MICHEL DEMAZURE

Classification des algèbres de Lie filtrées

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 326, p. 203-213

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__203_0>

Séminaire BOURBAKI
19e Année, 1966/67 Juin 1967

CLASSIFICATION DES ALGÈBRES DE LIE FILTRÉES

par Michel DEMAZURE

Les algèbres de Lie filtrées interviennent naturellement en géométrie différentielle, dans l'étude des pseudogroupes et des G-structures, voir par exemple [8]. Donnons deux exemples typiques :

<u>Exemple</u> 1 (Cas fini). Soit X une variété analytique complexe, et soit G un groupe de Lie complexe opérant effectivement sur X. Soit $x_o \in X$; notons G_o le groupe d'isotropie de x_o, et pour chaque $i \geq 0$ notons G_i le sous-groupe de G_o formé des éléments induisant une transformation de X tangente à l'identité à l'ordre i en x_o. Notons $G = G_{-1}$, et soit g_i l'algèbre de Lie de G_i. Alors les G_i forment une filtration de $g_{-1} = g$. Si G opère transitivement sur X, g_{-1}/g_o s'identifie à l'espace tangent à X en x_o.

<u>Exemple</u> 2 (Cas infini). Soit de même X une variété analytique complexe connexe, et soit x_o un point de X. Soit g une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes sur X (par exemple l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs holomorphes) ; si O_{x_o} est l'anneau local de x_o, on a un homomorphisme injectif canonique $f : g \longrightarrow \mathrm{Der}(O_{x_o})$ de g dans l'algèbre de Lie des dérivations de la $\underline{\underline{C}}$-algèbre O_{x_o}. Soit m_{x_o} l'idéal maximal de O_{x_o}, et soit $\mathrm{Der}_i(O_{x_o})$ l'ensemble des dérivations de O_{x_o} qui envoient m_{x_o} dans $m_{x_o}^{i+1}$, $i \geq -1$. Alors les $g_i = f^{-1}(\mathrm{Der}_i(O_{x_o}))$ forment une filtration de $g_{-1} = g$, qui est séparée

Remarquons d'autre part que Der_{-1}/Der_o s'identifie canoniquement à l'espace tangent à X en x_o ; on dit que g est <u>transitive</u> si l'injection canonique $g_{-1}/g_o \longrightarrow Der_{-1}/Der_o$ est bijective.

1. Définitions.

Soit k un corps. On appelle algèbre de Lie filtrée sur k un espace vectoriel L muni d'une filtration décroissante $(L_n)_{n\in Z}$, $L_n \supset L_{n+1}$, et d'une structure d'algèbre de Lie vérifiant les conditions suivantes :

(ALF 1) $\bigcap_n L_n = 0$.

(ALF 2) $[L_p, L_q] \subset L_{p+q}$.

(ALF 3) $L_{-1} = L$.

(ALF 4) $\dim L_i/L_{i+1} < \infty$.

On dit que L est <u>transitive</u> si on a en outre la propriété suivante

(ALF T) Pour tout $p \geq 0$ et tout $x \in L_p$, $x \notin L_{p+1}$, il existe $y \in L$ tel que $[y,x] \notin L_p$.

Par exemple, une algèbre de Lie L de dérivations d'une k-algèbre locale de corps résiduel k est munie naturellement d'une filtration vérifiant (ALF i), i = 1,2,3,4, (voir exemple 2) ; si la condition donnée à la fin de l'exemple 2 est vérifiée, et si k est de caractéristique 0 , alors L est transitive. Remarquons d'ailleurs que la condition (ALF T) entraîne que les L_p , $p > 0$, sont déterminés par L_o , car on a alors

$$L_p = \{x \in L_{p-1} \, , \, [x,L] \subset L_{p-1}\} \, , \; p \geq 1 \; .$$

Réciproquement, si on se donne une algèbre de Lie L et une sous-algèbre L_o de L , et si on définit des sous-espaces L_p de L par la relation précédente pour $p > 0$, et par $L_p = L$ pour $p < 0$, on obtient une filtration de L vérifiant (ALF 2) et (ALF 3) . De plus, comme on le voit aussitôt, (ALF 1) et

(ALF 4) deviennent alors équivalents respectivement à

(ALF 1') Tout idéal de L contenu dans L_o est nul.

