PIERRE GRISVARD

Méthodes opérationnelles dans l'étude des problèmes aux limites

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 289, p. 187-197
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__187_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 289

Mai 1965

MÉTHODES OPÉRATIONNELLES DANS L'ÉTUDE DES PROBLÈMES AUX LIMITES

par Pierre GRISVARD

1. Motivation.

1.1 On se propose de résoudre le problème aux limites suivant : Etant donné $f \in L_p(Q)$ (Q cylindre $I \times \Omega$, avec $I =]0\,,\,T[$, $T < +\infty$ et Ω ouvert borné "régulier" de $\underset{\sim}{R}^n$), on cherche u , solution de

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u \,,\ \partial u/\partial t \,,\ D^\alpha u \in L_p(Q) \,, & |\alpha| \leqslant 2m \,, \\ Lu = -\partial u/\partial t + A(D)u = f \quad \text{dans } Q \,, \\ u(0\,,\,x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \,, \\ C_j(D)u = 0 \quad \text{sur } I \times \partial\Omega \,, \quad j = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,m \,, \end{cases}$$

où $A(D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha$, $D = (\partial/\partial x_1 \,,\, \ldots \,,\, \partial/\partial x_n)$ est tel que $(-1)^{m+1} A(D)$ soit <u>fortement elliptique</u> (L est alors un opérateur <u>parabolique</u>), i. e.

$$\operatorname{Re}(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha \xi^\alpha > 0 \,, \qquad \xi \in \underset{\sim}{R}^n \,, \quad \xi \neq 0 \,,$$

et où les $C_j(D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} c_{j,\alpha} D^\alpha$ sont m opérateurs d'ordre $\leqslant 2m - 1$ (les a_α et $c_{j,\alpha}$ sont des fonctions différentiables de la seule variable x $\overline{\Omega}$).

1.2 On peut reformuler le problème (1.1) de la manière suivante : On pose $E = L_p(Q)$,

$$D_A = L_p(W_p^{2m}(\Omega \,;\, \{C_j\})) = \left\{u \;;\ D^\alpha u \in L_p(Q) \,,\ |\alpha| \leqslant 2m \,,\ C_j(D)u = 0 \ \text{ sur } I \times \partial\Omega\right\} ,$$

$$D_B = {}_0W_p^1(L_p(\Omega)) = \left\{u \;;\ u \,,\ \partial u/\partial t \in L_p(Q) \,,\ u(0\,,\,x) = 0\right\} ,$$

alors $A = A(D)$ et $B = -\partial/\partial t$ sont des opérateurs linéaires non bornés dans E , de domaines D_A et D_B respectivement.

La propriété suivante est évidente :

(i) B <u>est un opérateur fermé, de spectre vide et</u>

$$\|(-B + \lambda)^{-1}\|_{E \to E} \leqslant 1/\operatorname{Re}\lambda \quad \underline{\text{pour}} \quad \operatorname{Re}\lambda > 0 \,.$$

D'après LIONS [10] dans le cas $p = 2$, et AGMON [1] dans le cas $1 < p < +\infty$ (hypothèse que nous ferons toujours dans la suite), si on suppose que, pour tout λ avec $\pi/2 < \arg \lambda < 3\pi/2$ et pour tout $x \in \partial\Omega$, ξ vecteur tangent non nul à $\partial\Omega$ en x, et n désignant la normale à $\partial\Omega$ en x intérieure à Ω, les polynômes en t : $C_j^o(\xi + tn)$ sont linéairement indépendants modulo $\prod_{k=1}^{m} (t - t_k)$ où les t_k sont les m racines de partie imaginaire positive du polynôme en t : $(-1)^{m+1} A^o(\xi + tn) - \lambda$ (1), alors on a

(ii) A <u>est un opérateur fermé, et il existe</u> $\theta_o < \pi/2$ <u>et</u> ρ_o <u>tels que</u> $(A + \lambda)$ <u>soit inversible et</u> $\|(A + \lambda)^{-1}\|_{E\to E} \leqslant C_A/|\lambda|$ <u>pour</u> $|\lambda| \geqslant \rho_o$ <u>et</u> $\theta_o \leqslant \arg \lambda \leqslant 2\pi - \theta_o$.

