Yves Meyer

Problèmes de l'unicité, de la synthèse et des isomorphismes en analyse harmonique

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 341, p. 463-471

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__463_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 341 Février 1968

PROBLÈMES DE L'UNICITÉ, DE LA SYNTHÈSE ET DES ISOMORPHISMES EN ANALYSE HARMONIQUE

par Yves MEYER

Résumé. De nouvelles conditions suffisantes sont données sur des ensembles symétriques entraînant qu'ils soient d'unicité ou de synthèse ou que les algèbres de restrictions à ces ensembles des fonctions de la classe A soient isomorphes.

1. Unicité. Soit E un compact de $\mathbb{R}$ et S une distribution (à valeurs complexes) dont le support est contenu dans E. La transformée de Fourier $\hat{S}$ de S est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $\hat{S}(u) = S(e^{-iux})$. On dit que S est une pseudomesure si $\hat{S}(u)$ est une fonction bornée. On pose alors

$$\|S\|_{PM} = \sup_{u\in\mathbb{R}} |\hat{S}(u)|$$

et l'on vérifie aussitôt que l'espace vectoriel de toutes les pseudomesures de support contenu dans E est un espace de Banach pour la norme $\|S\|_{PM}$. Cet espace sera noté $PM(E)$.

On dit que S est une pseudofonction si $\lim_{|u|\to+\infty} \hat{S}(u) = 0$. Toute pseudofonction est une pseudomesure, toute mesure est une pseudomesure et tout élément f de $L^1(dx)$ est une pseudofonction.

Le compact E de $\mathbb{R}$ est appelé un ensemble de multiplicité s'il existe une pseudofonction, non nulle, de support contenu dans E. Si E n'est pas de multiplicité, on dit qu'il est d'unicité. Un ensemble compact et dénombrable est un ensemble d'unicité (plus précisément : les pseudomesures portées par E ont des transformées de Fourier presque périodiques au sens de Bohr). Un ensemble de mesure de Lebesgue positive est un ensemble de multiplicité.

Il reste donc à examiner les ensembles parfaits de mesure nulle. Nous allons nous restreindre aux "ensembles symétriques" définis à partir d'un intervalle $[a\ ,\ b]$ et d'une suite $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$ de nombres réels tels que $0 < \xi_k < \frac{1}{2}$ de la façon suivante : E_1 est la réunion des deux intervalles $[a\ ,\ a+(b-a)\xi_1]$ et $[b-(b-a)\xi_1\ ,\ b]$; pour construire E_2 on opère comme pour construire E_1 sur chacun des deux intervalles composant E_1 mais ξ_1 est remplacé par ξ_2 et ainsi de suite. Le fermé E est l'intersection des E_n $(n \geqq 1)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$, E est de mesure de Lebesgue nulle.

Les premiers et plus importants résultats sont dus à Salem : si $\xi_k = \xi$ et si ξ n'est pas un nombre de Pisot, E est un ensemble de multiplicité (Salem 1943) ; si, au contraire, ξ est un nombre de Pisot, E est un ensemble d'unicité (Salem 1955). Si la suite des ξ_k, $k \geqq 1$, est une suite de nombres réels choisis "au hasard" et de façon indépendante dans $[k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}, k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}+(k!)^{-\varepsilon}]$, $(\varepsilon > 0)$, l'ensemble E est presque sûrement un ensemble de multiplicité (Salem 1942) mais si $\xi_k = o(1/k)$ E est un ensemble d'unicité (Salem 1944).

On savait donc, pour tout α dans $[0\ ,\ \frac{1}{2}[$, construire des ensembles de multiplicité tels que $\xi_k = O(k^{-\alpha})$; on savait que pour tout α dans $]1\ ,+\infty[$, si $\xi_k = O(k^{-\alpha})$, E est d'unicité mais on ne savait pas ce qui se passe pour les α de l'intervalle $[\frac{1}{2}\ ,\ 1]$.

Les résultats présentés ci-dessous sont dus à McGehee, Y. Meyer et R. Schneider

THÉORÈME 1. Si $\sum_{1}^{\infty} \xi_k^2 < +\infty$, E est un ensemble d'unicité.

On ne sait pas ce qui se passe si $\alpha = \frac{1}{2}$: existe-t-il un ensemble E de multiplicité tel que $\xi_k = O(k^{-\frac{1}{2}})$?