(ALF 4') $\dim L/L_o < \infty$.

Pour se donner une algèbre de Lie filtrée transitive L , il suffit donc de se donner une algèbre de Lie L , et une sous-algèbre L_o avec les deux conditions (ALF 1') et (ALF 4') .

On dit que l'algèbre de Lie filtrée transitive L est irréductible si $L \neq 0$ et si la représentation naturelle de l'algèbre de Lie L_o/L_1 dans l'espace vectoriel L_{-1}/L_o est irréductible. Dans le cas de l'exemple 1 , où on suppose de plus que G opère transitivement dans X , cela revient à dire que la représentation du groupe d'isotropie d'un point dans l'espace tangent en ce point est irréductible.

On dit que l'algèbre de Lie filtrée transitive L est primitive si L_o est une sous-algèbre maximale de L . Dans le cas de l'exemple 1 , où on suppose que G opère transitivement sur X , cela est vérifié lorsque X est un espace homogène primitif de G , c'est-à-dire lorsque les groupes d'isotropie sont des sous-groupes maximaux de G , ce qui revient aussi à dire que X ne possède pas d'espaces homogènes quotients non triviaux. Dans le cas de l'exemple 2 , on peut donner une interprétation du même genre à l'aide de feuilletages (voir la littérature).
Il est évident qu'une algèbre irréductible est primitive.

2. Classification (1° Dimension finie), [3] [6].

Nous nous proposons dans ce n° de donner la classification des algèbres de Lie filtrées primitives (resp. irréductibles) sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Le cas du corps $\mathbb{R}$ est analogue mais un peu plus compliqué (voir [6]).
Il faut d'abord éliminer un cas trivial, celui où $L_1 = 0$. Cela fait, on a le théorème suivant :

Théorème 1 ([6]).a) *Soit* L *une algèbre de Lie filtrée primitive sur* $\mathbb{C}$, *telle que* $L_1 \neq 0$, *et que* $\dim L < \infty$. *Alors* :

1) L <u>est une algèbre de Lie simple</u>,

2) L_o <u>est une sous-algèbre parabolique maximale de</u> L .

3) $L_2 = 0$, <u>et par conséquent</u> L_1 <u>est commutatif</u>.

b) <u>Réciproquement, soit</u> L <u>une algèbre de Lie simple complexe</u>, <u>et soit</u> L_o <u>une sous-algèbre parabolique maximale de</u> L . <u>Alors</u>

$$L_1 = \left\{ x \in L_o \text{ , } [x,L] \subset L_o \right\} \neq 0 \quad ,$$

<u>et</u> $L = L_{-1} \supset L_o \supset L_1 \supset L_2 = 0$ <u>est une algèbre de Lie filtrée primitive</u>.