Enfin on vérifie aisément ceci :

(iii) <u>Les opérateurs</u> (<u>bornés dans</u> E) $(A + \lambda)^{-1}$ <u>et</u> $(-B + \lambda)^{-1}$ <u>commutent pour</u> $|\lambda| \geqslant \rho_o$ <u>et</u> $\theta_o \leqslant \arg \lambda \leqslant 2\pi - \theta_o$.

Ceci posé, le problème (1.1) est équivalent au suivant : Etant donné $f \in E$, on cherche u, solution de

$$(1.2) \qquad \begin{cases} u \in D_A \cap D_B , \\ Au + Bu = f . \end{cases}$$

Nous allons étudier ce problème sous les hypothèses (i), (ii), (iii).

2. Interpolation et opérateurs non bornés.

2.1 On rappelle la définition des espaces d'interpolation réels de LIONS-PEETRE [11] : Soient F_i, $i = 0, 1$ deux espaces de Banach continûment plongés dans le même espace de Banach F ; on désigne par $(F_o, F_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ le sous-espace de F formé des x qui, pour tout $t > 0$, peuvent s'écrire

$$x = v(t) + w(t)$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \|t^{-\theta} v(t)\|_{F_o}^p \, dt/t + \int_0^{+\infty} \|t^{1-\theta} w(t)\|_{F_1}^p \, dt/t < +\infty ;$$

$(F_o, F_1)_{\theta,p}$ est un espace de Banach pour la norme naturelle.

Les espaces ainsi construits ont la propriété d'interpolation : Si G_i, $i = 0, 1$ est un second couple d'espaces de Banach analogue au couple F_i, $i = 0, 1$, et si π est un opérateur linéaire continu de F dans G, qui applique F_i dans G_i, $i = 0, 1$, alors π est linéaire continu de $(F_o, F_1)_{\theta,p}$ dans $(G_o, G_1)_{\theta,p}$ et,

---

(1) Le symbole ^{o} signifie que l'on prend la partie homogène d'ordre maximum de l'opérateur.

de plus, on a la majoration

$$(2.1) \qquad \|\pi\|_{(F_o,F_1)_{\theta,p} \to (G_o,G_1)_{\theta,p}} \leqslant \|\pi\|^{1-\theta}_{F_o\to G_o} \|\pi\|^{\theta}_{F_1\to G_1} .$$

Enfin l'application réitérée de la construction, rappelée ci-dessus, conduit à des espaces du même type ; plus précisément d'après LIONS-PEETRE [11], on a l'identité :

$$(2.2) \qquad ((F_o , F_1)_{\theta_o,p_o} ; (F_o , F_1)_{\theta_1,p_1})_{\theta,p} = (F_o , F_1)_{(1-\theta)\theta_o+\theta\theta_1,p} .$$

2.2 Considérons à présent un espace de Banach E et un opérateur Λ (non borné) linéaire fermé dans E ; D_Λ est un espace de Banach pour la norme du graphe, et l'injection de D_Λ dans E est continue. Sous des hypothèses convenables sur Λ, on peut expliciter $(D_{\Lambda^m} , E)_{\theta,p}$:

THÉORÈME 2.1. - <u>On suppose que</u> $(-\Lambda + t)$ <u>est inversible pour</u> $t \geqslant 0$ <u>et que</u> $\|(-\Lambda + t)^{-1}\|_{E\to E} \leqslant C_\Lambda/(t+1)$, <u>alors</u> $(D_{\Lambda^m} , E)_{\theta,p}$ <u>est le sous-espace de</u> E <u>formé des</u> x <u>tels que</u>

$$\int_0^{+\infty} \|t^{m(1-\theta)} \Lambda^m(-\Lambda + t)^{-m} x\|_E^p \, dt/t < +\infty .$$

COROLLAIRE 2.1. - <u>Sous les hypothèses du théorème 2.1, on a l'identité</u>

$$(D_{\Lambda^m} , D_{\Lambda^n})_{\theta,p} = (D_{\Lambda^\mu} , D_{\Lambda^\nu})_{t,p} , \ \underline{\text{lorsque}} \ m(1-\theta) + n\theta = \mu(1-t) + \nu t .$$

Pour les démonstrations, renvoyons simplement à [6], [7].

