JACQUES TITS

Structures et groupes de Weyl

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 288, p. 169-183

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__169_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 288

Février 1965

STRUCTURES ET GROUPES DE WEYL

par Jacques TITS

Soient G un groupe algébrique linéaire défini sur un corps k , B un k-sous-groupe parabolique minimal, N le normalisateur d'un k-sous-tore déployé maximal de B , et G_k , B_k , N_k les groupes de points rationnels de G , B , N sur k . Il existe entre les groupes G_k , B_k , N_k un ensemble de relations formelles qui constituent, disons en bref, la "décomposition de Bruhat" de G_k , et dans laquelle le "groupe de Weyl" $W = B_k/(B_k \cap N_k)$ joue un rôle essentiel. Cette même situation se retrouve dans d'autres groupes importants, qui ne sont pas des groupes G_k du type envisagé plus haut (par exemple les groupes de Ree, les groupes $GL_n(K)$ d'une algèbre à division K de rang infini sur son centre, ...) ; il est donc naturel de l'axiomatiser (cf. n° 1.3). Dans tous les cas rencontrés jusqu'ici, le groupe de Weyl est soit le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie complexe semi-simple, soit un groupe diédral d'ordre 16 , soit un groupe affine engendré par des réflexions [3], soit encore un produit direct de groupes appartenant à ces divers types. Ce fait n'est pas fortuit. Le but du présent exposé est en effet de montrer que le groupe de Weyl W d'une décomposition de Bruhat d'un groupe "abstrait" G est toujours un groupe de Coxeter (résultat obtenu indépendamment par H. MATSUMOTO [5] et par le conférencier [Séminaire de l'Université de Chicago, printemps 1963]), et que, si G est fini, W est produit direct de groupes de Weyl "ordinaires" et de groupes diédraux d'ordre 16 (théorème de Feit-Higman [4]). L'exposé se place en fait à un point de vue un peu différent de celui de cette introduction, et sensiblement plus général : au lieu de groupes avec décomposition de Bruhat, on considère des objets de nature "combinatoire", les "complexes avec structure de Weyl" ; à tout groupe avec décomposition de Bruhat est canoniquement associé un tel complexe, mais la réciproque n'est pas vraie.

1. Définitions. Enoncé des résultats.

1.1 Complexes. - Un complexe sera ici un ensemble avec parties distinguées, les simplexes, telles que toute partie d'un simplexe et toute partie réduite à un point soient des simplexes ; les points de l'ensemble seront aussi appelés sommets. Soient A et B des complexes ; un morphisme $A \to B$ sera une application d'ensembles qui envoie tout simplexe de A bijectivement sur un simplexe de B . La somme de deux complexes est le complexe dont l'ensemble sous-jacent et les simplexes sont respectivement la somme des ensembles sous-jacents et les sommes de simplexes des deux complexes (ce n'est pas une somme directe au sens de la catégorie).

Soient A un complexe et a un simplexe de A. Les parties de a sont aussi appelées <u>facettes</u>. La <u>codimension</u> d'une facette b est le cardinal de $a - b$. Une <u>chambre</u> de A est un simplexe maximal de A ; une <u>cloison</u> est une facette de codimension 1 d'une chambre. Deux chambres sont <u>mitoyennes</u> si elles ont une cloison commune. Une suite de $n+1$ chambres $a_0, \dots, a_n$ est une <u>galerie</u> de <u>longueur</u> n si a_i et a_{i+1} sont mitoyennes pour tout i $(0 \leq i < n)$; elle est <u>géodésique</u> s'il n'existe pas de galerie de longueur $< n$ et d'extrémités a_0, a_n. Tous les complexes dont il sera question ici seront supposés vérifier les deux conditions suivantes :

(C1) <u>Tout simplexe est contenu dans une chambre</u> ;

(C2) <u>Deux chambres quelconques sont les extrémités d'une galerie</u>.

Il résulte immédiatement de ces hypothèses qu'un simplexe a la même codimension dans toutes les chambres qui le contiennent ; on appellera celle-ci la codimension du simplexe (dans A), et <u>rang</u> de A, la codimension du simplexe vide. La <u>distance</u> de deux simplexes a, b, qu'on notera $d(a, b)$, est le minimum de la longueur des galeries dont les extrémités contiennent respectivement a et b. Un complexe est <u>mince</u> (resp. <u>spacieux</u>) si toute cloison est commune à deux chambres exactement (resp. à trois chambres au moins).

1.2. <u>Complexes</u> $\Delta(G ; G^i)$. <u>Complexes de Coxeter</u>. – Soient G un groupe, I un ensemble d'indices, G^i $(i \in I)$ des sous-groupes de G et G_i $(i \in I)$ l'intersection de tous les G^j $(j \in I, \ j \neq i)$. On notera $\Delta(G ; G^i)$ le complexe dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble de classes latérales

$$\{G^i.g \mid i \in I, \ g \in G\}$$

et dont les simplexes sont les parties de cet ensemble qui ont une intersection non vide. Ce complexe remplit manifestement la condition (C1) ; il remplit la condition (C2) si et seulement si les G_i engendrent G.

