CLAIRE DELAROCHE
ALEXANDRE KIRILLOV

# Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés

*Séminaire N. Bourbaki*, 1968, exp. n° 343, p. 507-528
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__507_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 343 Juin 1968

# SUR LES RELATIONS ENTRE L'ESPACE DUAL D'UN GROUPE ET LA STRUCTURE DE SES SOUS-GROUPES FERMÉS

(d'après D. A. KAJDAN [7])

par Claire DELAROCHE et Alexandre KIRILLOV

Cet article est un exposé détaillé des résultats brièvement démontrés par D. A. Kajdan dans [7]. Par rapport à [7], nous avons un peu modifié le plan de l'exposé, corrigé la formulation d'un théorème auxiliaire et ajouté l'étude du groupe $Sp(4,K)$ , ce qui permet d'étendre le théorème principal au cas des groupes de rang 2 . Nous renvoyons le lecteur désireux de se dispenser des démonstrations techniques qui alourdissent le texte à l'élégant exposé de Kajdan.

## § 0.- Introduction.

Dans cet article on étudie la structure de certains sous-groupes discrets $\Gamma$ de groupes de Lie $G$ (réels ou $\mathfrak{p}$-adiques). On démontre en particulier que si $\Gamma$ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie simple de rang déployé (*) $\geq 2$ tel que le volume de $G/\Gamma$ soit fini, alors $\Gamma$ a un nombre fini de générateurs et $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini. Dans le cas réel le premier résultat donne une réponse positive à une partie de la conjecture de Selberg sur la finitude du nombre de faces du polyèdre fondamental. Pour démontrer ces résultats on utilise la structure topologique de l'espace dual $\hat{\Gamma}$ de $\Gamma$ , c'est-à-dire de l'espace des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de $\Gamma$ . L'article se compose de

(*) On appelle rang déployé d'un tel groupe la dimension de ses tores déployés maximaux.

trois paragraphes. Dans le paragraphe 1, on montre comment la structure topologique de $\hat{\Gamma}$ est liée à certaines propriétés algébriques de $\Gamma$ . Dans le paragraphe 2, on montre comment on peut obtenir des renseignements sur la structure topologique de $\hat{\Gamma}$ à partir de celle de $\hat{G}$ . Enfin, dans le paragraphe 3, on étudie $\hat{G}$ dans le cas où $G$ est un groupe de Lie semi-simple dont toutes les composantes simples sont de rang déployé $\geq 2$ .

## § 1.- Définition de la propriété (T) et ses conséquences.

Tous les groupes que nous considérons dans cet article sont supposés localement compacts et séparables. $G$ étant un tel groupe, nous noterons $\tilde{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires de $G$ de dimension inférieure ou égale à $\chi_0$ et $\hat{G} \subset \tilde{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations unitaires irréductibles de $G$ . Pour $T \in \tilde{G}$ , $\varepsilon > 0$ , $K$ sous-ensemble compact de $G$ et $\xi_1,\dots,\xi_n$ vecteurs unitaires de l'espace d'une représentation de la classe $T$ , soit $V(\varepsilon,K,\xi_1,\dots,\xi_n,T)$ l'ensemble des éléments $T' \in \tilde{G}$ tels qu'il existe des vecteurs unitaires $\eta_1,\dots,\eta_n$ dans l'espace d'une représentation de la classe $T'$ satisfaisant

$$|\langle T'(g)\eta_i|\eta_j\rangle - \langle T(g)\xi_i|\xi_j\rangle| \leq \varepsilon$$

pour $i$ , $j = 1,\dots,n$ et $g \in K$ . Nous munirons $\tilde{G}$ de la topologie pour laquelle les ensembles $V(\varepsilon,K,\xi_1,\dots,\xi_n,T)$ forment un système fondamental de voisinages de $T$ . On peut donner une autre définition de cette topologie sur $\tilde{G}$ . Soit $C^*(G)$ la $C^*$-algèbre du groupe $G$ . On sait que $\tilde{G}$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des classes d'équivalence des représentations non dégénérées de $C^*(G)$ de dimension inférieure ou égale à $\chi_0$ .

Pour $T \in \widetilde{G}$, $\epsilon > 0$, $a_1,\dots,a_p \in C^*(G)$ et $\xi_1,\dots,\xi_n$ vecteurs unitaires de l'espace d'une représentation de la classe $T$ soit $V(\epsilon,a_1,\dots,a_p,\xi_1,\dots,\xi_n,T)$ l'ensemble des éléments $T' \in \widetilde{G}$ tels qu'il existe des vecteurs unitaires $\eta_1,\dots,\eta_n$ dans l'espace d'une représentation de la classe $T'$ satisfaisant

$$|\langle T'(a_k)\eta_i|\eta_j\rangle - \langle T(a_k)\xi_i|\xi_j\rangle| \leq \epsilon$$

pour $k = 1,\dots,p$ et $i$, $j = 1,\dots,n$. On démontre comme dans [4] lemme 1.1, que la topologie pour laquelle les ensembles $V(\epsilon,a_1,\dots,a_p,\xi_1,\dots,\xi_n,T)$ forment un système fondamental de voisinages de $T$ est la même que celle précédemment définie. Remarquons que dans cette topologie, chaque point possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Restreinte à $\hat{G}$, cette topologie est la topologie habituelle définie par exemple comme topologie de Jacobson lorsqu'on identifie $\hat{G}$ au spectre de $C^*(G)$. Pour cette topologie, un point $T$ est adhérent à une partie $S$ de $\hat{G}$ ou faiblement contenu dans $S$ si et seulement si le noyau de $T$ contient l'intersection des noyaux des éléments de $S$.