<u>Démonstration de</u> a). Montrons d'abord que L est <u>simple</u>. Si J est un idéal non nul de L , on a $J + L_o = L$, car $J + L_o \not\subset L_o$ d'après (ALF 1') et $J + L_o$ est une sous-algèbre de L ; on en conclut que $[J,L_1] \neq 0$, car $[J,L_1] = 0$ entraînerait $[L,L_1] = [L_o,L_1] \subset L_1$, donc $L_1 = 0$ par (ALF 1') ; mais $[J,L_1] \subset [J,L] \cap [L,L_1] \subset J \cap L_o$, donc $J \cap L_o \neq 0$. Si J' est un autre idéal non nul de L , on a nécessairement $[J,J'] \neq 0$; sinon, on aurait $[L,J \cap L_o] = [L_o + J',J \cap L_o] \subset J \cap [L_o,L_o] \subset J \cap L_o$ et $J \cap L_o$ serait un idéal non nul de L , contredisant (ALF 1') . On a donc montré que si J et J' sont deux idéaux non nuls de L , on a $[J,J'] \neq 0$, ce qui entraîne que L est simple (car cela entraîne d'abord que tout idéal commutatif de L est nul, donc que L est semi-simple, puisque L n'a qu'un seul composant simple).
Montrons ensuite que $L_2 = 0$. On a $[L[L_2, L_p]] \subset L_{p+1}$, donc $ad(x)\ ad(y)$ est nilpotent pour $x \in L$, $y \in L_2$. Cela entraîne que L_2 est orthogonal à L pour la forme de Killing, donc nul. Enfin, comme $L_2 = 0$, L_1 est un idéal commutatif de L_o , et L_o n'est pas semi-simple. D'après le théorème de Morozov ([9]), une sous-algèbre maximale non semi-simple d'une algèbre semi-simple est une sous-algèbre parabolique maximale, ce qui achève la démonstration de a)

Avant de démontrer b) , rappelons la construction des sous-algèbres paraboliques maximales. Soit L une algèbre de Lie simple complexe ; choisissons une sous-algèbre de Cartan H de L , soit R l'ensemble des racines de L relativement à H et soit S un système de racines simples. On a $L = H \oplus \sum_{r \in R} L^r$. Soit $s \in S$; pour chaque $r \in R$, notons $a(r)$ le coefficient de s dans la décomposition de r sur S . Alors

$$L_o = H + \sum_{a(r) \geq 0} L^r$$

est une sous-algèbre parabolique maximale de L , et toute sous-algèbre parabolique maximale de L peut s'obtenir de la manière précédente pour un choix convenable de H, S et s .

Démontrons maintenant b) . D'après a) 3), la seule chose à démontrer est $L_1 \neq 0$; or si r_m est la plus grande racine de R pour l'ordre défini par S , on a $\left[L^{r_m}, L\right] \subset L_o$; en effet, si $r \in R$ et si $r + r_m \in R$, alors $r+r_m$ est positive, donc $L^{r+r_m} \subset L_o$.

En vertu des théorèmes de classification des algèbres de Lie simples et de conjugaison des sous-algèbres paraboliques, on déduit de ce qui précède que le couple (L, L_o) est donné à isomorphisme près par le couple (S, s) , où S est muni de sa structure naturelle de diagramme de Dynkin. On en conclut :

Corollaire. Les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie filtrées primitives sur $\underline{C}$ telles que $L_p \neq 0$ et que $\dim L < \infty$ correspondent bijectivement aux couples (S, S_o) où S est un diagramme de Dynkin ($S = A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ ou G_2) et où S_o est une orbite du groupe des automorphismes de S .

Notons L_{S,S_o} une algèbre de Lie filtrée (définie à isomorphisme près) correspondant au couple (S, S_o). La classification des algèbres irréductibles est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 2. [6]. Pour que L_{S,S_o} soit irréductible, il faut et il suffit que dans la plus grande racine du système de racines correspondant à S, les éléments de S_o (ou l'un d'eux, ce qui revient au même) interviennent avec le coefficient 1.

En effet, reprenant la description explicite donnée précédemment, L/L_o s'identifie à $\sum_{a(r)<0} L^r$, et on vérifie sans difficultés que $\sum_{a(r)=-1} L^r$ est un sous-espace stable sous L_o minimal. On conclut alors en remarquant que la valeur minimum de $a(r)$ est $a(-r_m)$ où r_m est la plus grande racine.

3. Algèbres de Lie graduées transitives de dimension infinie.

Si L est une algèbre de Lie filtrée, on définit l'algèbre de Lie graduée assocée par $G = \sum G_i$, où $G_i = L_i/L_{i+1}$. Les axiomes (ALF i), $i = 1,2,3,4$, deviennent

(ALG 2) $[G_i,G_j] \subset G_{i+j}$.