Une <u>matrice de Coxeter</u> est une matrice symétrique de type (I, I), $M = ((m_{ij}))$ $(i, j \in I)$, à coefficients $m_{ij} \in \underset{\sim}{\mathbb{N}} \cup \{\infty\}$, tels que $m_{ij} = 1$ ou > 1, selon que $i = j$ ou $\neq j$. Le <u>groupe de Coxeter</u> $W = W(M)$, associé à M, est le groupe défini par un système générateur $\{r_i \mid i \in I\}$ et les relations $(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$.

Le complexe de Coxeter $\Gamma(M)$ associé à M est le complexe $\Delta(W\ ;\ W^i)$, où W^i est engendré par les r_j $(j \neq i)$. Ce complexe vérifie (C1), (C2) ; on sait ([2], [6]) qu'il est mince. Lorsque $W(M)$ est fini, donc représentable par un groupe engendré par des réflexions, le complexe de Coxeter n'est autre que le complexe découpé sur une sphère par le système des chambres, au sens usuel. Si $W(M)$ est le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie complexe semi-simple (resp. d'une algèbre de type A_n, B_n, ... ; resp. est un groupe diédral d'ordre $2m$), M, $W(M)$ et $\Gamma(M)$ sont dits cristallographiques (resp. de type A_n, B_n, ... ; resp. de type $P^{(m)}$).

1.3. Structures de Weyl. BN-paires. - Une structure de Weyl dans un complexe Δ est une famille $\mathcal{S}$ de sous-complexes minces telle que

(S1) Etant donnés deux simplexes de Δ, il existe au moins un élément de $\mathcal{S}$ qui les contient ;

(S2) Etant donnés deux complexes appartenant à $\mathcal{S}$, il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre qui laisse fixe tous les points de leur intersection.

Il est clair que tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont alors isomorphes à un même complexe mince Γ. Les éléments de $\mathcal{S}$ (resp. le complexe Γ) sont (jusqu'à nouvel ordre) appelés les squelettes (resp. le complexe de Weyl) de la structure ou, par abus de langage, de Δ.
[L'abus n'est pas si grand qu'il peut paraître. On montre en effet qu'un complexe Δ possède au plus une structure de Weyl maximale, dont les éléments sont tous les sous-complexes minces Σ contenant au moins une chambre de Δ et tels que la distance de deux chambres quelconques de Σ soit égale à leur distance dans Δ. Si en outre Γ est fini, $\mathcal{S}$ est nécessairement maximale et est donc la seule structure admise par Δ.]
Un complexe doté d'une structure de Weyl sera dit structuré.

Une BN-paire dans un groupe G est une paire (B, N) de sous-groupes engendrant G telle que $H = B \cap N$ soit distingué dans N, et que le quotient $W = N/H$ possède un système générateur R satisfaisant aux conditions suivantes (avec des conventions de notations évidentes) :

(BN 1) $\quad rBwB \subset BwB \cup BrwB \quad$ pour tous $r \in R$, $w \in W$,

(BN 2) $\quad rBr^{-1} \not\subset B \quad$ pour tout $r \in R$.

Ces conditions déterminent R [8] et impliquent que les éléments de R sont d'ordre 2, car

$$rBr^{-1} \subset Br^{-1} B \cup B ,$$

donc

$$rBr^{-1} \subset BrB \cup B ,$$

donc

$$Br^{-1} B \cap BrB \neq \emptyset ,$$

donc

$$B \subset BrBrB \subset BrB \cup Br^2 B .$$

Le groupe W et le cardinal de R sont appelés groupe de Weyl et rang de la paire (B , N) . Celle-ci est irréductible si R n'est pas réunion de deux parties propres permutables.

Pour tout $r \in R$, soit W^r le sous-groupe de W engendré par les $s \in R$, $s \neq r$. Il résulte de (BN 1) que $G^r = BW^r B$ est un sous-groupe de G . Soient Δ le complexe $\Delta(G ; G^r)$, Σ le sous-complexe formé par l'ensemble

$$\{G^r.n \mid r \in R , \quad n \in N\}$$

(et les simplexes qu'il contient), et b la chambre $\{G^r\}$. Compte tenu de [7], il est facile de voir que Δ est spacieux et que l'ensemble des translatés droits de Σ forme une structure de Weyl dans Δ . Le complexe structuré ainsi défini sera dit associé à (B , N) . Le groupe G opère sur Δ (par translations à droite), N normalise Σ , et B est le normalisateur de b . Réciproquement, soient Δ un complexe spacieux structuré, Σ un squelette, $b \subset \Sigma$ une chambre, et G un groupe opérant sur Δ comme groupe d'automorphismes. Supposons que les sommets (points) de b soient deux à deux non-équivalents pour G et que G soit transitif sur les paires formées d'un squelette et d'une chambre de celui-ci. Alors, le normalisateur de b et le normalisateur de Σ dans G forment une BN-paire.

