ALAIN GUICHARDET

Facteurs de type III

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 333, p. 345-354
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__345_0>

Séminaire BOURBAKI
20ème année, 1967/1968, n° 333 Novembre 1967

FACTEURS DE TYPE III
d'après R.T. POWERS,

par Alain GUICHARDET.

1. Introduction.

On va, pour commencer, rappeler un certain nombre de notions ; pour simplifier tous les espaces hilbertiens seront supposés séparables.

Définition. On appelle algèbre de von Neumann toute sous-algèbre autoadjointe de $\mathcal{L}(H)$ (H espace hilbertien), contenant I et faiblement fermée ; cette dernière condition équivaut à : égale à son bicommutant. Un facteur est une algèbre de von Neumann dont le centre est réduit aux opérateurs scalaires.

Les exemples les plus simples de facteurs sont l'algèbre des opérateurs scalaires et l'algèbre $\mathcal{L}(H)$; en dimension finie, tout facteur est isomorphe à une algèbre $\mathcal{L}(H)$, et dit de type I_n si $\dim H = n$, autrement dit s'il est isomorphe à $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$; en dimension quelconque, les facteurs isomorphes à une algèbre $\mathcal{L}(H)$ sont appelés facteurs de type I. Pour classer les autres facteurs on introduit la notion de dimension relative.

Définition. Une dimension relative sur un facteur R est une application D de l'ensemble des projecteurs hermitiens de R dans $[0, +\infty]$ vérifiant les axiomes suivants :

(i) $D(P)$ est nul si et seulement si P est nul ;

(ii) $D(P) = D(Q)$ si et seulement si $P \sim Q$, c'est-à-dire s'il existe un opérateur partiellement isométrique dans R envoyant isométriquement $\mathrm{Im}\, P$ sur $\mathrm{Im}\, Q$ et nul sur $(\mathrm{Im}\, P)^{\perp}$;

(iii) $D(P)$ est fini si et seulement si P est fini, c'est-à-dire si les conditions $P \sim Q \leqq P$ impliquent $P = Q$;

(iv) pour toute suite (P_n) de projecteurs deux à deux orthogonaux on a $D(\Sigma P_n) = \Sigma D(P_n)$.

Ceci posé, on démontre qu'il existe toujours une dimension relative et qu'elle est unique à un facteur constant strictement positif près (par exemple dans le facteur $\mathcal{L}(H)$ la dimension relative est la dimension hilbertienne habituelle) ; puis que l'ensemble des valeurs de D (éventuellement normalisée) est l'un des ensembles suivants :

a) $\{0, 1, \ldots n\}$ où $n \leqq \aleph_0$, si R est de type I ;

b) $[0, 1]$

c) $[0, +\infty]$

d) $\{0, +\infty\}$

et on dit que R est type II_1, II_∞ ou III suivant que l'on est dans le cas b), c) ou d).

Particulièrement importants sont les facteurs qui sont engendrés par une suite croissante de facteurs de type I_n, n croissant ; les facteurs de type II_1 ayant cette propriété sont tous isomorphes et appelés <u>facteurs hyperfinis</u> ; signalons en passant qu'on connaît actuellement trois facteurs de type II_1 deux à deux non isomorphes : le facteur hyperfini et deux autres.

Pour les facteurs de type III la situation est la suivante : von Neumann, après avoir donné en 1936 la définition des facteurs et leur classification, construit en 1940 un exemple de facteur de type III de la façon suivante : soient X un espace muni d'une mesure positive bornée μ et G un groupe dénombrable de permutations de X soumis à certaines conditions (entre autres de laisser μ quasi-invariante et d'être ergodique) ; posons $H = L^2(G \times X)$; pour tout g_o dans G soit U_{g_o} l'opérateur dans H défini par

$$(U_{g_o}\phi)(g,x) = (d\mu(g_o^{-1}x)/d\mu(x))^{1/2}.\ \phi(g_o^{-1}g\ ,\ g_o^{-1}x)$$

pour toute $\phi \in H$; pour toute $f \in L^\infty(X,\mu)$ soit T_f l'opérateur défini par

$$(T_f\phi)(g,x) = f(x).\phi(g,x) ;$$

alors l'algèbre de von Neumann engendrée par les U_{g_o} et les T_f est un facteur de type III. Un cas particulier de cette construction va jouer un rôle fondamental dans ce qui suit : on prend pour X l'ensemble des suites $x = (x_1, x_2, \dots)$ où les x_j sont égaux à 0 ou à 1 ; pour G le sous-ensemble de X formé des x tels que $x_j = 0$ sauf pour un nombre fini de j ; alors X est un groupe pour l'addition modulo 2 composante par composante, G en est un sous-groupe et opère dans X de façon naturelle ; enfin, pour définir μ, on se donne un nombre $c \in \left]0\ ,\ \frac{1}{2}\right[$, on prend sur $\{0,1\}$ la mesure ayant les masses c et $1-c$, puis, sur X, la mesure produit ; le facteur de type III ainsi obtenu sera noté R_c.