Quel que soit le groupe considéré, nous noterons toujours dans la suite $T_o$ la classe d'équivalence de sa représentation irréductible triviale.

LEMME 1.- *Etant donné un groupe* $G$, *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) $T_o$ *est isolé dans* $\hat{G}$ ;

(ii) *si une suite* $T_n$ *d'éléments de* $\widetilde{G}$ *tend vers* $T_o$ *dans* $\widetilde{G}$, *il existe* $n_o$ *tel que pour tout* $n \geq n_o$ *la représentation* $T_n$ *contienne* $T_o$ ;

(iii) *si* $T_o$ *est adhérent, dans* $\widetilde{G}$, *à un élément* $T$ *de* $\widetilde{G}$, *alors* $T_o$ *est contenu dans* $T$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $T_o$ soit isolé dans $\hat{G}$. Ce point possède un voisinage $V(\varepsilon,f_1,\ldots,f_p,T_o)$ dans $\widetilde{G}$ dont l'intersection avec $\hat{G}$ est réduite à $T_o$. On peut supposer que les éléments $f_1,\ldots,f_p$ de $C^*(G)$ sont des fonctions positives intégrables sur $G$ d'intégrale $1$. Soit $T_n$ une suite d'éléments de $\widetilde{G}$ qui converge vers $T_o$ dans $\widetilde{G}$, et soit $n_o$ un entier tel que pour tout $n \geq n_o$ il existe un vecteur unitaire $\xi_n$ dans $H_n$, espace d'une représentation de la classe $T_n$, satisfaisant $|\langle T_n(f_i)\xi_n|\xi_n\rangle - 1| \leq \frac{\varepsilon^2}{4p}$ pour $i = 1,\ldots,p$. Fixons-nous $n \geq n_o$ et décomposons $T_n$ en composantes irréductibles. Il existe ([3], th. 8.3.2) un espace borélien $Z$, une mesure $\mu$ positive bornée sur $Z$, un champ mesurable $z \mapsto \pi(z)$ de représentations irréductibles de $C^*(G)$ dans $H(z)$ et un isomorphisme de $H_n$ sur $\int^{\oplus} H(z)d\mu(z)$ qui transforme $T_n$ en $\int^{\oplus} \pi(z)d\mu(z)$. Dans cet isomorphisme, $\xi_n$ se transforme en $\int^{\oplus} v(z)d\mu(z)$ et on a

$$\left| \int_{Z_1} \langle\pi(z)(f_i)v(z)|v(z)\rangle d\mu(z) - 1\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{4p} \quad \text{pour } i = 1,\ldots,p ,$$

où $Z_1$ désigne l'ensemble mesurable des points $z$ tels que $v(z) \neq 0$. On peut, en prenant une mesure équivalente à $\mu$, supposer que $\| v(z)\| = 1$ sur $Z_1$ et $0$ ailleurs. On a alors

$$\left| \int_{Z_1} (1 - \langle\pi(z)(f_i)v(z)|v(z)\rangle)d\mu(z)\right| \leq \frac{\varepsilon^2}{4p} \quad \text{pour } i = 1,\ldots,p .$$

Puisqu'on a $1 - \mathrm{Re}\langle\pi(z)(f_i)v(z)|v(z)\rangle \geq 0$, il existe pour tout $i$ un ensemble mesurable $M_i$ dans $Z_1$ tel que $1 - \mathrm{Re}\langle\pi(z)(f_i)v(z)|v(z)\rangle \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$ sur $M_i$. L'ensemble $M = \cap M_i$ n'est pas négligeable car la mesure de $Z_1$ vaut $1$ et celle de chaque ensemble $Z_1 - M_i$ est majorée par $1/2p$. Pour $z \in M$ et $i = 1,\ldots,p$, on a

$$|1 - \langle\pi(z)(f_i)v(z)|v(z)\rangle| \leq \varepsilon .$$

Il en résulte que pour tout $z \in M$ la représentation $\pi(z)$ appartient à la classe $T_o$ et donc que la sous-représentation $\int_M \pi(z)d\mu(z)$ de $T_n$ est équivalente à la représentation $T_o \otimes 1$, où $1$ désigne la représentation identique dans $L^2(M,\mu)$. Donc pour tout $n \geq n_o$, la représentation $T_o$ est contenue dans $T_n$.

(ii) ⇒ (iii). Evident.

(iii) ⇒ (i). Supposons que $G$ possède la propriété énoncée dans (iii), et soit $T_n$ une suite de points de $\hat{G}$ distincts de $T_o$ qui tend vers $T_o$. Alors $T_o$ est adhérent à l'élément $\sum_{n\in N} T_n$ de $\tilde{G}$ ; il est donc contenu dans $\sum_{n\in N} T_n$ et par conséquent coïncide avec au moins l'un des éléments $T_n$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur ces éléments.

DÉFINITION.- <u>On dit qu'un groupe possède la propriété (T) s'il possède l'une des propriétés équivalentes du lemme 1.</u>

Les groupes compacts, par exemple, possèdent la propriété (T), puisque la topologie de $\hat{G}$ est discrète dans ce cas.

Etant donné un groupe $G$, on notera $[G,G]$ le plus petit sous-groupe fermé de $G$ contenant tous les éléments de $G$ qui s'écrivent sous la forme $xyx^{-1}y^{-1}$.