Soient k un corps, G un groupe algébrique défini sur k , B un sous-groupe parabolique défini sur k minimal, et N le normalisateur d'un sous-tore déployé sur k maximal de B . Alors, (B_k , N_k) est une BN-paire dans G_k [1] (ici, X_k désigne le groupe des points de X rationnels sur k) ; le complexe associé à celle-ci sera dit associé à G sur k .

1.4. Deux théorèmes.

THÉORÈME 1. - *Le complexe de Weyl d'un complexe spacieux structuré est un complexe de Coxeter. En particulier, le groupe de Weyl d'une BN-paire est un groupe de Coxeter.*

THÉORÈME 2 (FEIT-HIGMAN [4]). - Le complexe de Weyl d'un complexe spacieux structuré fini est somme d'un complexe cristallographique et de complexes de type $P^{(8)}$ (en nombre $\geqslant 0$). En particulier, le groupe de Weyl d'une BN-paire dans un groupe fini est produit direct d'un groupe cristallographique et de groupes diédraux d'ordre 16 .

La démonstration de FEIT-HIGMAN, dont nous indiquons les grandes lignes au § 3, fournit aussi des renseignements de nature arithmétique sur les complexes structurés **finis** de rang 2 (proposition 6). Lorsque le rang est supérieur à 3 , on a des résultats plus forts que nous énonçons ci-après à titre documentaire, et bien qu'ils sortent du cadre de l'exposé.

1.5. Complexes structurés de rang $\geqslant 3$: éléments de classification.

THÉORÈME. - Soit Δ un complexe spacieux fini de rang $r \geqslant 3$ qui ne soit pas somme de complexes de rangs inférieurs. Alors, il existe un corps fini k et un groupe algébrique G défini et simple sur k , de rang relatif r , tel que Δ soit associé à G sur k .

Le corollaire suivant est une conséquence facile, mais non immédiate de ce théorème.

COROLLAIRE. - Un groupe fini simple possédant une BN-paire irréductible de rang $r \geqslant 3$ est le groupe dérivé du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique relativement simple de rang relatif r sur un corps fini.

Pour certains complexes de Weyl particuliers, le théorème précédent reste valable sans l'hypothèse de finitude :

PROPOSITION. - Tout complexe spacieux structuré dont le complexe de Weyl est de type D_n $(n \geqslant 4)$ ou E_i $(i = 6, 7, 8)$, est associé à un groupe algébrique déployé de ce type.

On trouvera dans [9] des renseignements sur le cas des types A_n, C_n, F_4 .

2. Démonstration du théorème 1.

2.1. Ensembles préfondamentaux et produits amalgamés.

- Soient E un ensemble et W un groupe opérant à gauche sur E . Une partie A de E sera dite préfondamentale pour W si $w \in W$ et $wA \cap A \neq \emptyset$ impliquent $w = 1$. L'existence d'un tel ensemble implique évidemment que W opère effectivement sur E .

Soient I un ensemble d'indices, W_i $(i \in I)$ des sous-groupes de W engendrant W, et A_i $(i \in I)$ des parties de E dont l'intersection $B = \cap A_i$ n'est pas vide et telles que A_i soit préfondamentale pour W_i. Pour tout $w \in W$, soit $\ell(w)$ la longueur minimum de w exprimé comme mot en éléments des W_i. On s'intéressera à la propriété suivante de $(W ; \{W_i\} ; \{A_i\})$.

(P) Pour tout $w \in W$ et tout $i \in I$, il existe $w_i \in W_i$ tel que $wB \subset w_i A_i$, et on a $\ell(w_i^{-1} w) = \ell(w) - \ell(w_i)$.

Elle implique que B est préfondamental pour W ; en effet, si $B \cap wB \neq \emptyset$, il résulte de (P) que, pour tout $j \in I$ et tout $w_j \in W_j$, $w_j wB \subset w_j A_j$, et $\ell(w) = \ell(ww_j) - \ell(w_j)$, et cette dernière relation implique que $w = 1$.

<u>Exemple</u>. - Soient $I = \{\pm 1\}$, $W_\varepsilon = \{1 , r_\varepsilon\}$ d'ordre 2 $(\varepsilon = \pm 1)$, et $W =$ (groupe diédral) d'ordre $2m$ $(m \in N \cup \{\infty\}$, $m \geqslant 2)$, et supposons que $WB = E$. La condition (P) signifie alors que les ensembles wB $(w \in W)$ sont deux à deux distincts et qu'on peut indexer les éléments de W par les éléments x de $Z/(2m)$ de telle façon que

$$r_\varepsilon w_x = w_{\varepsilon - x} \qquad \text{et} \qquad A_\varepsilon = \bigcup_{x \in [0, m-1]} w_{-\varepsilon x} B .$$

On dira, dans ce cas, que $A_{\pm 1}$ <u>déterminent une division radiale</u> de E (relativement à W, $r_{\pm 1}$).

