent biunivoquement de la façon suivante : à $L$ correspond son tore central trivial maximal $S$, à $S$ son centralisateur $L$. Il en résulte que les sous-tores triviaux maximaux de $G$ sont conjugués.

3.3. Pour que $G$ ne possède aucun sous-groupe parabolique distinct de lui-même, il est donc nécessaire et suffisant qu'il ne possède aucun sous-tore trivial non central.

3.4. On dit que $G$ est anisotrope, s'il ne possède aucun sous-tore trivial non nul ; pour que $G$ soit anisotrope, il est donc nécessaire et suffisant que $G$ ne possède aucun sous-groupe parabolique propre et que son centre soit anisotrope. Cette dernière condition peut se remplacer par $\mathrm{Hom}(G,\underline{G}_{m\,k}) = 0$.

3.5. Si $L$ est un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique minimal de $G$, et si $S$ est son tore central trivial maximal, il existe un unique sous-groupe lisse et connexe $M$ de $L$ tel que le morphisme produit $M \times S \longrightarrow L$ soit une isogénie, c'est-à-dire tel que $L = M.S$ et que $M \cap S$ soit fini sur $k$ ; de plus $M$ est un groupe réductif anisotrope.

3.6. Si $P$ est un sous-groupe parabolique minimal de $G$, on peut donc écrire $P = M.S.U$, où $M$ est anisotrope, $S$ est un tore trivial maximal de $G$, et $U = R^u(P)$ ; on a $M.S \cap U = e$ et $M \cap S$ est fini.

## 4. Système de racines relatif.

4.1. Soit $S$ un sous-tore trivial maximal de $G$, et soit $L$ son centralisateur. Notons $N$ le normalisateur de $S$ et $W = N(k)/L(k)$. On a aussi $W = (N/L)(k)$ et $N/L$ est le groupe algébrique constant associé à $W$.

4.2. Soit $V$ le $\underline{\underline{Q}}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(S, \underline{\underline{G}}_{m\,k}) \otimes \underline{\underline{Q}}$ et soit $R$ l'ensemble des poids non nuls de la représentation adjointe de $S$ sur l'algèbre de Lie de $G$. Le groupe $W$ opère fidèlement sur $V$ et laisse $R$ stable. Alors $(V, R, W)$ est un système de racines : pour chaque $r \in R$, il existe un unique $r^* \in V^*$ tel que $r^*(R) \subset \underline{\underline{Z}}$ et que $x \longmapsto x - r^*(x)\, r$ soit un élément de $W$. Ce système de racines n'est pas nécessairement réduit.

4.3. Pour tout sous-groupe $H$ de $G$ contenant $L$, notons $R(H)$ l'ensemble des poids de $S$ dans l'algèbre de Lie de $H$. Alors $P \longmapsto R(P)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques (minimaux) de $G$ de groupe de Levi $L$ sur l'ensemble des systèmes de racines positives de $R$.

4.4. De même, si $P$ est un sous-groupe parabolique (minimal) de sous-groupe de Levi $L$, l'application $Q \longmapsto R(Q)$ est une bijection de l'ensemble des sous-groupes paraboliques $Q$ de $G$ contenant $P$ sur l'ensemble des parties closes de $R$ contenant $R(P)$ ; en vertu de la théorie des systèmes de racines, ces parties correspondent bijectivement aux parties de l'ensemble des racines simples de $R(P)$.

4.5. En vertu des théorèmes de conjugaison, on peut énoncer le résultat précédent comme suit : l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques de $G$ est naturellement isomorphe à l'ensemble des parties d'un système de racines simples de $R$ ; par exemple, aux sous-groupes paraboliques minimaux correspond la partie vide, au groupe $G$ la partie pleine.

4.6. On peut montrer que le groupe $G$ est déterminé à isomorphisme près par la partie anisotrope $M$ de $L$ et par le système de racines relatif convenablement tordu par l'action du groupe de Galois de $\bar{k}/k$.