(ALG 3) $G_n = 0$ pour $n = -2,-3,\ldots$

(ALG 4) $\dim G_i < \infty$.

De même l'axiome (ALF T) devient

(ALG T) Si $x \in G_p$, $p \geq 0$, et si $[G_{-1},x] = 0$, alors $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'une graduation et d'une structure d'algèbre de Lie satisfaisant aux axiomes (ALG i), $i = 2,3,4$ est appelé une algèbre de Lie graduée ; elle est dite transitive si (ALG T) est vérifié.

Soit $G = \sum G_i$ une algèbre de Lie graduée, posons $V = G_{-1}$. On définit une application linéaire

$$f_i : G_i \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^{i+1}V,V) ,$$

en posant $f_i(x)(v_1 . v_2 \ldots v_{i+1}) = [\ldots[[x,v_1],v_2],\ldots v_{i+1}]$ pour $v_\alpha \in V$,

$x \in G_i$; il est clair que G est transitive si et seulement si f_i est injective pour chaque i. D'autre part posons $f_0(G_0) = H$, c'est une sous-algèbre de Lie de End(V). Pour chaque $i \geq 0$, soit $P(H)_i$ $\mathrm{Hom}(S^{i+1}V, V)$ défini par

$$f \in P(H)_i \Leftrightarrow \begin{cases} \text{pour tout } u \in S^iV \text{, l'application } x \to f(ux) \\ \text{appartient à } H_0 . \end{cases}$$

Posons $P(H)_{-1} = V$; il est clair que f_i envoie G_i dans $P(H)_i$ pour chaque i.

On dit que H est de type infini si l'ensemble des i tels que $P(H)_i \neq 0$ est infini. La discussion précédente montre alors que si $G = \sum G_i$ est une algèbre de Lie graduée transitive de dimension infinie, alors $G_0 \subset \mathrm{End}(G_{-1})$ est de type infini. En fait, $P(G_0)$ est une algèbre graduée transitive qui contient G, c'est même la plus grande qui possède cette propriété et qui coïncide avec G en degrés -1 et 0.

La détermination des algèbres transitives de dimension infinie commence donc par la détermination des algèbres de Lie (ordinaires) de type infini. Or on a le lemme :

Lemme 1 ([1]) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\underline{\mathbb{C}}$. Pour que $H \subset \mathrm{End}(V)$ soit de type infini, il faut et il suffit qu'il contienne un endomorphisme de rang un.

Que la condition soit suffisante est trivial. C'est malheureusement la réciproque qui nous intéresse ici ; voir la démonstration dans [1]. On en conclut aussitôt

Proposition 1. Soit L une algèbre de Lie filtrée transitive de dimension infinie. Alors L_0/L_1 considérée comme algèbre de Lie d'endomorphismes de L_{-1}/L_0 contient un endomorphisme de rang un.

4. Classification (2° Algèbres irréductibles infinies) [2].[4]

Proposition 2. Et soit H une sous-algèbre de Lie de $gl(V) = \mathrm{End}(V)$ contenant un endomorphisme de rang un et telle que la représentation $H \longrightarrow End(V)$ soit irréductible. Alors H est soit $gl(V)$, soit $sl(V)$, soit $sp(V)$ (pour une forme alternée convenable), soit $csp(V)$ (i.e. $sp(V) + \underline{\underline{C}}$), pour une forme alternée convenable).

