MICHEL RAYNAUD

Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 286, p. 129-147

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__129_0>

Séminaire BOURBAKI
17e année, 1964/65, n° 286

Février 1965

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ D'UN FAISCEAU ET COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Michel RAYNAUD

La première partie de cet exposé est consacrée à la démonstration de résultats inédits obtenus par GROTHENDIECK, la seconde aux travaux de OGG [5] et de ŠAFAREVIČ [6] sur les variétés abéliennes.

Nous utiliserons la cohomologie étale des faisceaux en théorie des schémas, introduite dans [1].

I. Caractéristique d'Euler-Poincaré d'un faisceau de torsion défini sur une courbe algébrique.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p , et soit C une courbe algébrique irréductible, lisse et projective sur k . Notons η le point générique de C , et $i : \eta \to C$ le morphisme canonique. Si x est un point de C , $\bar{x}$ désigne un point géométrique au-dessus de x .

Soit R un anneau, et soit $K(R)$ le groupe de Grothendieck associé à la catégorie des R-modules finis (c'est-à-dire ayant un nombre fini d'éléments). Si M est un R-module fini, $c\ell_R(M)$ désigne son image dans $K(R)$.

Soit A un faisceau en groupes abéliens sur C (pour la topologie étale) qui est constructible, de torsion, et sur lequel R opère, ou plus brièvement un R-faisceau constructible de torsion. Par fonctorialité, R opère alors sur les groupes de cohomologie : $H^i(C , A)$. Nous appellerons caractéristique d'Euler-Poincaré de A , sur C , relativement à R , et noterons $\chi_R(C , A)$, l'élément de $K(R)$ défini par :

$$\chi_R(C , A) = \sum_i (-1)^i \, c\ell_R \, H^i(C , A) \qquad (\text{N. B. } H^i(C , A) = 0 \text{ pour } i \geqslant 3) .$$

On posera $\chi(C) = 2 - 2g$, où g désigne le genre de C , de sorte que si A est le faisceau constant $\underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$ avec $(n , p) = 1$, sur lequel R opère trivialement, on a :

$$\chi_R(C , \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}) = \chi(C) \, c\ell_R(Z/nZ) .$$

Notre but est d'exprimer $\chi_R(C\ ,\ A)$, lorsque A est d'ordre premier à p , au moyen de symboles locaux que nous allons d'abord définir.

1. Cas local : Définition de $\alpha^R(A)$.

Soit o un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique p , et notons K le corps des fractions de o .

Soit ℓ un nombre premier distinct de p , et soit A un R-faisceau constructible de ℓ torsion au-dessus du point générique η de Spec o . La donnée de A équivaut à la donnée d'un ℓ groupe abélien fini : $M = A_{\overline{\eta}}$ qui est un $\tilde{G}$ - R bimodule, où $\tilde{G} = \mathrm{Gal}\ \overline{K}/K$. Soit L une extension galoisienne finie de K qui trivialise A , c'est-à-dire telle que $\tilde{G}$ opère sur M à travers $G = \mathrm{Gal}\ L/K$.

Rappelons ([7], chapitre VI), qu'au groupe d'inertie G , on peut associer une représentation vectorielle complexe : la représentation d'Artin de G définie par son caractère a_G :

$$a_G(g) = -\,v({}^g\pi - \pi) \quad \text{si} \quad g \neq 1 \qquad (\ \pi \text{ désigne une uniformisante de } L\ )$$

$$a_G(1) = -\sum_{g\neq 1} a_G(g)\ .$$

La représentation d'Artin de G contient la représentation d'augmentation de G : u_G , et se réduit à u_G si, et seulement si, G est modérément ramifié. Le caractère $a_G - u_G$ s'annule sur les éléments de G dont l'ordre est divisible par ℓ , et c'est le caractère d'une représentation de G rationnelle sur Q_ℓ , d'après [8]. Il résulte alors de SWAN [11] qu'il existe un $Z_\ell(G)$-module projectif: P_G , unique à un isomorphisme près, de caractère $a_G - u_G$.

Le groupe $\mathrm{Hom}_G(P_G\ ,\ M)$ est un R-module, grâce à l'action de R sur M . Si G' est le groupe de Galois d'une extension L' de K contenant L , on sait [7] que $a_G = a_{G'}^*$ (caractère induit de G' à G) de sorte que P_G est isomorphe à

$$P_{G'} \underset{Z_\ell(G')}{\circ} Z_\ell(G)\ .$$

Cette remarque nous permet de définir $\alpha^R(A)$:

$$\alpha^R(A) = c\ell_R\ \mathrm{Hom}_G(P_G\ ,\ A_{\overline{\eta}})\ ,$$

où G est le groupe de Galois d'une extension finie de K qui trivialise A .

PROPOSITION 1.

(a) $\alpha^R(A)$ est additif en A.

(b) $\alpha^R(A)$ est nul si A est modérément ramifié.