THÉORÈME 1.- <u>Si un groupe</u> $G$ <u>possède la propriété (T), alors le groupe</u> $G/[G,G]$ <u>est compact.</u>

En effet, le groupe $G/[G,G]$ est commutatif et son groupe dual est discret.

COROLLAIRE.- <u>Si un groupe</u> $G$ <u>possède la propriété (T), il est unimodulaire.</u>

En effet, la fonction modulaire de $G$ devient par passage au quotient un homomorphisme continu du groupe compact $G/[G,G]$ dans $R^+$ et un tel homomorphisme est nécessairement trivial.

THÉORÈME 2.- Soit $\Gamma$ un groupe discret dénombrable qui possède la propriété (T). Alors $\Gamma$ a un nombre fini de générateurs et $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini.

Supposons que $\Gamma$ n'ait pas un nombre fini de générateurs. Soient $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ une famille de générateurs de $\Gamma$ et pour tout $n$ entier soit $\Gamma_n$ le sous-groupe de $\Gamma$ engendré par les éléments $(a_i)_{1\leq i\leq n}$. On a $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_n$ et $\bigcup_n \Gamma_n = \Gamma$. Par ailleurs, l'indice de $\Gamma_n$ par rapport à $\Gamma$, soit $(\Gamma:\Gamma_n)$ est infini. Sinon, on voit immédiatement que $\Gamma$ aurait un nombre fini de générateurs. Munissons l'ensemble $\Gamma/\Gamma_n$ des $\Gamma_n$-classes à droite de la mesure définie au moyen des masses 1 placées en chaque point, et considérons la représentation $T_n$ de $\Gamma$ dans $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ définie par $T_n(g)f(x) = f(xg)$. Montrons que $T_o$ est limite de la suite $T_n$ dans $\widetilde{\Gamma}$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $g_1,\ldots,g_p \in \Gamma$. Il existe $n_o$ tel que $g_1,\ldots,g_p \in \Gamma_{n_o}$. Soit $f_n$ la fonction de $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ qui vaut 1 sur $\{\Gamma_n\} \in \Gamma/\Gamma_n$ et 0 ailleurs. On a alors $T_n(g_i)f_n = f_n$ pour $i = 1,\ldots,p$ dès que $n \geq n_o$, d'où $T_n \in V(\varepsilon,\{g_1,\ldots,g_p\},T_o)$ pour $n \geq n_o$. Par ailleurs, $T_n$ ne contient pas la représentation triviale $T_o$, sinon il existerait dans $L^2(\Gamma/\Gamma_n)$ une fonction constante, ce qui est impossible puisque $(\Gamma:\Gamma_n) = +\infty$. Ceci contredit le fait que $\Gamma$ possède la propriété (T).

D'autre part, le groupe $\Gamma/[\Gamma,\Gamma]$ est fini, car il est discret et compact d'après le théorème 1.

## § 2.- Hérédité de la propriété (T).

Nous montrerons dans ce paragraphe que, sous certaines conditions, les sous-groupes d'un groupe qui possède la propriété (T) la possèdent aussi ; d'autre part, si un groupe est "uniformément engendré" par deux sous-groupes qui possèdent la propriété (T), il la possède aussi.

THÉORÈME 3.- Soient $G$ un groupe qui possède la propriété (T) et $\Gamma$ un sous-groupe fermé unimodulaire de $G$ tel que le volume de $G/\Gamma$ soit fini. Alors $\Gamma$ possède la propriété (T).

Soit $T_n$ une suite d'éléments de $\widetilde{\Gamma}$ qui tend vers $T_o$ dans $\widetilde{\Gamma}$. Considérons l'application $\varphi$ de $\widetilde{\Gamma}$ dans $\widetilde{G}$ définie par l'induction au sens de Mackey [9]. Elle est définie comme suit. Soit $T$ une représentation de $\Gamma$ dans l'espace de Hilbert $H$. L'espace de la représentation $\varphi(T)$ est l'espace des applications mesurables $f$ de $G$ dans $H$ telles que

1) $$f(\gamma g) = T(\gamma)f(g) \qquad \text{pour } \gamma \in \Gamma,\ g \in G\ ;$$

2) $$\int_{G/\Gamma} \| f(g)\|^2 \, d\rho(g) < +\infty \ ;$$

où $\rho$ désigne une mesure invariante sur l'espace des $\Gamma$-classes à droite $G/\Gamma$. La représentation $\varphi(T)$ est définie par $\varphi(T)(g_1)f(g) = f(gg_1)$. Il est démontré dans [4], th. 4.1, que cette application $\varphi$ est continue. Par ailleurs, le volume de $G/\Gamma$ étant fini, $\varphi(T_o)$ contient $T_o$. On en déduit que $\varphi(T_n)$ tend vers $T_o$ dans $\widetilde{G}$. Puisque $G$ possède la propriété (T), il existe $n_o$ tel que $\varphi(T_n)$ contienne $T_o$ pour $n \geq n_o$, et ceci entraîne que $T_n$ contient $T_o$ pour $n \geq n_o$.

DÉFINITION.- Etant donnés un groupe $G$ et deux sous-groupes $G'$ et $G''$ de $G$, on dit que $G$ est uniformément engendré par les sous-groupes $G'$ et $G''$ s'il existe un entier $N$ tel que tout élément $g$ de $G$ s'écrive sous la forme $g'_1 g''_1 g'_2 g''_2 \ldots g'_N g''_N$ avec $g'_i \in G'$ et $g''_i \in G''$.