La représentation $H \longrightarrow End(V)$ étant irréductible, H est réductive et son centre est soit nul, soit réduit aux homothéties. Il existe par hypothèse des éléments non nuls $\xi \in V^* = Hom(V,\underline{\underline{C}})$ tels qu'il existe $h \in H$ et $v \in V$, $v \neq 0$ avec $h(x) = \xi(x)\,v$ pour $x \in V$. Comme V est irréductible sous H, donc aussi V^*, on en déduit sans difficultés que ces éléments engendrent V^*. Choisissons une sous-algèbre de Cartan de la partie semi-simple de H, et un système de racines positives et soit λ (resp. μ) le plus haut poids de V (resp. V^*). Alors $\lambda + \mu$ est le plus haut poids de $V^* \otimes V$. Identifions H à un sous-espace stable de $V^* \otimes V$; d'après ce qui précède, il existe un élément non nul $\xi \otimes v$ de H tel que la composante ξ_μ de ξ soit $\neq 0$; faisant agir des éléments radiciels de H, on en conclut facilement que $\lambda + \mu$ est un poids de H, donc nécessairement la plus grande racine r_m de H. Or la classification montre que r_m est toujours un poids fondamental, sauf dans les cas A_n et C_n où c'est la somme de deux poids fondamentaux, ces poids correspondant aux représentations évidentes et à leurs contragrédientes. Cela entraîne aussitôt le résultat.

D'autre part, on détermine sans peine (voir [4]) les algèbres de Lie graduées transitives telles que $G_0 \subset End(G_{-1})$ soit de l'un des quatre types précédents ; on obtient en particulier cinq types d'algèbres infinies :

$$V \oplus gl(V) \oplus P(gl(V))_1 \oplus P(gl(V))_2 \oplus \dots = P(gl(V)) \ .$$

$$V \oplus gl(V) \oplus P(sl(V))_1 \oplus P(sl(V))_2 \oplus \dots = P(sl(V)) + \text{scalaires} \ .$$

$$V \oplus sl(V) \oplus P(sl(V))_1 \oplus P(sl(V))_2 \oplus \dots = P(sl(V)) \ .$$

$$V \oplus sp(V) \oplus P(sp(V))_1 \oplus P(sp(V))_2 \oplus \dots = P(sp(V)) \ .$$

$$V \oplus csp(V) \oplus P(sp(V))_1 \oplus P(sp(V))_2 \oplus \dots = P(csp(V)) = P(sp(V)) + \text{scalaires} \ .$$

Il ne reste plus qu'à passer des algèbres graduées aux algèbres filtrées. Cela se fait par une technique de variations de structures trop longue pour être exposée ici (voir [5],[7] ; dans ce dernier article, un certain nombre de résultats sont erronés). On obtient ainsi :

Théorème 3. Soit L une algèbre de Lie filtrée transitive irréductible de dimension infinie, complète pour la topologie définie par la filtration. Alors l'algèbre graduée associée gr(L) est de l'un des cinq types précédents, et L est isomorphe à l'algèbre filtrée complétée de l'algèbre gr(L) munie de la filtration évidente (donc s'obtient en remplaçant les ⊕ par des x dans les expressions ci-dessus).

5. Classification (3° Algèbres primitives infinies)

On trouvera dans [2] une description des algèbres infinies primitives non irréductibles. La démonstration est malheureusement faite dans le cadre des pseudogroupes et utilise des résultats sur les systèmes différentiels. Une grande partie de cette démonstration se transcrit sans difficultés dans le cadre algébrique présenté ici, mais il me manque encore un pas essentiel, l'existence de suffisamment d'éléments de rang un dans l'algèbre L_o/L_1 (voir [2] , corollary to lemma 2).

6. Classification (4° Algèbres infinies).

Si G est un groupe de Lie complexe, d'algèbre de Lie L , la donnée d'une filtration transitive sur L revient à peu près à la donnée d'une opération localement transitive de G sur une variété V . On doit donc considérer que l'objet originel est l'algèbre de Lie non filtrée et que la donnée d'une filtration revient à celle d'une certaine représentation géométrique de cette algèbre de Lie.