Le lemme suivant est une version "abstraite" d'un lemme-clef dans la démonstration des propriétés fondamentales de la "représentation contragrédiente" d'un groupe de Coxeter ([2] , [6]).

LEMME 1. - <u>Soient</u> E, W, W_i, A_i $(i \in I)$ <u>comme plus haut, et soit</u> W_{ij} $(i , j \in I)$ <u>le groupe engendré par</u> W_i <u>et</u> W_j. <u>Supposons que, pour toute paire d'indices</u> $i , j \in I$, $(W_{ij} ; W_i , W_j ; A_i , A_j)$ <u>possèdent la propriété</u> (P). <u>Alors, il en est de même de</u> $(W ; \{W_i\} ; \{A_i\})$, W <u>opère effectivement sur</u> E <u>et est le produit des</u> W_{ij} <u>amalgamés suivant les</u> W_i <u>(solution du problème universel</u> $W_i \to W_{ij} \to W$).

Les deux dernières assertions sont conséquences immédiates de la première (remarquer que le produit amalgamé en question opère sur E par l'intermédiaire de W et satisfait aussi aux conditions de l'énoncé).

Posons

$$A_{ij} = A_i \cap A_j \qquad (i , j \in I) .$$

Pour tout $n \in \underset{\sim}{N}$, on notera (P_n) la condition (P) avec $\ell(w) = n$, et (Q_n) la propriété suivante

(Q_n) Pour tous $i, j \in I$, $w \in W$, avec $i \neq j$ et $\ell(w) = n$, il existe $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que $wB \subset w_{ij} A_{ij}$, et on a

$$\ell(w_{ij}^{-1} w) = \ell(w) - \ell'(w_{ij}) ,$$

où $\ell'(w_{ij})$ exprime la longueur minimum de w_{ij} comme mot en éléments de W_i et W_j.

(P_0) et (Q_0) sont évidents.

$(P_n) + (Q_n) \implies (P_{n+1})$. Soient $\ell(w) = n+1$ et $i \in I$. Posons

$$w = w_j \, w' \quad \text{avec} \quad \ell(w') = n , \quad w_j \in W_j \quad (j \in I) .$$

Si $i = j$, (P_n) implique qu'il existe $w_i' \in W_i$ tel que

$$wB = w_i \, w'B \subset w_i \, w_i' \, A_i \quad \text{et} \quad \ell(w_i'^{-1} \, w') = \ell(w_i'^{-1} \, w_i^{-1} \, w) \leqslant n , \quad \text{donc} \ = n .$$

Soit au contraire $i \neq j$. Il existe alors $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que

$$w'B \subset w_{ij} \, A_{ij} \qquad \text{et} \qquad \ell(w_{ij}^{-1} \, w') = \ell(w') - \ell'(w_{ij}) .$$

Posons

$$w_{ij}' = w_j \, w_{ij} \in W_{ij} .$$

Vu l'hypothèse de l'énoncé, il existe $w_i' \in W_i$ tel que

$$w_{ij}' \, A_{ij} \subset w_i' \, A_i \qquad \text{et} \qquad \ell'(w_i'^{-1} \, w_{ij}') = \ell'(w_{ij}') - \ell'(w_i') .$$

Mais alors, $wB = w_j \, w'B \subset w_{ij}' \, A_{ij} \subset w_i' \, A_i$, et

$$\begin{aligned} \ell(w) - \ell(w_i') &\leqslant \ell(w_i'^{-1} \, w) = \ell(w_i'^{-1} \, w_{ij}' \, w_{ij}^{-1} \, w') \\ &\leqslant \ell'(w_{ij}') - \ell'(w_i') + \ell(w') - \ell'(w_{ij}) \\ &= \ell(w) - \ell(w_i') + (\ell'(w_{ij}') - \ell'(w_{ij}) - 1) \leqslant \ell(w) - \ell(w_i') . \end{aligned}$$

$(P_n) + (Q_{n-1}) \implies (Q_n)$. Soient $\ell(w) = n$ et $i, j \in I$, $i \neq j$. Si $wB \subset A_{ij}$, (Q_n) est vérifié. Supposons donc, pour fixer les idées, que $wB \not\subset A_i$, et soit

$w_i \in W_i$ tel que $wB \subset w_i A_i$, d'où $\ell(w_i^{-1} w) = n - 1$, en vertu de (P_n). D'après (Q_{n-1}) , il existe $w_{ij} \in W_{ij}$ tel que

$$w_i^{-1} wB \subset w_{ij} A_{ij} \qquad \text{et} \qquad \ell(w_{ij}^{-1} w_i^{-1} w) = n - 1 - \ell'(w_{ij}) .$$

Posons

$$w'_{ij} = w_i w_{ij} \in W_{ij} . \cdot$$

On a $wB \subset w'_{ij} A_{ij}$ et

$$\ell(w) - \ell'(w'_{ij}) \leqslant \ell(w'^{-1}_{ij} w) = n - 1 - \ell'(w_{ij}) \leqslant \ell(w) - \ell'(w'_{ij}) .$$

2.2. Pliages et réflexions. - Soit Γ un complexe mince. Un pliage de Γ est un endomorphisme idempotent π tel que toute chambre soit l'image par π de 0 ou 2 chambres. On utilisera beaucoup la remarque banale suivante :

(i) Si une galerie g n'est pas entièrement contenue dans $\pi\Gamma$, son image par π est, après effacement des répétitions, une galerie de longueur strictement inférieure à celle de g .