THÉORÈME 4.- Soit $G$ un groupe uniformément engendré par deux sous-groupes $G'$ et $G''$ qui possèdent la propriété (T). Alors $G$ possède la propriété (T).

Montrons que si $T_o$ est adhérent à un élément $T$ de $\widetilde{G}$, alors $T_o$ est contenu dans $T$. Puisque $G'$ possède la propriété (T), il existe une partie compacte $K'$ de $G'$ et un réel $\varepsilon' > 0$ tels que toute représentation $U$ de $G'$ satisfaisant $\mathrm{Re}\langle U(g)\xi|\xi\rangle \geq 1 - \varepsilon'$ sur $K'$ pour un vecteur unitaire $\xi$, possède un vecteur invariant. Soit $H$ l'espace d'une représentation de la classe $T$, $H_1'$ le sous-espace de $H$ des vecteurs invariants par $G'$ et $H_2'$ le supplémentaire orthogonal de $H_1'$ dans $H$. Puisque $H_2'$ ne possède pas de vecteur invariant par $G'$, pour tout vecteur unitaire $\xi$ de $H_2'$ il existe $g' \in K'$ tel que

$$\mathrm{Re}\langle T(g')\xi|\xi\rangle < 1 - \varepsilon' .$$

Par ailleurs, il existe une suite de vecteurs unitaires $\xi_n$ tels que $\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle$ tende vers $1$ uniformément sur $K'$ quand $n$ tend vers $\infty$. Si $P'$ désigne le projecteur de $H$ sur $H_1'$, montrons que $\lim_{n\to\infty} \| P'\xi_n - \xi_n\| = 0$. Posons $P'\xi_n = \xi_n^1$ et $\xi_n - P'\xi_n = \xi_n^2$. On a

$$\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle = \|\xi_n^1\|^2 + \langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle .$$

Etant donné $\varepsilon$ réel $> 0$, il existe $n_o$ tel que, pour tout $n \geq n_o$, on ait

$$\|\xi_n^1\|^2 + \mathrm{Re}\langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle \geq 1 - \varepsilon\varepsilon'$$

sur $K'$. En choisissant $g \in K'$ de façon que $\mathrm{Re}\langle T(g)\xi_n^2|\xi_n^2\rangle < (1 - \varepsilon')\|\xi_n^2\|^2$, on trouve $1 - \varepsilon'\|\xi_n^2\|^2 \geq 1 - \varepsilon\varepsilon'$, d'où $\|\xi_n^2\|^2 \leq \varepsilon$, dès que $n \geq n_o$.

De même, on démontre que $\lim_{n\to\infty} \| P''\xi_n - \xi_n\| = 0$, où $P''$ désigne le projecteur de $H$ sur le sous-espace des vecteurs invariants par $G''$. Il en résulte, puisque tout élément $g$ de $G$ s'écrit sous la forme $g_1'g_2''\ldots g_N'g_N''$, avec $g_i' \in G'$, $g_i'' \in G''$ et $N$ indépendant de $g$, que $\langle T(g)\xi_n|\xi_n\rangle$ tend vers $1$ lorsque $n$

tend vers $+\infty$ , uniformément sur $G$ . Le théorème se déduit maintenant du lemme suivant.

LEMME 2.- <u>Soit</u> $T$ <u>une représentation unitaire d'un groupe</u> $G$ <u>dans un espace hilbertien</u> $H$ . <u>On suppose qu'il existe</u> $\varepsilon > 0$ <u>et un vecteur</u> $\xi_1 \in H$ <u>tel que pour tout</u> $g \in G$ <u>on ait</u> $\mathrm{Re}\langle T(g)\xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \varepsilon$ . <u>Alors il existe dans</u> $H$ <u>un vecteur non nul invariant par</u> $G$ .

<u>Démonstration</u>. Soit $B$ l'intersection de la boule unité fermée de $H$ avec l'ensemble $\{\xi, \mathrm{Re}\langle \xi | \xi_1 \rangle \geq \varepsilon\}$ . C'est un ensemble faiblement compact dans $H$ . Pour tout $A \subset G$ soit $B^A$ l'ensemble des vecteurs de $B$ invariants par $A$ . Pour démontrer que $B^G$ n'est pas vide, il suffit de démontrer que, pour toute partie finie $F = \{g_1, \ldots, g_k\}$ de $G$ , $B^F$ n'est pas vide. Pour $i = 1, \ldots, k$ , soit $P_i$ le projecteur de $H$ sur le sous-espace de Hilbert des vecteurs invariants par rapport à l'opérateur $T(g_i)$ . L'opérateur $T(g_i) + T(g_i)^{-1}$ est hermitien, et son spectre est contenu dans $[-2,2]$ . La suite

$$A_i^n = \left[ \frac{E + T(g_i) + T(g_i)^{-1}}{3} \right]^n$$

tend donc fortement vers $P_i$ . Montrons maintenant que la suite $D^n = (P_1 P_2 \ldots P_{k-1} P_k P_{k-1} \ldots P_2 P_1)^n$ tend fortement vers le projecteur $P$ sur le sous-espace de $H$ des vecteurs invariants par les opérateurs $T(g_i)$ , $i = 1, \ldots, k$ . En effet, $D$ est un opérateur hermitien positif et on a $\|D\| \leq 1$ , donc $D^n$ tend fortement vers le projecteur sur l'espace des vecteurs invariants par $D$ . Mais on voit facilement que l'égalité $D\xi = \xi$ est équivalente au système des égalités $P_i \xi = \xi$ pour $i = 1, \ldots, k$ . On déduit de tout ce qu'on vient de démontrer que la suite $\{(A_1^m A_2^m \ldots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \ldots A_2^m A_1^m)^n \xi_1\}$ , $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , tend vers $P\xi_1$ dans $H$ . D'autre part, l'opérateur $(A_1^m \ldots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \ldots A_1^m)^n$ s'écrit