3. Le théorème principal.

3.1 On revient au problème (1.2) : Il s'agit d'inverser l'opérateur $A + B$. Par analogie avec l'identité

$$(a + b)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (a + z)^{-1} (-b + z)^{-1} dz ,$$

où a et b sont des nombres complexes et γ un contour simple d'indice 1 par rapport à b et d'indice zéro par rapport à $-a$, on introduit l'opérateur

$$(3.1) \qquad S = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (A + z)^{-1} (-B + z)^{-1} dz ,$$

où γ est un contour simple joignant $\infty e^{-i\theta}$ à $\infty e^{+i\theta}$ $(\theta_o < \theta < \pi/2)$ et tel que le spectre de $-A$ (ensemble des z pour lesquels $(A + z)$ n'est pas inversible) soit "extérieur" à γ. La fonction

$$z \longmapsto (A + z)^{-1} (- B + z)^{-1}$$

admet une majoration en $1/|z|^2$ lorsque $|z| \to \infty$ sur le contour γ, et est holomorphe au voisinage de γ ; par conséquent (3.1) définit S comme opérateur linéaire continu dans E.

L'analogie scalaire n'est pas complète puisque sous les hypothèses (i), (ii), (iii), l'opérateur $A + B$ n'est pas inversible en général (on peut construire des contre-exemples) ; cependant on a :

THÉORÈME 3.1. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), S a les propriétés suivantes :

(1) $S(Au + Bu) = u$ pour $u \in D_A \cap D_B$;

(2) $ASu + BSu = u$ pour $u \in D_A \cap D_B$;

(3) S est linéaire continu de E dans $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty} \cap (D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty}$.

L'espace $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty} \cap (D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty}$ est un espace très "voisin" de $D_A \cap D_B$. Nous verrons plus loin que, grâce à cet énoncé, on peut construire des sous-espaces de E dans lesquels la restriction de $A + B$ est inversible (d'inverse S).

3.2 Démonstration des points (1) et (2) : On a

$$S(Au + Bu) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma u_z \, dz$$

avec

$$\begin{aligned} u_z &= (A + z)^{-1} (- B + z)^{-1} Bu + (- B + z)^{-1} (A + z)^{-1} Au \\ &= (- B + z)^{-1} u - (A + z)^{-1} u \\ &= (1/z)(- B + z)^{-1} Bu + (1/z)(A + z)^{-1} Au , \end{aligned}$$

d'où

$$S(Au + Bu) = - (- B + z)^{-1} Bu|_{z=0} = u ,$$

ce qui prouve (1).

Pour démontrer (2), on remarque que la fonction

$$z \longmapsto (A + z)^{-1} (- B + z)^{-1}$$

admet une majoration en $1/|z|^2$ sur γ, comme opérateur linéaire continu dans $D_A \cap D_B$; par conséquent, on a $Su \in D_A \cap D_B$ et

$$ASu + BSu = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma v_z \, dz$$

avec

$$v_z = A(A+z)^{-1}(-B+z)^{-1}u + B(-B+z)^{-1}(A+z)^{-1}u$$
$$= (-B+z)^{-1}u - (A+z)^{-1}u = u_z ,$$

d'où

$$ASu + BSu = u ,$$

ce qui prouve (2).

3.3 Démonstration du point (3). Pour prouver que S est linéaire continu de E dans $(D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty}$, il suffit, d'après le théorème 2.1, de voir qu'il existe C tel que, pour $f \in E$, on ait

$$\|tB^2(-B+t)^{-2}Sf\|_E \leq C\|f\|_E \tag{3.2}$$

pour tout $t > 0$. Par un calcul analogue au précédent, utilisant l'"identité de la résolvante" et l'identité suivante

$$(-B+t)^{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (-B+z)^{-1}(z-t)^{-2}\,dz ,$$

on obtient l'identité

$$tB^2(-B+t)^{-2}Sf = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma tz^2(-z+t)^{-2}(-B+z)^{-1}(A+z)^{-1}f\,dz .$$

On en déduit la majoration

$$\|tB^2(-B+t)^{-2}Sf\|_E \leq \frac{\mathrm{Cte}}{2\pi}\, t\int_\gamma |t-z|^{-2}\,|dz|\,\|f\|_E ,$$

d'où (3.2). La démonstration du fait que S est linéaire continu de E dans $(D_{A^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty}$ est analogue.