Soient b , b' deux chambres mitoyennes. Supposons qu'il existe deux pliages π , π' tels que $\pi'b' = b$ et $\pi b = b'$. Alors, ces pliages sont uniques, $\pi\Gamma$ (resp. $\pi'\Gamma$) est la réunion des chambres c telles que $d(b , c) >$ (resp. $<$) $d(b' , c)$, on a

$$\Gamma = \pi\Gamma \cup \pi'\Gamma ,$$

et l'application qui coïncide avec π sur $\pi'\Gamma$ et avec π' sur $\pi\Gamma$ est un automorphisme involutif de Γ qu'on appellera la réflexion par rapport à la cloison $b \cap b'$.

PROPOSITION 1. - Un complexe mince Γ est un complexe de Coxeter si et seulement si, étant données deux chambres mitoyennes quelconques b , b' , il existe un pliage π de Γ tel que $\pi b = b'$.

"Seulement si" est facile. Montrons "si", et supposons donc la condition vérifiée. Notons d'abord que

(ii) Tous les termes d'une galerie géodésique $a_0 , \dots , a_m$ contiennent l'intersection $d = a_0 \cap a_m$ des extrémités.

En effet, supposons que $d \subset a_i$ et $\not\subset a_{i+1}$; on pourrait alors raccourcir la galerie par le pliage qui amène a_{i+1} sur a_i .

Soient b une chambre, b_i ($i \in I$, ensemble d'indices) ses mitoyennes,

$$d_i = b \cap b_i ,$$

π_i le pliage tel que $\pi_i\, b_i = b$, r_i la réflexion par rapport à d_i , W le groupe d'automorphismes de Γ engendré par les r_i $(i \in I)$, et E l'ensemble des chambres de Γ . Pour toute partie J de I , soient d_J l'intersection de b et des b_i $(i \in J)$ et W_J le groupe engendré par les r_i $(i \in J)$. Il résulte immédiatement de (ii) que, pour toute chambre c telle que $b \cap c \supset d_J$, il existe un $w \in W_J$ tel que $wb = c$; en particulier $W = W_I$ est transitif sur E . On a

$$b = \bigcap_I \pi_i\, E ,$$

car si $c \in E$, $c \neq b$, et si b_i est le second terme d'une galerie géodésique d'extrémités b , c , on ne peut avoir $c \in \pi_i\, E$, en vertu de (i).

Nous montrerons plus loin que

(iii) Pour tous i , $j \in I$, $\pi_i\, E$ et $\pi_j\, E$ déterminent une division radiale de E par rapport à W_{ij} , r_i , r_j .

Supposons ceci établi. Il résulte alors du lemme 1 et des remarques qui précèdent que W est le produit des W_{ij} $(i , j \in I)$ amalgamés suivant les W_i , c'est-à-dire est un groupe de Coxeter, qu'il est simplement transitif sur E , et que W_J est le stabilisateur de d_J dans W . Mais tout ceci implique que Γ est un complexe de Coxeter.

Reste à établir (iii). Soient i , j donnés, et E' l'ensemble des chambres contenant d_{ij} . De (i), il résulte que si $c \in \pi_i\, E \cap \pi_j\, E$, b est le seul élément de E' tel que $d(c , d_{ij}) = d(c , b)$. En transformant ce résultat par W_{ij} , on voit que, pour toute chambre c , il existe une unique chambre $\varphi(c) \in E'$ telle que $d(c , d_{ij}) = d(c , \varphi(c))$ (l'existence résulte immédiatement de la définition de la distance). L'application φ permute évidemment avec l'action de W_{ij} ; d'autre part, il résulte encore de (i) que

$$\varphi^{-1}(\pi_i\, E') = \pi_i\, E \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(\pi_j\, E') = \pi_j\, E .$$

Or, il est facile de voir que $\pi_i\, E'$, $\pi_j\, E'$ déterminent dans E' une division radiale relativement à W_{ij} , r_i , r_j . Il en est donc de même de $\pi_i\, E$ et $\pi_j\, E$ dans E .

2.3. Rétractions. - Soient Δ un complexe structuré, Σ un squelette, et $b \in \Sigma$ une chambre. Il résulte de (S2) que, pour tout squelette Σ' contenant b, il existe un isomorphisme $\varphi_{\Sigma'} : \Sigma' \to \Sigma$ (évidemment unique) induisant l'identité sur b, et que, si Σ' et Σ'' sont deux squelettes contenant b, $\varphi_{\Sigma'}$ et $\varphi_{\Sigma''}$ coïncident sur $\Sigma' \cap \Sigma''$. Mais alors, d'après (BN 1), les $\varphi_{\Sigma'}$ se "recollent" en un endomorphisme idempotent $\varphi : \Delta \to \Sigma$, que nous appellerons la rétraction de centre b de Δ sur Σ. On a $\varphi^{-1}(b) = b$.