$\sum_\alpha c_\alpha T(g_\alpha)$ avec $\sum_\alpha c_\alpha = 1$ et $c_\alpha \geq 0$ . On a donc

$$\mathrm{Re}\langle (A_1^m \ldots A_{k-1}^m A_k^m A_{k-1}^m \ldots A_1^m)^n \xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \varepsilon \text{ , d'où } \mathrm{Re}\langle P\xi_1 | \xi_1 \rangle \geq \varepsilon \text{ .}$$

Il en résulte que $P\xi_1$ appartient à $B^F$ .

Nous terminerons ce paragraphe par le théorème facile suivant qui nous sera utile par la suite.

THÉORÈME 5.- Soit une suite exacte $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ de groupes topologiques. Si $G'$ et $G''$ possèdent la propriété (T), alors $G$ possède aussi la propriété (T). Si $G$ possède la propriété (T), alors $G''$ possède la propriété (T).

La deuxième assertion est évidente. Démontrons la première. Supposons que $T_o$ soit adhérent à un point $T$ de $\widetilde{G}$ . Alors dans $\widetilde{G}'$ , $T_o$ est adhérent à la restriction $T/G'$ de $T$ à $G'$ . Il en résulte que $T/G'$ contient $T_o$ et que $T$ contient une représentation $T_1$ triviale sur $G'$ . Dans $\widetilde{G}''$ le point $T_o$ est adhérent à la représentation $T_1''$ déduit de $T_1$ par passage au quotient. Il en résulte que $T_1''$ contient $T_o$ et donc que $T$ contient $T_o$ .

## § 3.- La propriété (T) pour les groupes semi-simples.

Le but de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME 6.- *Un groupe de Lie algébrique semi-simple* $G$ *sur un corps* $K$ *localement compact non discret, dont toutes les composantes simples sont de rang déployé* $\geq 2$ , *possède la propriété (T).*

Pour la démonstration, nous avons besoin d'un certain nombre de préliminaires.

### 1. Définition de la classe (R).

DÉFINITION.- *On dit qu'un groupe* $G$ *appartient à la classe* $(R)$ *si l'adhérence dans* $\mathfrak{G}$ *de la représentation régulière de* $G$ *contient sa représentation triviale.*

Cette notion a été introduite par Godement dans [5], p. 77, où il remarque que si un groupe $G$ appartient à la classe $(R)$ , l'adhérence dans $\mathfrak{G}$ de la représentation régulière de $G$ contient toutes les représentations unitaires irréductibles de $G$ .

Parmi les exemples de groupes appartenant à la classe $(R)$ , on trouve les groupes commutatifs et les groupes compacts.

LEMME 3.- *Soit* $1 \to G' \xrightarrow{\psi} G \xrightarrow{\varphi} G'' \to 1$ *une suite exacte de groupes topologiques telle que* $G'$ *et* $G''$ *appartiennent à la classe* $(R)$ . *Alors* $G$ *appartient à la classe* $(R)$ .

La représentation régulière $R_G$ de $G$ est induite par la représentation régulière $R_{G'}$ de $G'$ , et comme $T_o$ est adhérent à $R_{G'}$ dans $\mathfrak{G}'$ , la représentation $\mathrm{Ind}\, T_o$ induite à $G$ par $T_o$ appartient dans $\mathfrak{G}$ à l'adhérence de $R_G$ . La représentation Ind $T_o$ n'est autre que la composée avec $\varphi$ de la représentation régulière de G" . Le point $T_o$ est donc adhérent à Ind $T_o$ dans $\hat{G}$ , et par conséquent à $R_G$ .

LEMME 4.- _Si un groupe G appartient à la classe (R) , et si H est un sous-groupe fermé de G , alors H appartient à la classe (R) ._

Il suffit de montrer que la restriction à H de la représentation régulière de G est multiple de la représentation régulière de H et cette décomposition se déduit de la formule

$$\int_G f(g)dg = \int_{G/H} d\nu(g)\rho(g) \int_H f(hg)dh ,$$

où dg et dh sont les mesures de Haar à gauche sur G et H respectivement, $\rho$ une fonction définie sur G telle que $\rho(hg) = \delta(h)\rho(g)$ pour $h \in H$ et $g \in G$ si $\delta$ désigne la fonction modulaire sur H , et $\nu$ une mesure sur l'espace G/H des H-classes à droite.

2. Des groupes n'appartenant pas à la classe (R).

LEMME 5.- _Un groupe libre discret dont le nombre de générateurs est_ $\geq 2$ _n'appartient pas à la classe_ (R) .

D'après le lemme 4, il suffit de considérer le cas où G a deux générateurs a et b . Le résultat est connu et la démonstration qui suit est empruntée à [11].