3.4 Nous allons utiliser le théorème 3.1 en remplaçant E par D_B ; précisément, posons $\tilde{E} = D_B$, et notons $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ les restrictions des opérateurs A et B à $\tilde{E}$, alors

$$D_{\tilde{A}} = \{x \in D_A \cap D_B \; ; \; Ax \in D_B\} , \qquad D_{\tilde{B}} = D_{B^2} .$$

Il est évident que $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ vérifient les hypothèses (i), (ii), (iii), dans $\tilde{E}$, et par conséquent $\tilde{S}$, restriction de S à $\tilde{E}$, est linéaire continu de $\tilde{E}$ dans $(D_{\tilde{A}^2}, \tilde{E})_{\frac{1}{2},\infty} \cap (D_{\tilde{B}^2}, \tilde{E})_{\frac{1}{2},\infty}$. Nous savons donc en particulier que S est linéaire continu de E dans $(D_{B^2}, E)_{\frac{1}{2},\infty}$ et de D_B dans $(D_{B^3}, D_B)_{\frac{1}{2},\infty}$. Par interpolation, en utilisant le corollaire 2.1 et l'identité (2.2), on en déduit que S est linéaire continu de $(D_B, E)_{\theta,p}$ dans $(D_{B^2}, D_B)_{\theta,p}$, et par conséquent S est linéaire continu de $(D_B , E)_{\theta,p}$ dans D_B , et S et BS sont linéaires continus dans $(B_B , E)_{\theta,p}$. Comme A est fermé, l'identité

$$ASf = Sf - BSf ,$$

qui est vraie pour $f \in D_A \cap D_B$, se prolonge par continuité à $(D_B , E)_{\theta,p}$, car nos hypothèses impliquent que $D_A \cap D_B$ est dense dans D_B , donc aussi dans $(D_B , E)_{\theta,p}$ d'après LIONS-PEETRE [11]. On a ainsi prouvé :

COROLLAIRE 3.1. - Sous les hypothèses (i), (ii), (iii), $A + B$ est un isomorphisme de

$$W^{(A,B)}_{(D_B,E)_{\theta,p}} = \{u \in D_A \cap D_B \ ; \ Au , Bu \in (D_B , E)_{\theta,p}\}$$

sur $(D_B , E)_{\theta,p}$, d'inverse S .

Remarque.

1° Dans l'énoncé précédent, on peut évidemment intervertir les rôles de A et B.

2° On a obtenu le corollaire 3.1 en appliquant le théorème 3.1 à un sous-espace de E ; on aurait pu au contraire appliquer le théorème 3.1 à des extensions de E , on aurait ainsi obtenu des résultats d'isomorphisme dans des espaces plus "grands" que E .

4. Application aux équations paraboliques.

4.1 On revient au problème concret (1.1) ; il faut interpréter les espaces $(D_B , E)_{\theta,p}$. D'après le théorème 2.1, $({}_oW^1_p(L_p(\Omega)) , L_p(Q))_{\theta,p}$ est le sous-espace de $L_p(Q)$ formé des fonctions u telles que

$$\int_o^{+\infty} r^{p(1-\theta)} \int_Q |u(t , x) - re^{-rt} \int_o^t e^{rs} u(s , x) \, ds|^p \, dt \, dx \, dr/r < +\infty .$$

Cette condition compliquée est équivalente, d'après LIONS-PEETRE [11], à la suivante, lorsque $1 - \theta < 1/p$,

$$\int_o^T \int_o^T \int_Q \frac{|u(t , x) - u(r , x)|^p}{|t - r|^{1+p(1-\theta)}} \, dx \, dt \, dr < +\infty ,$$

et par conséquent $(D_B , E)_{\theta,p}$ n'est autre que l'espace $W^{1-\theta}_p(L_p(\Omega))$ déjà utilisé par de nombreux auteurs pour généraliser, au cas des exposants non entiers, les espaces de Sobolev (cf. par exemple [4], [12], [13]).