Pour en revenir à nos considérations historiques, L. Pukanszky construit en 1956 un facteur de type III isomorphe à aucun des R_c ; puis J. Schwartz, en 1963, un autre facteur de type III isomorphe ni à celui de Pukansky, ni à aucun des R_c ; leurs constructions sont analogues à la précédente, avec des choix différents pour X, G et μ ; enfin en 1967, R.T. Powers démontre que les R_c sont deux à deux non isomorphes ; on va essayer ici d'exposer les idées principales de sa démonstration, fort compliquée.

2. C^*-algèbres.

La démonstration de Powers repose essentiellement sur l'étude d'une C^*-algèbre particulière A, appelée C^*-algèbre des relations d'anticommutation parce que ses représentations sont en correspondance bijective avec les représentations des relations d'anticommutation de la Théorie Quantique des Champs ; on peut la définir de la façon suivante : pour $j = 1, 2, \dots$ posons $A_j = \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$; on a un morphisme isométrique naturel

$$A_1 \otimes A_2 \otimes \dots A_j \to A_1 \otimes A_2 \otimes \dots A_{j+1}$$

transformant tout élément x en $x \otimes 1$; A est alors la complétée de la limite inductive des $A_1 \otimes \dots A_j$.

Pour expliquer la relation qui existe entre l'algèbre A et les facteurs R_c, rappelons d'abord quelques notions importantes ; tout d'abord une C^*-algèbre est une algèbre de Banach muni d'une involution $x \to x^*$ vérifiant la relation $\|x x^*\| = \|x\|^2$; nos C^*-algèbres seront toujours supposées unifères. Un état sur une C^*-algèbre A est une forme linéaire f positive (i.e. $f(xx^*) \geqq 0 \ \forall x$), continue et vérifiant $f(1) = 1$; par exemple si π est une représentation de A dans un espace hilbertien H et ξ un vecteur unitaire de H, la fonction $x \to (\pi(x)\xi | \xi)$ est un état ; réciproquement, à tout état f on peut associer canoniquement un espace hilbertien H_f, une représentation π_f de A dans H_f et un vecteur unitaire ξ_f de H_f, tels que $f(x) = (\pi_f(x)\xi_f | \xi_f)$. Un état f est dit pur (resp. factoriel) si π_f est irréductible, i.e. si l'algèbre de von Neumann $(\pi_f(A))''$ engendrée par $\pi_f(A)$ est égale à $\mathcal{L}(H_f)$ (resp. si $(\pi_f(A))''$ est un facteur) ; deux états f et f' sont dits quasi-équivalents si π_f et $\pi_{f'}$ sont quasi-équivalentes, i.e. s'il existe un isomorphisme de $(\pi_f(A))''$ sur $(\pi_{f'}(A))''$ transformant $\pi_f(a)$ en $\pi_{f'}(a)$ pour tout $a \in A$.

Revenant à l'algèbre A des relations d'anticommutation, pour tout $c \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ on peut considérer sur chaque A_j l'état $f_{c,j}$ défini par

$$f_{c,j}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = c\, a_{11} + (1-c)\, a_{22} \quad ;$$

puis sur A l'état $f_c = \underset{j}{\otimes} f_{c,j}$, c'est-à-dire tel que $f_c(\otimes a_j) = \Pi f_{c,j}(a_j)$. On peut alors démontrer que f_c est un état factoriel et, plus précisément, que l'algèbre de von Neumann engendrée par $\pi_{f_c}(A)$ est un facteur isomorphe à R_c.

Terminons ces préliminaires par quelques remarques ; premièrement il est intéressant de noter que la construction ci-dessus avec $c = \frac{1}{2}$ donne un facteur hyperfini, et avec $c = 0$ une représentation irréductible, c'est-à-dire le facteur $\mathcal{L}(H)$. D'autre part l'algèbre A est visiblement engendrée, en tant qu'algèbre normée, par une suite croissante de sous-algèbres du type $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$; les C^*-algèbres possédant cette propriété ont été étudiées par J. Glimm [2] et J. Dixmier [1] qui les nomme "algèbres matroïdes" ; une partie du mémoire de Powers est consacrée à l'étude des états et des représentations de ces algèbres et contient en fait des résultats extrêmement intéressants ; la plupart des résultats du § suivant sont démontrés pour les algèbres matroïdes quelconques ; ajoutons que les prop. 1 et 2 admettent des réciproques.