Montrons qu'on peut trouver $\epsilon > 0$ tel qu'il n'existe pas de fonction f de $L^2(G)$ vérifiant simultanément

1) $\| f\|_2 = 1$ ;

2) $|\langle R_a f|f\rangle - 1| \leq \varepsilon^2/2$ ;

3) $|\langle R_b f|f\rangle - 1| \leq \varepsilon^2/2$ ;

où $R$ désigne ici la représentation régulière gauche de $G$. Remarquons que ces conditions entraînent $\| R_a f - f\|^2 \leq \varepsilon^2$ et $\| R_b f - f\|^2 \leq \varepsilon^2$. Supposons qu'il existe une fonction $f \in L^2(G)$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant 1), 2), 3) et considérons sur $G$ la mesure $\mu$ définie par

$$\mu(E) = \int_E |f(g)|^2 dg .$$

On a

$$|\mu(aE) - \mu(E)| = |\int_E |f(a^{-1}g)|^2 - |f(g)|^2 dg| \leq 2\sqrt{\int_G |f(a^{-1}g) - f(g)|^2 dg} \leq 2\varepsilon ,$$

d'où

$$\mu(aE) \geq \mu(E) - 2\varepsilon .$$

Soient $P$ l'ensemble des mots réduits de $G$ qui commencent par une puissance de $a$, et $N$ le complémentaire de $P$ dans $G$. On a

$$1 \geq \mu(N) + \mu(aN) + \mu(a^2N) \geq 3\mu(N) - 6\varepsilon ,$$

d'où

$$\mu(N) \leq \frac{1}{3} + 2\varepsilon .$$

De même, on montre que $\mu(P) \leq \frac{1}{3} + 2\varepsilon$. Il en résulte que

$$1 = \mu(N) + \mu(P) \leq \frac{2}{3} + 4\varepsilon .$$

Il suffit donc de prendre $\varepsilon = 1/13$ pour qu'il n'existe pas de fonction $f$ de $L^2(G)$ vérifiant 1), 2), 3).

COROLLAIRE.- Le groupe $SL(2,K)$, où $K$ est un corps localement compact non discret, n'appartient pas à la classe (R).

On sait que $SL(2,K)$ contient un sous-groupe discret libre à deux générateurs. Dans le cas réel c'est bien connu (par exemple les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

engendrent un tel sous-groupe), et dans le cas $\mathfrak{p}$-adique, cela a été démontré par Ihara dans [6]. (Voir aussi l'exposé de Serre à paraître.)

3. Les groupes $SL(3,K)$ et $Sp(4,K)$ possèdent la propriété (T).

THÉORÈME 7.- *Si* $K$ *est un corps localement compact non discret, le groupe* $SL(3,K)$ *possède la propriété (T).*

Introduisons les sous-groupes suivants de $SL(3,K)$ :

$$H = \left\{\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad G' = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}\right\}, \quad G'' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}\right\}, \quad S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ et le sous-groupe } S' = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ de } SL(2,K) .$$

La démonstration du théorème 7 résultera des lemmes qui suivent.

LEMME 6.- *Si une représentation de* $SL(3,K)$ *possède un vecteur invariant par* $S$, *alors ce vecteur est invariant par* $SL(3,K)$ *tout entier.*

Démontrons d'abord l'affirmation correspondante relative au groupe $SL(2,K)$ et à son sous-groupe $S'$. Soient $T$ une représentation unitaire de $SL(2,K)$ et $\xi$ un vecteur invariant par la restriction de $T$ à $S'$. La fonction

$$\varphi : g \mapsto \langle T(g)\xi | \xi \rangle ,$$

définie sur $SL(2,K)$ est continue et biinvariante par $S'$. On en déduit par passage au quotient une fonction $\dot{\varphi}$ continue sur l'ensemble des doubles classes $S' \backslash SL(2,K)/S'$ , lequel est constitué des éléments $S' \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} S'$ , et $S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'$ avec $c$ et $a \in K^*$ . Lorsque $c$ tend vers $0$ , $S' \begin{pmatrix} 0 & -c^{-1} \\ c & 0 \end{pmatrix} S'$ tend vers $S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'$ quel que soit $a \in K^*$ . Il en résulte que $\dot{\varphi}$ est constante sur la droite pointée $\{S' \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} S'\}$ , $a \in K^*$ , et donc que $\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ . Le vecteur $\xi$ est donc invariant par la restriction de $T$ au sous-groupe diagonal $D$ . Par conséquent la fonction $\varphi$ est aussi biinvariante par rapport au sous-groupe $DS'$ . On en déduit par passage au quotient une fonction continue sur l'ensemble des doubles classes $DS' \backslash SL(2,K)/DS'$ , lequel est constitué des deux points

$$DS' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} DS' \quad \text{et} \quad DS' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} DS' ,$$

le premier étant adhérent au deuxième.

Il en résulte que $\varphi$ est constante sur $SL(2,K)$ et donc que le vecteur $\xi$ est invariant par $SL(2,K)$ .

Supposons maintenant que $T$ soit une représentation unitaire de $SL(3,K)$ et $\xi$ un vecteur invariant par $S$ . D'après ce qu'on a précédemment démontré $\xi$ est invariant par $G'$ et $G''$ et donc par $SL(3,K)$ puisque ces deux sous-groupes engendrent $SL(3,K)$ .

COROLLAIRE.- Si $T$ est une représentation unitaire irréductible non triviale de $SL(3,K)$ les composantes irréductibles de sa restriction à $H$ ne sont pas triviales sur $S$.

LEMME 7.- L'adhérence dans $\widetilde{H}$ de la représentation régulière de $H$ contient toutes les représentations irréductibles de $H$ non triviales sur $S$.