Remarque.- A la terminologie près, tous les résultats précédents sont valables lorsque $k$ est un anneau semi-local connexe, par exemple un anneau local ; $\bar{k}$ désigne alors une extension étale (ou fidèlement plate) convenable de $k$, par exemple une clôture strictement locale de $k$ (voir S.G.A.D., XXVI). En revanche les résultats du n° suivant sont particuliers au cas d'un corps de base.

## 5. Théorème de Bruhat relatif.

5.1. Soient $P$ et $P'$ deux sous-groupes paraboliques de $G$ ; si $P(k) = P'(k)$ alors $P = P'$. Si $\bar{P}$ est un sous-groupe de $G(k)$ contenant l'ensemble des points rationnels d'un sous-groupe parabolique de $G$, alors $\bar{P} = P(k)$ pour un sous-groupe parabolique convenable $P$ de $G$.

5.2. L'intersection de deux sous-groupes paraboliques de $G$ contient toujours le centralisateur d'un tore trivial maximal.

5.3. Soient $P$ un sous-groupe parabolique minimal de $G$, $L$ un sous-groupe de Levi de $P$, $S$ son tore central trivial maximal, $N$ le normalisateur de $S$.

Alors $(P(k), N(k))$ est une (BN)-paire au sens de Tits dans $G(k)$ (ou une paire de Tits au sens de B(ourbaki)N(icolas)), dont le groupe de Weyl est $W$ .

5.4. En particulier, l'application $n \longmapsto P(k).n.P(k)$ de $N(k)$ dans l'ensemble des parties de $G(k)$ , induit une bijection de $W$ sur l'ensemble des doubles classes de $G(k)$ modulo $P(k)$ .

5.5. En vertu de 5.1, sous-groupes paraboliques de $G$ et sous-groupes paraboliques de $G(k)$ (au sens de la paire de Tits précédente) se correspondent bijectivement par $P \longmapsto P(k)$ .

Remarque.- Tous les résultats de ce n° sont déjà faux pour le groupe $\underline{\underline{SL}}_2$ sur l'anneau artinien local $\underline{\underline{Z}}/4\underline{\underline{Z}}$ .

## 6. Compléments et applications.

6.1. Supposons $k$ parfait. Alors les sous-groupes trigonalisables (resp. unipotents) lisses connexes maximaux de $G$ sont conjugués.

6.2. Si $k$ est de caractéristique $0$ , les sous-groupes unipotents maximaux de $G$ sont les radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques minimaux de $G$ . En particulier $G$ est anisotrope si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées : $\mathrm{Hom}(G, \underline{\underline{G}}_{m\,k}) = 0$ , tout élément de $G(k)$ est semi-simple.

6.3. Si $k$ est localement compact et de caractéristique $0$ , un sous-groupe $H$ de $G$ contient un sous-groupe trigonalisable lisse connexe maximal si et seulement si $(G/H)(k)$ est compact (ou encore $G(k)/H(k)$ est compact). En particulier, $G$ est anisotrope si et seulement si $G(k)$ est compact.

6.4. Si $k$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ , $G(k)$ est engendré par une partie compacte.

6.5. Supposons enfin $k = \mathbb{R}$ . Soit $K$ un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$ , et soit $G(\mathbb{R}) = K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa de $G(\mathbb{R})$ . Alors il existe un tore trivial maximal $S$ de $G$ et un sous-groupe parabolique minimal $P$ de groupe de Levi le centralisateur de $S$ , tels que $N = R^u(P)(\mathbb{R})$ et $A$ soit la composante neutre du groupe topologique $S(\mathbb{R})$ . En particulier $W$ et $R$ s'identifient au groupe de Weyl et à l'ensemble des racines de la paire symétrique $(G(\mathbb{R}),K)$ .

## ERRATUM

Page 313-05 - Supprimer les lignes 6, 7 et 8.