2. Isomorphismes entre algèbres $A(E)$.

On peut, par transport de structure, définir l'algèbre de Banach $A(\mathbb{R})$ de toutes les transformées de Fourier $\hat{f}$ des éléments de $L^1(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R})$ est une algèbre de Banach quand le produit est le produit de convolution). Si E est un fermé de $\mathbb{R}$, soit $I(E)$ l'idéal fermé de $A(\mathbb{R})$ composé de tous les éléments de $A(\mathbb{R})$ nuls sur E. On appelle $A(E)$ l'algèbre quotient $A(\mathbb{R})/I(E)$. L'algèbre $A(E)$ est semi-simple, son spectre est E et les éléments de $A(E)$ peuvent être considérés, de façon canonique, comme des fonctions continues sur E .

Un isomorphisme $\tilde{H}$ entre $A(E)$ et $A(F)$ peut donc toujours être défini par un homéomorphisme H de F sur E et par

(1) $$\tilde{H}(f) = f \circ H \qquad (f \in A(E)) .$$

Mais tous les homéomorphismes H de F sur E ne conduisent pas, en général, à des isomorphismes $\tilde{H}$. Plus précisément, Beurling et Helson ont montré (1953) que si $E = F = \mathbb{R}$, si $\tilde{H}$ est un isomorphisme, alors $H(x) = ax + b$ et Katznelson et De Leeuw ont prouvé (1964) que si la norme de $\tilde{H}$ est 1, H préserve les relations arithmétiques satisfaites par les éléments de F : toute relation $\mathbb{Z}$-linéaire vérifiée par les éléments de F

$$\sum_{1\le j\le n} m_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{1\le j\le n} m_j x_j = 0 , \qquad m_j \in \mathbb{Z} , \qquad x_j \in F$$

entraîne la relation correspondante entre les éléments de E

$$\sum_{1\le j\le n} m_j H(x_j) = 0 .$$

Dans le théorème 2, H ne préserve pas les relations arithmétiques. Les notations du théorème 2 sont les suivantes : E et F sont deux ensembles symétriques définis comme les ensembles de toutes les sommes $\sum_1^\infty d_j s_j$, $d_j \in \{0,1\}$, et $\sum_1^\infty d_j t_j$, $d_j \in \{0,1\}$ où $s_j = \xi_1 \cdots \xi_{j-1}(1-\xi_j)$ et $t_j = \xi'_1 \cdots \xi'_{j-1}(1-\xi'_j)$. L'application "canonique" H de F sur E est alors donnée par

$$H(\sum_1^\infty d_j t_j) = \sum_1^\infty d_j s_j \, , \quad d_j \in \{0,1\} \, .$$

THÉORÈME 2. Si $\sum_1^\infty {\xi_k'}^2 < +\infty$ (condition de minceur portant sur F) pour tout f dans $A(E)$, $f \circ H$ appartient à $A(F)$. En particulier si $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$, $A(E)$ et $A(F)$ sont isomorphes.

La condition $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$ est la meilleure possible car on a

PROPOSITION 1. Si $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$ tandis que $t_k = 3^{-n_k}$ et $\sum_1^\infty {\xi'_k}^2 = +\infty$ ($n_k \in N$), l'application canonique H de F sur E ne définit pas un isomorphisme entre $A(E)$ et $A(F)$.

PROPOSITION 2. Si $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$ tandis que les ξ'_k sont choisis "au hasard" et de façon indépendante dans les intervalles $[k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}, k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon} + (k!)^{-\varepsilon}]$, les algèbres $A(E)$ et $A(F)$ ne sont pas isomorphes.

3. Synthèse harmonique.

Les éléments S de $PM(E)$ définissent des formes linéaires continues sur $A(\mathbb{R})$ par

$$< S \, , \hat{f} > = < \hat{S} \, , f > = \int_{\mathbb{R}} \hat{S}(x) f(x) dx \qquad (f \in L^1(\mathbb{R}) \, , \hat{S} \in L^\infty(\mathbb{R})) \, .$$

On dit que E est un ensemble de synthèse harmonique si, pour tous les S de $PM(E)$

et les $\hat{f}$ de $A(\mathbb{R})$ on a

$$\hat{f}|_E = 0 \Rightarrow < S \ , \ \hat{f} > = 0 \ .$$

On a alors, pour les ensembles symétriques

THÉORÈME 3. <u>Si</u> $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$, E <u>est un ensemble de synthèse</u>.