Etudions sommairement les représentations irréductibles de $H$. Soit $T$ une telle représentation et soit $T_s$ sa restriction au sous-groupe commutatif $S$. A une telle représentation correspond canoniquement une représentation que nous noterons aussi $T_s$ de la $C^*$-algèbre commutative $C^*(S)$ du groupe $S$. A cette représentation, comme à toute représentation d'une $C^*$-algèbre commutative, est associée canoniquement une mesure $P : \Delta \to P(\Delta)$ définie sur le spectre de $C^*(S)$ à savoir $K^2$ et à valeurs dans l'ensemble des projecteurs du bicommutant de $T(S)$. Pour tout $A \in SL(2,K)$, soit $T_s^A$ la représentation de $S$ définie par

$$T_s^A\begin{pmatrix} E & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} E & A\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} E & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

La mesure associée à cette représentation est

$$P^A : \Delta \to P^A(\Delta) = T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(\Delta) T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Par ailleurs, la représentation $T_s^A$ de $C^*(S)$ n'est autre que la composée de l'isomorphisme $f((\xi,\eta)) \mapsto f((\xi,\eta)A)$ de $C^*(S)$ avec la représentation $T_s$. On en déduit que la mesure $P^A$ est aussi définie par $P^A(\Delta) = P(\Delta A^{-1})$ où $\Delta A^{-1}$ désigne l'image de $\Delta$ par l'application $(\xi,\eta) \mapsto (\xi,\eta)A^{-1}$.

Les projecteurs $P(\{0,0\})$ et $P(K^2 - \{0,0\})$ sont deux projecteurs orthogonaux de somme 1 . Ils commutent avec $T(S)$ et $T\begin{pmatrix} SL(2,K) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donc avec $T(H)$ . La représentation $T$ étant irréductible, deux cas peuvent se présenter.

1) $P(\{0,0\}) = 1$ ; ceci entraîne que $T$ est trivial sur $S$ .

2) $P(K^2 - \{0,0\}) = 1$ . La mesure $P$ est concentrée sur $K^2 - \{0,0\}$ . Cet espace s'identifie à l'espace homogène $H/N$ par l'application

$$N.\begin{pmatrix} a & b & x \\ c & d & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (c,d) ,$$

et le groupe $H$ opère dans $K^2 - \{0,0\}$ par l'application

$$\left[ (\xi,\eta)\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \mapsto (\xi,\eta)A .$$

Il résulte de l'égalité

$$T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(\Delta) T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = P(\Delta A^{-1})$$

que l'espace homogène $H/N$ et la mesure $P$ forment un système d'imprimitivité pour $T$ . Cette représentation est donc induite par une représentation irréductible du groupe spécial nilpotent $N$ [10]. Les représentations irréductibles de $N$ sont bien connues ; elles sont toutes induites par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe de $N$ [8]. On a ainsi démontré que les représentations irréductibles de $H$ non triviales sur $S$ sont induites par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe nilpotent de $H$ . Comme dans un groupe nilpotent, les représentations de dimension 1 appartiennent à l'adhérence de la représentation régulière, il résulte de la continuité de l'application induction que toute représentation irréductible de $H$ non triviale sur $S$ appartient à l'adhérence dans $\widetilde{H}$ de la représentation régulière de $H$ .

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème 7. Soit $T$ un élément de $SL(3,K)^{\sim}$ tel que $T_0$ soit adhérent à $T$ dans $SL(3,K)^{\sim}$. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien la représentation $T$ possède un vecteur invariant par $S$ et alors $T$ contient $T_0$ d'après le lemme 6 ; ou bien la représentation $T$ ne possède pas de vecteur invariant par $S$ et alors la restriction de $T$ à $H$ est adhérente dans $\widetilde{H}$ à la représentation régulière de $H$ d'après le lemme 7. Si ce deuxième cas se présentait, le point $T_0$, dans $\widetilde{H}$, appartiendrait à l'adhérence de la représentation régulière de $H$ et donc $H$ appartiendrait à la classe (R). Ceci est absurde, car $H$ contient le sous-groupe fermé $SL(2,K)$ qui n'appartient pas à la classe (R). Il en résulte que $SL(3,K)$ possède la propriété (T).

THÉORÈME 8.- Si $K$ est un corps localement compact non discret, le groupe $Sp(4,K)$ possède la propriété (T).

La démonstration de ce théorème est proche de celle du théorèmè 7. Nous indiquerons donc seulement les détails différents.

Le groupe $Sp(4,K)$ se réalise comme le groupe des matrices d'ordre 4 conservant la forme bilinéaire alternée définie par la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. C'est donc le groupe des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où $A$, $B$, $C$, $D$ sont des matrices d'ordre 2 vérifiant les conditions $A\,{}^tB = B\,{}^tA$, $C\,{}^tD = D\,{}^tC$, $A\,{}^tD - B\,{}^tC = E$. Soient $H$ le sous-groupe de $Sp(4,K)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$ avec $A\,{}^tB = B\,{}^tA$, et $S$ le sous-groupe commutatif de $Sp(4,K)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}$ avec $B = {}^tB$.

On commence par démontrer comme dans le lemme 6, que si une représentation de $Sp(4,K)$ possède un vecteur invariant par $S$ , alors ce vecteur est invariant par $Sp(4,K)$ tout entier, puis on démontre l'analogue suivant du lemme 7.

LEMME 8.- L'adhérence dans $\widetilde{H}$ de la représentation régulière de $H$ contient toutes les représentations irréductibles de $H$ non triviales sur $S$ .