Pour une étude détaillée de l'algèbre des relations d'anticommutation, on pourra consulter [3].

3. <u>Quelques propriétés des états et des représentations de</u> A.

On désigne maintenant par A la C^*-algèbre des relations d'anticommutation.

Nous dirons pour simplifier qu'une suite (x_n) d'éléments de A "tend vers l'infini" si pour tout entier m il existe un entier n tel que $p \geq n$ implique $x_p \in A_m \otimes A_{m+1} \otimes \dots$.

<u>Proposition</u>. 1. Soit f un état factoriel de A ; pour tout $x \in A$ et toute suite (y_n) tendant vers l'infini en restant bornée, $f(xy_n) - f(x)f(y_n)$ tend vers 0.

Supposons le contraire, à savoir

$$|f(x\, y_n) - f(x)\, f(y_n)| \geqq a > 0 \quad ; \qquad (1)$$

en vertu de la compacité faible de la boule unité d'une algèbre de von Neumann, on peut supposer que $\pi_f(y_n)$ converge faiblement vers un opérateur T ; pour tout m, à partir d'un certain rang y_n permute à $A_1 \otimes \ldots A_m$, et il en est de même de T ; donc T appartient au centre de $\pi_f(A)''$; d'autre part (1) s'écrit

$$|(\pi_f(x\, y_n)\, \xi_f \mid \xi_f) - (\pi_f(x)\, \xi_f \mid \xi_f)\, (\pi_f(y_n)\, \xi_f \mid \xi_f)| \geqq a$$

ce qui entraîne

$$|(\pi_f(x)\, T\, \xi_f \mid \xi_f) - (\pi_f(x)\, \xi_f \mid \xi_f)\, (T\, \xi_f \mid \xi_f)| \geqq a$$

et ceci montre que T n'est pas scalaire, donc que $\pi_f(A)''$ n'est pas un facteur.

Proposition 2. Soient f et f' deux états factoriels quasi-équivalents de A ; pour toute suite (y_n) tendant vers l'infini en restant bornée, $f(y_n) - f'(y_n)$ tend vers 0.

En effet, l'état $\frac{1}{2}(f + f')$, associé à $\pi_f \oplus \pi_{f'}$, est factoriel ; donc pour tout x,

$$f(x\, y_n) + f'(x\, y_n) - \tfrac{1}{2}(f(x) + f'(x))\, (f(y_n) + f'(y_n)) \longrightarrow 0$$

c'est-à-dire

$$(f(x) - f(x))\, (f(y_n) - f'(y_n)) \longrightarrow 0$$

et il suffit de choisir x tel que $f(x) \neq f'(x)$ (si $f = f'$ le résultat est évident).

Proposition 3. Soient A et B deux sous-algèbres d'une même algèbre de von Neumann R, isomorphes à la C^*-algèbre des relations d'anticommutation et chacune engendrant R ; il existe un élément unitaire U de R tel que $U\, A\, U^{-1} = B$.

a) Indiquons d'abord le point de départ de la démonstration : on montre que si M et N sont deux sous-algèbres de R isomorphes à $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, il existe un unitaire $U \in R$ tel que $U M U^{-1} = N$; pour cela notons e_{ij} et f_{ij} $(i,j = 1,2)$ les unités matricielles de M et N ; e_{11} et e_{22} (resp. f_{11} et f_{22}) sont des projecteurs orthogonaux de somme I et équivalents dans R ; d'après la théorie des "weight-functions" de von Neumann (qu'on peut, si R est un facteur, remplacer par la théorie plus simple de la dimension relative), e_{11} et f_{11} sont équivalents, i.e. il existe un opérateur partiellement isométrique $V \in R$ tel que $V^* V = e_{11}$ et $V V^* = f_{11}$; on peut alors poser $U = V + f_{12} V e_{21}$.

b) Le résultat précédent subsiste si M et N sont isomorphes à $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$; on peut donc imaginer la construction suivante : considérer des suites