Mais ici on ne sait pas si cette condition est la meilleure possible car on ne connaît pas d'exemple d'ensembles symétriques qui ne soient pas de synthèse.

4. <u>Démonstration des théorèmes</u> 1, 2 <u>et</u> 3.

Une méthode générale permet d'obtenir à la fois les trois résultats ; elle repose sur une notion qui intervient dans l'étude des fonctions presque périodiques.

DÉFINITION. Soit Λ une partie de $\mathbb{R}$, K un compact de $\mathbb{R}$ et ε un nombre réel strictement positif. Le couple (K , ε) est dit adapté à Λ si pour toute suite de nombres complexes $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dont tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, on a

$$\sup_{x\in K} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}\Big| \geqq \varepsilon \sup_{x\in \mathbb{R}} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{i\lambda x}\Big| \ .$$

Soit T un nombre réel strictement positif. On dira que le couple (T , ε) est adapté à Λ pour exprimer que si $K = [-T , T]$, le couple (K , ε) est adapté à Λ .

On dira enfin que Λ possède un compact associé s'il existe un K et un ε tels que le couple (K , ε) soit adapté à Λ .

DÉFINITION. On dit qu'une partie Λ de R possède la propriété d'élargissement s'il existe un nombre η strictement positif tel que

$$\inf\{|\lambda'-\lambda| \ ; \ \lambda\in\Lambda \ , \ \lambda'\in\Lambda'\} > 2\eta$$

et si l'une des deux propriétés équivalentes ci-dessous est réalisée

- toute fonction f, à valeurs complexes, définie sur $\Lambda + [-\eta , \eta]$, constante sur chaque intervalle $[\lambda-\eta , \lambda+\eta]$, $\lambda\in\Lambda$, appartient à $A(\Lambda + [-\eta,\eta])$ dès que sa restriction à Λ appartient à $A(\Lambda)$;
- il existe une constante C telle que pour toutes les f ci-dessus on ait

$$\|f\|_{A(\Lambda+[-\eta,\eta])} \leq C \|f\|_{A(\Lambda)} .$$

On a alors

PROPOSITION 3. Pour un ensemble Λ de nombres réels les propriétés suivantes sont équivalentes

Λ possède un compact associé

Λ possède la propriété d'élargissement.

Venons en maintenant aux théorèmes qui contiennent les théorèmes 1, 2 et 3.

THÉORÈME 4. Soit E un compact de $\mathbb{R}$, $(\Lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties finies de R , $(\ell_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres strictement positifs, (T_n , ε_n) un couple adapté à Λ_n . On suppose que

(a) $\Lambda_n \subset E \subset \Lambda_n + [-\ell_{n+1} , \ell_{n+1}]$

(b) $\text{Card } (\Lambda_n)\ell_{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

(c) $\overline{\lim}\ \varepsilon_n = \varepsilon > 0$

(d) $\overline{\lim}\ T_n\ell_{n+1} < \varepsilon$.

Alors E est un ensemble de synthèse. Si, en outre

(e) $\overline{\lim}\, T_n \ell_{n+1} < \frac{\varepsilon^2}{2+\varepsilon}$

alors E est un ensemble d'unicité.

THÉORÈME 5. Soient E, Λ_n, ℓ_n, T_n, ε_n (resp. E', Λ'_n, ℓ'_n, T'_n, ε'_n) comme ci-dessus vérifiant (a), (b), (c) et (d) et H un homéomorphisme de E sur E' tel que $H(\Lambda_n) = \Lambda'_n$ et tel que, pour deux constantes C_1 et C_2, pour toute suite complexe $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_n}$ et tout n

$$C_1 \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp(i\lambda x)\Big\|_\infty \leq \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp(iH(\lambda)x)\Big\|_\infty \leq$$

$$C_2 \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp(i\lambda x)\Big\|_\infty .$$

L'application H définit alors un isomorphisme $\tilde{H}$ entre $A(E)$ et $A(E')$.

Les conditions suffisantes données par le théorème 4 pour la synthèse et l'unicité sont les généralisations des célèbres conditions de C. Herz et de Rachjman (cas où Λ_n est contenu dans un sous-groupe de pas p_n ; on peut alors prendre $T_n = \pi p_n^{-1}$ et $\varepsilon_n = 0$).