Compte tenu de ceci, nous avons prouvé :

THÉORÈME 4.1. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p < +\infty$, $0 < s < 1/p$, le problème

$$\begin{cases} u\ ,\ \partial u/\partial t\ ,\ D^\alpha u \in W_p^s(L_p(\Omega))\ , & |\alpha| \leq 2m\ , \\ Lu = -\partial u/\partial t + A(D)u = f \ \text{dans}\ Q\ , \\ u(0\ ,\ x) = 0 \ \text{dans}\ \Omega\ , \\ C_j(D)u = 0 \ \text{sur}\ I \times \partial\Omega\ , & j = 1\ , \ldots\ , m\ , \end{cases}$$

admet une solution unique pour $f \in W_p^s(L_p(\Omega))$.

De même, en échangeant les rôles de A et B, on obtient un énoncé analogue pour $1 < p < +\infty$, et $0 < s < 1/2mp$, où $W_p^s(L_p(\Omega))$ est remplacé par $L_p(W_p^s(\Omega))$, ce dernier espace désignant le sous-espace de $L_p(Q)$ formé des u telles que

$$\int_0^T \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(t\ ,\ x) - u(t\ ,\ y)|^p}{|x - y|^{n+ps}}\, dx\, dy\, dt < +\infty\ .$$

4.2 On peut encore appliquer les résultats du n° 3 aux équations paraboliques, en prenant pour E un espace différent de $L_p(Q)$. Prenons par exemple

$$E = W_p^{-s}(L_p(\Omega)) = \left(W_{p'}^s(L_{p'}(\Omega))\right)'$$

avec $-s > -1 + 1/p$ $(1/p + 1/p' = 1)$; on vérifie facilement les hypothèses (i), (ii), (iii) sur les opérateurs A et B définis comme suit :

$$D_A = W_p^{-s}(W_p^{2m}(\Omega\ ,\ \{C_j\}))$$
$$= \{u\ ;\ D^\alpha u \in W_p^{-s}(L_p(\Omega))\ ,\ |\alpha| \leq 2m,\ C_j(D)u = 0 \ \text{sur}\ I \times \partial\Omega,\ j = 1,\ldots,m\}$$

$$D_B = {}_0W_p^{1-s}(L_p(\Omega))$$
$$= \{u\ ;\ u\ ,\partial u/\partial t \in W_p^{-s}(L_p(\Omega))\ ,\ u(0,x) = 0\} = \{u \in W_p^{1-s}(L_p(\Omega))\ ;\ u(0,\ x) = 0\}\ ,$$

avec $Au = A(D)u$ pour $u \in D_A$ et $Bu = -\partial u/\partial t$ pour $u \in D_B$.

Dans ce cas, d'après LIONS-PEETRE [11], on a

$$(D_B\ ,\ E)_{\theta,p} = W_p^{1-s-\theta}(L_p(\Omega))$$

pour $1 - s - \theta < 1/p$ et $\neq 0$. En choisissant θ tel que $1 - s - \theta < 0$, on obtient l'extension du théorème 4.1 au cas où $-1 + 1/p < s < 0$. Le cas exceptionnel $1 - s - \theta = 0$ est le plus intéressant, nous allons le détailler : On a alors

$$(D_B\ ,\ E)_{\theta,p} = B_p^0(L_p(\Omega))$$

(l'espace ainsi obtenu ne dépend pas du choix particulier de s). On ne sait pas caractériser explicitement l'espace $B_p^o(L_p(\Omega))$ (sauf dans le cas $p = 2$ où il coïncide avec $L_2(Q)$), on sait seulement que les inclusions suivantes ont lieu (cf. [7], [13]) :

(4.1) $$B_p^o(L_p(\Omega)) \subset L_p(Q) \qquad \text{pour} \quad 1 < p \leq 2 \ ,$$

(4.2) $$B_p^o(L_p(\Omega)) \supset L_p(Q) \qquad \text{pour} \quad 2 \leq p < +\infty \ .$$

On a donc :

THÉORÈME 4.2. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p < +\infty$, le problème

$$\begin{cases} u \ , \ \partial u/\partial t \ , \ D^\alpha u \in B_p^o(L_p(\Omega)) \ , & |\alpha| \leq 2m \ , \\ Lu = - \partial u/\partial t + A(D)u = f \ \underline{\text{dans}} \ Q \ , \\ u(0 \ , x) = 0 \ \underline{\text{dans}} \ \Omega \ , \\ C_j(D)u = 0 \ \underline{\text{sur}} \ I \times \partial\Omega \ , & j = 1 \ , \dots \ , m \end{cases}$$

admet une solution unique pour $f \in B_p^o(L_p(\Omega))$.