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \dots \subset A$$

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots \subset B$$

telles que $\cup M_n$ et $\cup N_n$ engendrent resp. A et B, M_n et N_n étant de type I_m (m variable) et isomorphes pour tout n ; puis construire de proche en proche des unitaires U_n tels que $U_n M_n U_n^{-1} = N_n$; enfin extraire une sous-suite U_{n_p} faiblement convergente ; malheureusement on ne voit pas pourquoi la limite serait unitaire et on est amené à compliquer la construction. On peut choisir U_1 comme indiqué ; ensuite on construit V_2 voisin (au sens de la topologie forte) de U_1 et envoyant M_2 dans B, mais pas nécessairement sur N_2 ; on remplace $V_2 M_2 V_2^{-1}$ par une algèbre plus grande P_2, de façon à obtenir une suite $P_2, P_3, \dots$ qui engendre B ; on construit V'_2 voisin de V_2^{-1} et envoyant P_2 dans A et on pose $U_2 = V_2'^{-1}$; on agrandit $V'_2 P_2 V_2'^{-1}$ et ainsi de suite ; on obtient des U_n qui forment une suite de Cauchy pour la topologie forte, et qui par suite convergent vers un opérateur U qui est certainement isométrique, et dont on démontre qu'il est unitaire.

Corollaire 1. Soient f et f' deux états de A tels que les algèbres de von Neumann $(\pi_f(A))''$ et $(\pi_{f'}(A))''$ soient isomorphes ; il existe un automorphisme T de A tel que $f \circ T$ et f' soient quasi-équivalents.

Soit L un isomorphisme de $(\pi_f(A))''$ sur $(\pi_{f'}(A))''$; d'après la prop. 3 il existe un unitaire $U \in (\pi_{f'}(A))''$ tel que $U.L(\pi_f(A)).U^{-1} = \pi_{f'}(A)$; comme π_f et $\pi_{f'}$ sont fidèles (car A est simple), on peut définir un automorphisme T de A par

$$U.L(\pi_f(T(a))).U^{-1} = \pi_{f'}(a) \qquad \forall a \in A \ ;$$

alors $\pi_{f\circ T}$ est équivalente à $\pi_f \circ T$, qui est quasi-équivalente à la représentation $a \to U.L(\pi_f(T(a))).U^{-1}$, laquelle est égale à $\pi_{f'}$.

Corollaire 2. Le groupe des automorphismes de A opère transitivement dans $\widehat{A}$ (ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de A), ainsi que dans l'ensemble des états purs de A .

La première assertion résulte de ce que deux représentations irréductibles quasi-équivalentes sont équivalentes ; et la seconde, de ce que deux états purs de A qui définissent des représentations équivalentes sont conjugués par un automorphisme intérieur de A .

4. Non-isomorphie des facteurs R_c .

Commençons par quelques considérations sur les états des algèbres $\mathcal{M}(n , \mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$; on sait que ces états correspondent bijectivement aux éléments positifs de trace 1 par la formule $f(x) = \mathrm{Tr}\ (a\ x)$; on appelle valeurs propres de f les valeurs propres de a ; ce sont donc des nombres positifs de somme 1 ; si on a deux états f et f' sur $\mathcal{M}(n , \mathbb{C})$ et $\mathcal{M}(n' , \mathbb{C})$ respectivement de valeurs propres $\lambda_1,\dots\lambda_n$ et $\lambda'_1,\dots\lambda'_{n'}$, les valeurs propres de l'état $f \otimes f'$ de $\mathcal{M}(n , \mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}(n' , \mathbb{C})$ sont les nombres $\lambda_i \lambda'_j$.

<u>Lemme</u> 1. Soit $B = A_1 \otimes \ldots A_n$ où $A_i = \mathcal{M}(2\ ,\ \mathbb{C})$ et soit f l'état sur B, produit tensoriel des états f_c définis plus haut ; supposons qu'on ait une autre décomposition $B = B_1 \otimes B_2$ où $B_1 = \mathcal{M}(2\ ,\ \mathbb{C})$ et un autre état $g = g_1 \otimes g_2$; si d et $1-d$ sont les valeurs propres de g_1 et si on a $c \leqq d \leqq \frac{1}{2}$, alors $\inf(d - c\ ,\ \frac{1}{2} - d) \leqq 2\ \|f - g\|$.

On pourra se faire une petite idée de la démonstration en vérifiant que si $f = g$ on a $d = c$.

<u>Lemme</u> 2. Soit T un automorphisme de $A = A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots$; pour tout entier n il existe des entiers $p \geqq n$ et q tels que $T(A_q)$ soit "presque contenu" dans $A_n \otimes \ldots A_p$; plus précisément pour tout n et tout $\varepsilon > 0$ il existe des entiers $p \geqq n$ et q et des unités matricielles e'_{ij} $(i,j = 1,2)$ appartenant à $A_n \otimes \ldots . A_p$ tels que, en notant e_{qij} les unités matricielles de A_q, on ait $\|T(e_{qij}) - e'_{ij}\| \leqq \varepsilon$.