PROPOSITION 2. - Soient c, c' deux simplexes de Δ, et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ une galerie de longueur $n = d(c, c')$, telle que $c \subset b_0$ et $c' \subset b_n$. Alors, tout squelette contenant c, c' et l'un au moins des b_i, contient toute la galerie.

Supposons que le squelette en question, soit Σ, ne contienne pas la galerie. Quitte à intervertir éventuellement c, c', on peut supposer qu'il existe un i tel que $b_i \subset \Sigma$ et $b_{i+1} \not\subset \Sigma$. Soit $b \subset \Sigma$ la chambre mitoyenne de b_i telle que $b_i \cap b_{i+1} = b_i \cap b$. Alors, la rétraction de centre b de Δ sur Σ amène b_{i+1} sur b_i, donc raccourcit la galerie $b_0, \ldots, b_n$, ce qui est absurde puisqu'elle conserve c, c'.

COROLLAIRE 1. - Soient Σ un squelette, $b \subset \Sigma$ une chambre, d une cloison de b, et $b_0, \ldots, b_n$ une galerie géodésique telle que $d \subset b_0$. Alors la rétraction de centre b de Δ sur Σ applique $\bigcup_i b_i$ injectivement dans Σ.

En effet, soit Σ' un squelette contenant b et b_n. D'après la proposition 2, il contient tous les b_i, or il est appliqué injectivement sur Σ par la rétraction de centre b, en vertu de la définition de celle-ci.

PROPOSITION 3. - Soient Σ un squelette, et b, b' deux chambres mitoyennes. Supposons qu'il existe une chambre non contenue dans Σ et contenant $b \cap b'$; alors Σ possède un pliage amenant b' sur b.

Soient $b'' \not\subset \Sigma$ une chambre contenant $d = b \cap b'$, Φ un squelette contenant b et b'', φ (resp. φ') la rétraction de centre b (resp. b') de Δ sur Φ (resp. Σ), et $\psi = \varphi' \circ \varphi$. On a

$$\psi(b) = \varphi'(b) = b \qquad \text{et} \qquad \psi(b') = \varphi'(b'') = b .$$

D'autre part, en vertu du corollaire 1, toute galerie géodésique dont le premier terme contient d est appliquée injectivement dans Σ par ψ. On en déduit aisément que la restriction de ψ à Σ est un pliage.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate des propositions 1 et 3.

3. Démonstration du théorème 2.

3.1. Réduction au rang 2 . - Au rang 2 , le théorème signifie que le complexe de Weyl d'un complexe, spacieux structuré fini de rang 2 , est de type P_n , avec $n = 2$, 3 , 4 , 6 ou 8 .

Soient M une matrice de Coxeter, Δ un complexe structuré de complexe de Weyl $\Gamma(M)$, et a un simplexe de codimension 2 de Δ . Soit Δ_a le complexe de rang 2 défini comme suit : les sommets de Δ_a sont les simplexes de codimension 1 de Δ contenant a , et deux tels simplexes forment un simplexe de Δ_a s'ils appartiennent à une même chambre de Δ . Il est immédiat que Δ_a est un complexe structuré dont le complexe de Weyl est de type $P^{(m(a))}$, l'entier m(a) parcourant l'ensemble des coefficients non diagonaux de M lorsque a parcourt l'ensemble des faces de codimension 2 d'une chambre de Δ . Si on suppose le théorème démontré pour le rang 2 , et si Δ est fini et spacieux, on a $m(a) = 2$, 3 , 4 , 6 ou 8 et la classification montre que $\Gamma(M)$ est alors somme d'un complexe cristallographique et éventuellement de complexes de type $P^{(8)}$.

Dans la suite, Δ désignera toujours un complexe structuré de rang 2 , dont le complexe de Weyl est de type $P^{(m)}$.

3.2. Principe de la démonstration. Lemme fondamental. - On se propose, lorsque Δ est fini, de lui associer une "matrice d'incidence" Λ ; on établira pour celle-ci certaines identités, conséquences des propriétés géométriques de Δ , et qui s'avèreront contradictoires lorsque $m \neq 2$, 3 , 4 , 6 ou 8 , en vertu du

LEMME 2. - Soient Λ une matrice, f un polynôme, θ une racine simple de f , et $f_0(x) = f(x)/(x - \theta)$. Si $f(\Lambda) = 0$, alors $\operatorname{tr} f_0(\Lambda).f_0(\theta)^{-1}$ est un entier.

En effet, soient θ_i les racines caractéristiques de Λ . Alors,

$$\operatorname{tr} f_0(\Lambda).f_0(\theta)^{-1} = \sum_i f_0(\theta_i).f_0(\theta)^{-1} ,$$

or $f_0(\theta_i).f_0(\theta)^{-1} = 1$ ou 0 selon que $\theta =$ ou $\neq \theta_i$.