4.3 Compte tenu de l'identité $B_2^o(L_2(\Omega)) = L_2(Q)$, on a complètement résolu le problème (1.1) dans le cas $p = 2$. Le théorème 4.2 joint à un résultat sur les intégrales singulières permet de résoudre le problème (1.1) dans le cas $p \leq 2$.

Pour commencer, on explicite les problèmes aux limites non homogènes correspondant aux problèmes résolus dans le théorème 4.2 ; pour cela, on utilise :

LEMME 4.1. - Soit w telle que

$$w \ , \ \partial w/\partial t \ , \ D^\alpha w \in L_p(Q) \qquad |\alpha| \leq 2m \ ,$$

alors il existe v telle que

$$v \ , \ \partial v/\partial t \ , \ D^\alpha v \in B_p^o(L_p(\Omega)) \qquad |\alpha| \leq 2m \ ,$$

et que

$$\begin{cases} w(0 \ , x) = v(0 \ , x) \ \underline{\text{dans}} \ \Omega \ , \\ C_j(D)w = C_j(D)v \ \underline{\text{sur}} \ I \times \partial\Omega \qquad j = 1 \ , \dots \ , m \end{cases}$$

(cf. [7] pour la démonstration d'énoncés voisins). On en déduit :

LEMME 4.2. - Sous les hypothèses du n° 1, et pour $1 < p \leq 2$, étant donnée w telle que

$$w \ , \ \partial w/\partial t \ , \ D^\alpha w \in L_p(Q) \qquad |\alpha| \leq 2m$$

<u>il existe</u> u <u>telle que</u>

$$\begin{cases} u \, , \, \partial u/\partial t \, , \, D^{\alpha} u \in L_p(Q) \, , & |\alpha| \leq 2m \, , \\ Lu = - \partial u/\partial t + A(D)u = 0 \ \underline{\text{dans}} \ Q \, , \\ u(0 \, , x) = w(0 \, , x) \ \underline{\text{dans}} \ \Omega \, , \\ C_j(D)u = C_j(D)w \ \underline{\text{sur}} \ I \times \partial\Omega \, , \ j = 1 \, , \dots \, , m \, . \end{cases}$$

En effet, soit v comme dans le lemme 4.1, on a $Lv = f \in B_p^o(L_p(\Omega))$, et par conséquent on peut, d'après le théorème 4.2, trouver une fonction a telle que

$$a \, , \, \partial a/\partial t \, , \, D^{\alpha} a \in B_p^o(L_p(\Omega)) \qquad |\alpha| \leq 2m$$

avec $La = f$ dans Q et $a(0 \, , x) = 0$, $C_j(D)a = 0$ sur $I \times \partial\Omega$, $j = 1 \, , \dots , m$; $u = v - a$ est la fonction cherchée compte tenu des inclusions (4.1).

D'après ARNESE [5], JONES [8], KRÉE [9], L possède une solution élémentaire Γ telle que

$$f \longmapsto \{w \, , \, \partial w/\partial t \, , \, D^{\alpha} w\} \quad (|\alpha| \leq 2m) \quad \text{avec} \quad w = \Gamma \star \tilde{f}|_Q$$

soit linéaire continu de $L_p(Q)$ dans $(L_p(Q))^3$.