Comment applique-t-on les théorèmes 4 et 5 pour obtenir les théorèmes 1, 2 et 3 ? On appelle Λ_n l'ensemble de toutes les sommes $\sum_1^n d_j s_j$, $d_j \in \{0,1\}$. On a alors $\ell_{n+1} = \xi_{n+1}(1-\xi_{n+1})^{-1} s_n$ et puisque $\xi_n \to 0$ $(n \to +\infty)$, il suffira, pour prouver (d) et (e), de montrer que $T_n = O(s_n^{-1})$ $(n \to +\infty)$ ce qui est une conséquence de la condition $\sum \xi_n^2 < +\infty$. Quant au théorème 5, on montre que, pour une constante C_3, on a (si $\lambda = \sum_o^n d_j s_j$)

$$\Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp\Big(ix\big(\sum_o^n d_j s_j\big)\Big)\Big\|_\infty \leq \sup_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp\Big(i \sum_o^n d_j x_j\Big)\Big|$$

$$\leq C_3 \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda \exp\Big(ix\big(\sum_o^n d_j s_j\big)\Big)\Big\|_\alpha$$

ce qui entraîne (2).

5. Algèbres non isomorphes.

Nous allons présenter une méthode permettant de montrer que deux algèbres de restrictions ne sont pas isomorphes. On ignore encore si la connaissance de l'algèbre $A(E)$ permet de décider si E est d'unicité ou de multiplicité. Si c'était le cas, les algèbres de restrictions $A(E)$ et $A(F)$ ne seraient jamais isomorphes quand E est d'unicité et F de multiplicité. La méthode que nous emploierons est la suivante : soit $\mathfrak{R}$ une algèbre de Banach commutative, régulière et semi-simple que l'on identifiera à une algèbre de fonctions continues sur le spectre K de $\mathfrak{R}$; on appellera "pseudomesures" les éléments du dual $\mathfrak{R}^*$ de $\mathfrak{R}$. On peut parler du support d'une telle pseudomesure. L'algèbre $\mathfrak{R}$ est du type I si toute pseudomesure S de $\mathfrak{R}^*$ est limite dans la topologie $\sigma(\mathfrak{R}^*,\mathfrak{R})$ d'une suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de pseudomesures à support fini. Une telle propriété est invariante par isomorphisme. Or on peut facilement montrer que si $\sum_1^\infty \xi_k^2 < +\infty$, si E est construit à l'aide des ξ_k, $A(E)$ est du type I. Au contraire si les ξ'_k sont choisis, au hasard, de façon indépendante dans $[k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon}, k^{-\frac{1}{2}+2\varepsilon} + (k!)^\varepsilon]$ et si E' est construit à l'aide des ξ'_k, $A(E')$ est, presque sûrement, du type II ; on en déduit la proposition 2.

Soit E_ξ l'ensemble symétrique à rapport de dissection constant ξ. Si ξ est transcendant, $A(E_\xi)$ est du type II et au contraire, si ξ^{-1} est entier, $A(E_\xi)$ est du type I. En dehors de ces deux cas on ne sait presque rien.

6. Autres résultats.

Soit Λ un ensemble de nombres réels ; savoir à quelle condition Λ possède un compact associé est un problème difficile. Quelques exemples : si Λ est indépendant (sur Q), Λ possède un compact associé si et seulement si Λ est un ensemble de Sidon c'est-à-dire si toute fonction bornée sur Λ est la restriction à Λ de la transformée de Fourier d'une mesure bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit x un nombre réel, $x > 2$ et soit Λ l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_{n\geq 1} d_n x^n$ où $d_n \in \{0,1\}$. Alors Λ possède un compact associé si et seulement si x est un nombre de Pisot ; ce dernier résultat permet de montrer que, pour tout nombre de Pisot x, il existe un entier p tel que l'ensemble à rapport de dissection constant $\xi = x^{-p}$ soit un ensemble de synthèse.

RÉFÉRENCES

O.C. McGEHEE - Certain isomorphisms between quotients of a group algebra. Pac. J. Math. 21 (1967), 133-152.

Yves MEYER - Isomorphismes entre certaines algèbres de restrictions. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 265 (1967), 18-19.

Robert SCHNEIDER - Thèse (à paraître)

et Séminaire d'Analyse harmonique d'Orsay 1967-1968.