Indiquons l'armature algébrique, très simple, de la démonstration ; considérons le produit tensoriel algébrique (= non complété) $A' = A_1 \otimes A_2 \otimes \ldots$ et supposons que T soit un automorphisme de A' ; on a $A' = T(A_1) \otimes T(A_2) \otimes \ldots$ donc $A_1 \otimes \ldots . A_{n-1}$ est contenu dans un sous-produit fini $T(A_1) \otimes \ldots T(A_{q-1})$; alors $T(A_q)$ permute à $A_1 \otimes \ldots A_{n-1}$, donc est contenu dans $A_n \otimes A_{n+1} \otimes \ldots$ et enfin, étant de dimension finie, dans un sous-produit fini $A_n \otimes \ldots A_p$.

<u>Théorème</u> 1. Les facteurs R_c pour $0 < c < \frac{1}{2}$ sont deux à deux non isomorphes.

Prenons deux nombres $0 < c \leqq c' < \frac{1}{2}$; notons f et f' les états de A associés à c et c' et supposons les facteurs $(\pi_f(A))'' \sim R_c$ et $(\pi_{f'}(A))'' \sim R_{c'}$ isomorphes ; soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 1 il existe un automorphisme T de A tel que f et $f' \circ T^{-1}$ soient quasi-équivalents ; d'après la prop. 2 il existe un entier n tel que

$$\|(f - f' \circ T^{-1})\ |A_n \otimes A_{n+1} \otimes \ldots .\| \leqq \varepsilon \qquad ; \qquad (2)$$

utilisons les notations p , q , e_{qij} , e'_{ij} du lemme 2 ; posons $B = A_n \otimes .. A_p$; on peut écrire $B = B_1 \otimes B_2$ où B_1 est engendré par les e'_{ij} , donc isomorphe à $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Il est facile de vérifier que pour tout $x \in A$ on a

$$f'(x) = ((1-c')\, f'(e_{q22}\, x\, e_{q22}) + c'\, f'(e_{q21}\, x\, e_{q12}))/f'(e_{q22}) \quad ;$$

il en résulte que

$$(f' o T^{-1})(x)=((1-c')(f' o T^{-1})(T(e_{q22})xT(e_{q22}))+c'(f' o T^{-1})(T(e_{q21})xT(e_{q12})))/(f' o T^{-1})(T(e_{q22}$$

On définit un état g sur B par

$$g(x) = ((1-c')(f' \circ T^{-1})(e'_{22} x e'_{22}) + c'(f' \circ T^{-1})(e'_{21}\, x\, e'_{12}))/(f' \circ T^{-1})(e'_{22})$$

et on vérifie que g est de la forme $g_1 \otimes g_2$ où g_1 a pour valeurs propres c' et $1-c'$; on vérifie ensuite que $\| g - (f' o T^{-1}) | B \| \leqq \varepsilon$; d'après (2) on a $\| g - f\, | B \, \| \leqq 2\varepsilon$, d'où, en vertu du lemme 1

$$\inf(c' - c \,,\, \tfrac{1}{2} - c') \leqq 4\, \varepsilon \quad ;$$

comme ε est arbitraire et comme $c' < \frac{1}{2}$, on a $c = c'$.

Bibliographie.

[1] J. Dixmier. On some C^*-algebras considered by Glimm. J. Funct.Anal. t.1, 1967 p. 182 - 203.

[2] J. Glimm. On a certain class of operator algebras. Trans. Amer. Math. Soc., t. 95, 1960, p. 318 - 340.

[3] A. Guichardet. Produits tensoriels infinis et représentations des relations d'anticommutation. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., t. 83, 1966, p. 1 - 52.

[4] F.J. Murray - J. von Neumann. On rings of operators. Ann. Math. t. 37, 1936, p. 116 - 229.

[5] J. von Neumann. On rings of operators III. Ann. Math., t. 41, 1940, p. 94 - 161.

[6] R.T. Powers. Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings. Ann. Math., t. 86, 1967, p. 138 - 171.

[7] L. Pukanszky. Some examples of factors. Publ. Math. (Debrecen), t. 4, 1956, p. 135 - 156.

[8] J. Schwartz. Non-isomorphism of a pair of factors of type III. Comm. Pure Appl. Math., t. 16, 1963, p. 111 - 120.