Nous pouvons à présent résoudre le problème (1.1) pour $1 < p \leq 2$; en effet, soit $f \in L_p(Q)$; posons $w = \Gamma \star \tilde{f}|_Q$; soit u la fonction donnée par le lemme 4.2, on a alors évidemment

$$\begin{cases} L(w - u) = f \ \text{dans} \ Q \, , \\ (w - u)(0 \, , x) = 0 \ \text{dans} \ \Omega \, , \\ C_j(D)(w - u) = 0 \ \text{sur} \ I \times \partial\Omega \, , \ j = 1 \, , \dots \, , m \, , \end{cases}$$

et par conséquent, on a démontré :

THÉORÈME 4.3. - <u>Sous les hypothèses du n° 1, et pour</u> $1 < p \leq 2$, <u>le problème</u> (1.1) <u>admet une solution unique pour</u> $f \in L_p(Q)$.

<u>L'extension du théorème 4.3 au cas</u> $p > 2$ peut être obtenue soit à l'aide de méthodes analogues à celles utilisées ci-dessus dans le cas $1 < p \leq 2$, soit plus simplement par transposition du résultat obtenu pour $1 < p \leq 2$.

5. Extensions diverses.

5.1 On peut évidemment varier les hypothèses (i), (ii), (iii) : Il suffit que l'on puisse trouver un contour simple γ tel que le spectre de $- A$ soit "extérieur" à γ et que le spectre de B soit "intérieur" à γ , la fonction

$$z \longmapsto (A + z)^{-1} \ (- B + z)^{-1}$$

admettant sur γ une décroissance en $1/|z|^2$ dans $\mathcal{L}(E, E)$. Ceci permet notamment de résoudre une vaste classe de problèmes aux limites pour des opérateurs quasi-elliptiques.

5.2 Il n'y a aucune raison de se borner à étudier des équations de la forme $A + B$ avec des méthodes de ce type. Par exemple, si $z \longmapsto A(z)$ est un polynôme à coefficients opérateurs non bornés dans E, on peut chercher l'inverse de l'opérateur $A(B)$ sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma A(z)^{-1} \ (- B + z)^{-1} \, dz .$$

Ceci permet de résoudre une classe de problèmes aux limites pour des opérateurs paraboliques d'ordre supérieur en t, généralisant au cas $p \neq 2$ les résultats d'AGRANOVIČ-VIŠIK [3], et également de retrouver, en évitant la construction des noyaux de Poisson, les principaux résultats de AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [2] sur les problèmes aux limites elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON (Shmuel). - On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. pure and appl. Math., t. 15, 1962, p. 119-147.

[2] AGMON (S.), DOUGLIS (A.) and NIRENBERG (L.). - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I., Comm. pure and appl. Math., t. 12, 1959, p. 623-727.

[3] AGRANOVIČ (M. S.) i VIŠIK (M. I.). - Problèmes elliptiques dépendant d'un paramètre et problèmes paraboliques de type général [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 19, 1964, n° 3, p. 53-161.

[4] ARONSZAJN (N.) and SMITH (K. T.). - Theory of Bessel potentials, Part II. - Lawrence, University of Kansas, Department of Mathematics, 1964 (University of Kansas, Technical Report 26).

[5] ARNESE (Giuseppe). - Maggiorazioni in L^p dei potenziali relativi all'equazione del calore, Ricerche di Matematica, t. 13, 1964, p. 147-191.

[6] GRISVARD (Pierre). - Espaces d'interpolation et équations opérationnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 1536-1538.

[7] GRISVARD (Pierre). - Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, Thèse Sc. math. Paris (à paraître).

[8] JONES (Frank). - A class of singular integrals, Amer. J. of Math., t. 86, 1964, p. 441-462.

[9] KRÉE (Paul). - Sur les multiplicateurs dans $\mathfrak{F}L^p$, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, 1965, p. 4400-4403.

[10] LIONS (Jacques-Louis). - Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. - Berlin, Springer-Verlag, 1961 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 111).

[11] LIONS (Jacques-Louis) et PEETRE (Jack). - Sur une classe d'espaces d'interpolation. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, n° 19, p. 5-68).

[12] NIKOL'SKIJ (S. M.). - Sur les théorèmes d'immersion, de prolongement et d'approximation pour les fonctions différentiables de plusieurs variables [en russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 16, 1961, n° 5, p. 63-114.

[13] TAIBLESON (Mitchell H.). - On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidian n-spaces, J. Math. and Mech., t. 13, 1964, p. 407-479.