3.3. Chaînes. Les deux espèces de sommets. - Deux sommets a , b sont voisins (ou incidents) si $\{a , b\}$ est une chambre. Une suite de sommets $a_0 , \dots , a_n$ est une chaîne de longueur n si a_i et a_{i+1} sont voisins pour tout i ; elle est réduite si $a_{i-1} \neq a_{i+1}$ pour tout i , et géodésique si, en outre, la galerie (de longueur $n - 1$) formée par les chambres $\{a_i , a_{i+1}\}$ est géodésique. La réduction d'une chaîne est la chaîne qu'on en déduit par répétition, autant de fois qu'il est possible, du procédé consistant à effacer deux sommets successifs a_i , a_{i+1} , lorsque $a_{i+1} = a_{i-1}$. Par rétraction sur un squelette, on voit immédiatement que toute chaîne fermée ($a_0 = a_n$) est de longueur paire. Il s'ensuit qu'on peut partager l'ensemble S des sommets de Δ en deux parties complémentaires S_I et S_{II} , telles que deux sommets appartenant à une même partie (sommets de même espèce) ne sont jamais voisins. Pour tous $a , b \in S$, on posera

$$e(a , b) = d(a , b) + 1 \quad \text{ou} \quad 0$$

selon que $a \neq$ ou $= b$.

PROPOSITION 4. - La longueur d'une galerie fermée est $\geqslant 2m$.

Soient g une galerie fermée de longueur minimale, $b \in g$ une chambre, a le côté ou le sommet opposé à b dans le polygone formé par g , et Σ un squelette contenant a et b . La galerie g est réunion de deux galeries d'origine b et d'extrémités contenant a . En vertu de la minimalité de g , ces deux galeries sont géodésiques, donc elles sont contenues dans Σ (proposition 2), et g l'est aussi, d'où notre assertion.

COROLLAIRE 2. - Soient a , b deux sommets. Si $e(a , b) < m$, toutes les chaînes de longueur $< m$ et d'extrémités a , b ont même réduction, de longueur $e(a , b)$. Si $e(a , b) = m$ et si a' est un sommet voisin de a , il existe une unique chaîne de longueur m et d'extrémités a , b contenant a' .

3.4. Sommets opposés. Les nombres s , t . - Deux sommets a , b sont opposés si $e(a , b) = m$. Deux tels sommets sont de même espèce ou d'espèces différentes selon que m est pair ou impair. Du corollaire 2, il résulte que deux sommets opposés sont contenus dans le même nombre de chambres.

PROPOSITION 5. - Si Δ est spacieux, deux sommets de même espèce ont toujours un opposé commun.

Soient a , b des sommets de même espèce et c un sommet opposé à a , tel que $e(a , c) + e(b , c)$ soit maximal. Supposons c non opposé à b . D'après le corollaire 2, c possède au plus un voisin c_1 tel que $e(b , c_1) < e(b , c)$ (il en possède effectivement un si $c \neq b$). Soient c' un voisin de c différent de c_1 , c_2 l'unique voisin de c' tel que $e(a , c_2) < e(a , c')$ (corollaire 2), et c'' un voisin de c' distinct de c et de c_2 . Alors, toujours en vertu du corollaire 2, on a

$$e(a , c'') = m \qquad \text{et} \qquad e(b , c'') > e(b , c) ,$$

d'où une contradiction avec la maximalité de $e(a, c) + e(b, c)$.

COROLLAIRE 3. - Si Δ est spacieux, deux sommets de même espèce ont le même nombre de voisins. Si en outre m est impair, deux sommets quelconques ont le même nombre de voisins.

Dans la suite de la démonstration, on supposera toujours Δ spacieux et fini, et on notera $s + 1$ (resp. $t + 1$) le nombre des voisins d'un sommet appartenant à S_{II} (resp. S_I), et N le nombre des éléments de S_I ; on a $s, t \geqslant 2$, et si m est impair $s = t$.

3.5. La matrice Λ et ses puissances. - Toutes les matrices dont il sera question ont leurs lignes et colonnes indexées par S_I . Les coefficients d'une matrice Ξ seront notés $c_{ab}(\Xi)$ $(a, b \in S_I)$. Soit Λ la matrice telle que $c_{ab}(\Lambda)$ soit égale au nombre de chaînes de longueur 2 et d'extrémités a, b . On voit aisément, par induction sur n , que $c_{ab}(\Lambda^n)$ est égal au nombre de chaînes de longueur $2n$ et d'extrémités a, b . Il résulte du corollaire 2 que ce nombre dépend seulement de n, s, t et $e(a, b)$; son calcul est un simple exercice d'analyse combinatoire et ne sera pas reproduit ici. La partie du résultat qui sera utilisée plus loin fait l'objet du lemme ci-après. Etant donnée une série de puissance $\psi(s, t)$ en $s^{1/2}$ et $t^{1/2}$, on note $[\psi(s, t)]_n$ la somme des termes de $\psi(s, t)$ dont le degré total en $s^{1/2}$ et $t^{1/2}$ est $\leqslant n$.