En dimension infinie, la situation est plus compliquée, car l'objet global correspondant à une algèbre de Lie filtrée est un pseudogroupe d'automorphismes d'une variété,et qu'il n'est pas possible de définir abstraitement un pseudogroupe, indépendamment de la variété sur laquelle il opère. C'est là le "problème d'équivalence" de Cartan : quand doit-on considérer que deux pseudogroupes sont des représentations du même "pseudogroupe abstrait" ? Dans le cas des algèbres de Lie filtrées, la réponse est simple : deux algèbres de Lie filtrées sont équivalentes si elles sont isomorphes comme algèbres de Lie topologiques (Remarquons en passant que dans le cas de dimension finie, la topologie est discrète). Il s'agit donc de classifier les algèbres de Lie topologiques L dont la topologie peut être définie par une filtration transitive.

On dit qu'une telle algèbre de Lie est simple si elle ne possède pas d'idéal commutatif fermé non nul. Si L est une algèbre de Lie simple, et si L_o est une sous-algèbre ouverte distincte de L et maximale, alors la filtration (L_p) définie par L_o est séparée (car l'intersection des L_p est un idéal fermé de L) et définit la topologie initiale (comme on le voit facilement à l'aide d'un lemme du type Artin-Rees). On en conclut qu'une algèbre de Lie simple est équivalente à une algèbre de Lie primitive. Les résultats donnés précédemment permettent donc en principe, d'établir la classification des algèbres de Lie simples.

Enfin, il reste à étudier les algèbres de Lie "résolubles", "nilpotentes", etc... Des travaux sont actuellement en cours sur cette question.

7. Remarques historiques.

La plupart des questions effleurées ici ont été introduites et étudiées par Elie Cartan. Celui-ci a donné la classification des algèbres de Lie finies irréductibles réelles (en en oubliant 2), et celle des algèbres de Lie infinies irréductibles complexes (par un épuisant calcul cas par cas, dont il ne donne pas les détails, et dont certains pas semblent abusifs). Il a également donné une classification des algèbres de Lie primitives finies, qui est différente de celle donnée ici, et qui se base sur un théorème faux (voir [6]).

Les démonstrations correctes des résultats donnés ici sont récentes (voir la bibliographie), et on peut raisonnablement espérer que d'ici quelques années, les n° 5 et 6 de cet exposé pourront être remplacés par des énoncés en forme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUILLEMIN (Victor), QUILLEN (Daniel) and STERNBERG (Shlomo) - The classification of the irreductible complex algebras of infinite type. (à paraître)

[2] GUILLEMIN (Victor), QUILLEN (Daniel) and STERNBERG (Shlomo) - The classification the complex primitive infinite pseudogroups. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 55 n°4, p.687-690 - April 1966.

[3] KOBAYASHI (Shoshichi) and NAGANO (Tadashi) - On filtered Lie algebras and geometric structures I- Journal of Math. and Mec., vol. 13, n°5. p.875-906 - 1964.

[4] KOBAYASHI (Shoshichi) and NAGANO (Tadashi) - On filtered Lie algebras and geometric structures III- Journal of Math. and Mec., vol. 14, n°4. p.679-706 - 1965.

[5] KOBAYASHI (Shoshichi) and NAGANO (Tadashi) - On filtered Lie algebras and geometric structures IV- Journal of Math. and Mec., vol. 15, n°1. p.163-175 - 1966.

[6] OCHIAI (Takushiro) - Classification of the finite nonlinear primitive Lie algebras - Transaction of the American Mathematical Society, vol. 124, n°2, p.313-322 - August 1966.

[7] RIM (D.S) - Deformation of transitive Lie algebras - Annals of Math., vol. 83, n°2, p.339-357 - March 1966.

[8] SINGER (I.M) and STERNBERG (Shlomo) - On the infinite groups of Lie and Cartan I- Journal d'Analyse Mathématique, vol. 15, p.1-114 - 1965.

[9] TITS (Jacques) - Sous-algèbres des algèbres de Lie semi-simples, Séminaire Bourbaki, n°119 - 1955.