Soit $T$ une représentation irréductible de $H$ non triviale sur $S$ . On lui associe canoniquement une mesure $P : \Delta \to P(\Delta)$ définie sur le spectre de $C^*(S)$ à valeurs dans l'ensemble des projecteurs du bicommutant de $T(S)$ . Le spectre de $C^*(S)$ s'identifie au groupe dual de $S$ , donc à $S$ . On démontre comme dans le lemme 7 que

$$T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix} P(\Delta) T\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = P(A\Delta{}^tA)$$

pour toute matrice $A$ inversible d'ordre $2$ . Puisque la représentation irréductible $T$ n'est pas triviale sur $S$ , on a $P(\{0\}) = 0$ . Le groupe $H$ n'opère pas transitivement sur $S - \{0\}$ par l'application

$$\left[\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & E \end{pmatrix}\right] \mapsto \begin{pmatrix} E & AB{}^tA \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

mais l'ensemble des classes d'équivalence des formes quadratiques d'ordre $2$ sur $K$ est toujours dénombrablement séparé pour la structure borélienne induite (cet ensemble est d'ailleurs fini lorsque car. $K \neq 2$ ). On en déduit, puisque la représentation $T$ est irréductible, que la mesure $P$ est concentrée sur une seule orbite. Le sous-groupe stabilisateur d'un point $B$ de cette orbite est le sous-groupe $\left\{\begin{pmatrix} \theta & C \\ 0 & \theta \end{pmatrix}\right\}$ , où $\theta$ appartient au groupe des matrices qui vérifient $\theta B{}^t\theta = B$ , c'est-à-dire le groupe orthogonal correspondant à la forme quadratique $B$. Il est bien connu que ce sous-groupe s'identifie à $K$, à $K^*$, où au sous-groupe des éléments de norme 1 d'une extension quadratique de $K$. Dans tous les cas, la représentation $T$ est induite par un groupe produit semi-direct de deux groupes commutatifs, c'est-à-dire par un groupe appartenant à la classe (R), d'après le lemme 3. On en déduit grâce à la continuité de l'application induction, que $T$ appartient à l'adhérence dans $\widetilde{H}$ de la représentation régulière de $H$.

On termine alors la démonstration du théorème 8 exactement comme celle du théorème 7.

## 4. Fin de la démonstration du théorème 6.

Le groupe $G$ étant quotient d'un groupe de Lie semi-simple simplement connexe $G'$, (simplement connexe au sens de la théorie des groupes algébriques ; c'est-à-dire que toute représentation projective de $G'$ de dimension finie provient d'une représentation au sens ordinaire de $G'$), il suffit, d'après le théorème 5, de démontrer le théorème 6 pour un groupe de Lie semi-simple simplement connexe dont toutes les composantes simples sont de rang déployé $\geq 2$. D'après [2], prop. 5, il existe un sous-groupe compact maximal $U$ et un tore déployé maximal $A$ tel que $G = UAU$, (décomposition de Cartan). Le tore déployé $A$ est contenu dans un sous-groupe déployé simple de même rang ([1], 7). Chaque groupe déployé simple de rang $\geq 2$ contient un sous-groupe $H$ localement isomorphe à $SL(3,K)$ ou $Sp(4,K)$ ; cela résulte de la classification des groupes déployés simples. Grâce aux propriétés d'hérédité du théorème 5 et parce que les groupes $SL(3,K)$ et $Sp(4,K)$ possèdent la propriété (T), le groupe $H$ possède aussi la propriété (T). Par construction $A_o = A \cap H$ est un tore déployé maximal de $H$. Chaque transformation du groupe de Weyl s'identifiant à un automorphisme intérieur de $G$ induit par un élément de $U$, soient $\omega_1,\ldots,\omega_n$ des éléments de $U$ qui induisent les transformations du groupe de Weyl. Celui-ci opère de façon irréductible sur l'algèbre de Lie associée à $A$, puisque $G$ est simple. Il en résulte que $A$ s'écrit sous la forme $\prod_i \omega_i A_o \omega_i^{-1}$. Le groupe $G$ est donc uniformément engendré par les sous-groupes $U$ et $H$, lesquels possèdent la propriété (T). D'après le théorème 4, le groupe $G$ possède aussi la propriété (T).

## BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BOREL et J. TITS - Groupes réductifs, I.H.E.S., Publications mathématiques n° 27, 1965, p. 55-150.

[2] F. BRUHAT et J. TITS - Groupes algébriques sur un corps local : cohomologie galoisienne, décompositions d'Iwasawa et de Cartan, C. R. Acad. Sc., t. 263, 1966, p. 867-869.

[3] J. DIXMIER - Les C* algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[4] J. M. G. FELL - Weak containment and induced representations of groups, Can. J. Math., t. 14, 1962, p. 237-268.

[5] R. GODEMENT - Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc., t. 63, 1948, p. 1-84.

[6] Y. IHARA - On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan, t. 18, n° 3, 1966.

[7] D. A. KAJDAN - Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés, Funkcional nyj Analiz, t. 1, n° 1, 1967, p. 71-74 (en russe).

[8] A. A. KIRILLOV - Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk, t. 17, 1962, p. 57-110. (En russe, traduit en anglais dans Russian Math. Surveys, t. 17, 1962, p. 53-103.)

[9] G. W. MACKEY - Induced representations of locally compact groups I, Ann. Math., t. 55, 1952, p. 101-139.

[10] G. W. MACKEY - Imprimitivity for representations of locally compact groups I, Proc. Nat. Acad. Sc., t. 35, 1949, p. 537-545.

[11] H. YOSHIZAWA - Some remarks on unitary representations of the free groups, Osaka Math. J., t. 3, 1951, p. 55-63.