LEMME 3. - Soit f un polynôme en une variable x , à coefficients dans $\mathbb{C}(s^{1/2}, t^{1/2})$. On suppose que f , considéré comme fonction de x, s, t , est homogène de degré k . Soient $a, b \in S_I$. Alors, si $e(a, b) \leqslant 2(m - k - 1)$, on a

$$c_{ab}(f(\Lambda)) = [f(1 + s + t + st)(1 + s)^{-1} (1 - st)]_{2k-e(a,b)} .$$

Si $m = e(a, b)$, on a $c_{ab}(\Lambda^{m/2}) = t + 1$. Enfin, la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne de Λ est égale à $1 + s + t + st$.

(Noter que, par l'hypothèse d'homogénéité, on se ramène immédiatement au cas où $f(x) = x^k$, avec $k \leqslant m - 1$.)

Le lemme suivant est conséquence immédiate du précédent.

LEMME 4. - Soient f comme plus haut et $k \leqslant m - 1$. Alors

$$\mathrm{tr}\, f(\Lambda) = [f(1 + s + t + st)(1 + s)^{-1} (1 - st)]_{2k} .$$

3.6. Fin de la démonstration. - On pose $m = 2m' + 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ ou 1), et $Z = \{\zeta \in \underset{\sim}{C} \mid \zeta^m = 1 , \zeta \neq \pm 1\}$. Soient μ le polynôme (à coefficients entiers, de degré $m' - \varepsilon$) ayant pour racines simples les nombres de la forme $\zeta + \zeta^{-1}$ ($\zeta \in Z$), et

$$g(x) = x^{\varepsilon}(st)^{(m'-\varepsilon)/2} \mu((x - s - t)(st)^{-1/2}) .$$

On vérifie "aisément", à l'aide du lemme 3, que $g(\Lambda)$ est proportionnelle à la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Il s'ensuit, toujours en vertu du lemme 3, que si on pose

$$f(x) = (x - (1 + s + t + st))\, g(x) ,$$

on a $f(\Lambda) = 0$. Il est clair que, pour tout $\zeta \in Z$,

$$\theta(\zeta) = s + t + (st)^{1/2}.(\zeta + \zeta^{-1})$$

est une racine simple de $f(x)$. On peut alors appliquer le lemme 2 à Λ, f et $\theta(\zeta)$. La quantité $\operatorname{tr} f_0(\Lambda)/f_0(\theta)$ qui y intervient se calcule à l'aide du lemme 4; à un facteur rationnel près, son inverse est

$$a(\zeta) = ((1 + st)(s + t) - 4st + (1 - s)(1 - t)\, b(\zeta))(c(\zeta) - 2)^{-1} - st ,$$

où on a posé $b(\zeta) = (st)^{1/2} (\zeta + \zeta^{-1})$ et $c(\zeta) = \zeta^2 + \zeta^{-2}$. Si m est impair, $s = t$, et

$$s(s - 1)^2 (a(\zeta) + s^2)^{-1} + 2 = \zeta + \zeta^{-1}$$

doit être rationnel pour tout $\zeta \in Z$, donc $m = 3$. Soit m pair. On peut exprimer $b(\zeta)$ et $c(\zeta)$ comme fonctions rationnelles (à coefficients entiers) en $a(\zeta)$, $a(-\zeta)$, s, t, et on vérifie que ces fonctions ne peuvent prendre la forme $0/0$ pour $s , t \geqslant 2$. Puisque $-\zeta \in Z$, il s'ensuit que $b(\zeta)$ et $c(\zeta)$ doivent être rationnels pour tout $\zeta \in Z$. La rationnalité de $c(\zeta)$ signifie que $m = 2$, 4, 6 ou 8; celle de $b(\zeta)$ donne, en prime, la

PROPOSITION 6. - Si $m = 6$ (resp. 8), st (resp. $2st$) est un carré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.) et TITS (J.). - Groupes réductifs. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Publications de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 27).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 2 : Systèmes de racines (à paraître).

[3] BRUHAT (François). - Sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples p-adiques, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963/64, n° 271, 11 p.

[4] FEIT (W.) et HIGMAN (G.). - The nonexistence of certain generalized polygons, J. of Algebra, t. 1, 1964, p. 114-131.

[5] MATSUMOTO (Hideya). - Générateurs et relations des groupes de Weyl généralisés, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258, 1964, p. 3419-3422.

[6] TITS (Jacques). - Groupes et géométries de Coxeter, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, Juin 1961, 26 p. multigraphiées.

[7] TITS (Jacques). - Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2910-2912.

[8] TITS (Jacques). - Algebraic and abstract simple groups, Annals of Math., t. 80, 1964, p. 313-329.

[9] TITS (Jacques). - Géométries polyédriques finies, Simposio internazionale sulle geometrie finite [1963. Roma], Rendiconti di Matematica, t. 23, 1964, p. 156-165.