(c) Soit K' une extension finie séparable de K, et soit A' un R-faisceau de ℓ torsion sur K'. Si A désigne l'image directe de A' sur K, on a

$$\alpha^R(A) = \alpha^R(A') + d_1(K'/K)\ c\ell_R(A')_{\overline{K}'} ,$$

où $d(K'/K)$ désigne le degré du discriminant de K' sur K et $d_1(K'/K)$ est égal à $d(K'/K) + 1 - [K':K]$.

En effet :

(a) P_G est projectif,

(b) P_G est nul si G est modérément ramifié,

(c) Soit L une extension finie galoisienne de K contenant K' de sorte que $H = \mathrm{Gal}(L/K')$ est un sous-groupe de $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. On sait [7] que

$a_G|H = a_H + d(K'/K)r_H$ (où r_H est de la représentation régulière de H).

On a donc un isomorphisme de $Z_\ell(H)$ modules :

$$P_G \simeq P_H + Z_\ell(H)^{d_1(K'/K)} .$$

2. Définition de $\varepsilon_x^R(A)$.

Nous reprenons les notations énoncées au début. Soient K le corps des fonctions rationnelles de C, et K_x le corps local, complété de K en la place $x \in C(k)$.

Le nombre premier ℓ étant toujours supposé distinct de p, soit A un R-faisceau constructible de ℓ-torsion sur C, et soit $A_\eta = i^*A$ sa fibre générique. Si $x \in C(k)$, nous posons

$$\alpha_x^R(A) = \alpha^R(A_{K_x})$$

où A_{K_x} est l'image réciproque de A par le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(K_x) \to C$. Puis nous définissons $\varepsilon_x^R(A)$ par la formule

$$\varepsilon_x^R(A) = \alpha_x^R(A) + c\ell_R(A_{\overline{\eta}}) - \sum_i (-1)^i c\ell_R\ H_x^i(A) , \tag{1}$$

où $H_x^i(A)$ est le i-ième groupe de cohomologie étale de A à support dans x.

La formule (1) met en évidence l'additivité de $\varepsilon_x^R(A)$ par rapport à A. Par ailleurs, notons $u : A \to i_* A_\eta$ le morphisme canonique. Le faisceau $\operatorname{Ker} u$ (resp. $\operatorname{Coker} u$) est un "faisceau gratte-ciel" concentré en un nombre fini de points, qui est canoniquement isomorphe à

$$\sum_{x \in C(k)} H_x^0(A) \qquad (\text{resp.} \quad \sum_{x \in C(k)} H_x^1(A)\ ) ,$$

de sorte que si A est de la forme $i_*(A_\eta)$, on a simplement

$$\text{(1 bis)} \qquad \varepsilon_x^R(A) = \alpha_x^R(A) + c\ell_R(A_{\bar\eta}) - c\ell_R\, H_x^2(A) .$$

De plus, $H_x^2(A)$ est alors égal à

$$[R^1\, i_*(A_\eta)]_x = H^1(G_x\, ,\, A_{\bar\eta}) ,$$

où $G_x = \operatorname{Gal} \bar K_x / K_x$.

Posons $(A_{\bar\eta})^o = \operatorname{Hom}(A_{\bar\eta}\, ,\, \mu)$, où μ est le groupe des racines de l'unité de k. Le groupe $A_{\bar\eta}$ est d'ordre premier à p, et G_x est extension d'un pro-groupe libre à un générateur (groupe de Galois de l'extension maximale de K_x d'ordre premier à p) par un pro-p-groupe ; on en déduit facilement que :

(a) Le cup produit

$$H^1(G_x\, ,\, A_{\bar\eta}) \times H^0(G_x\, ,\, (A_{\bar\eta})^c) \to H^1(G_x\, ,\, \mu) \simeq (Q/Z)'$$

établit une dualité canonique entre les deux groupes du premier membre (théorème de dualité locale).

(b) $c\ell_R\, H^1(G_x\, ,\, A_{\bar\eta}) = c\ell_R(A_{\bar\eta})^{G_x}$.

Nous avons donc obtenu que, si A_η est un R-faisceau de ℓ torsion sur η trivialisé par le groupe fini G, on a, avec les notations du n° 1,

$$\text{(1 ter)} \qquad \varepsilon_x^R(i_*\, A_\eta) = c\ell_R\, \operatorname{Hom}_{G_x}(P_{G_x}\, ,\, A_{\bar\eta}) + c\ell_R\, A_{\bar\eta} - c\ell_R(A_{\bar\eta})^{G_x} ,$$

où G_x est un groupe de décomposition de G au-dessus de x.

<u>Remarque</u>. - Lorsque G_x est d'ordre premier à ℓ, on peut montrer que $\varepsilon_x^R(i_*\, A_{\bar\eta})$ est aussi égal à $c\ell_R\, \operatorname{Hom}_{G_x}(\operatorname{Art}_{G_x}\, ,\, A_{\bar\eta})$ où Art_{G_x} désigne un $Z_\ell(G_x)$-module, libre sur Z_ℓ, dont le caractère est le caractère d'Artin de G_x.

3. Enoncé du théorème principal.

THÉORÈME 1. - Soit ℓ un nombre premier distinct de p , et soit A un R-faisceau constructible, de ℓ-torsion, défini sur C . Alors :

$$\chi_R(C\ ,\ A) = \chi(C)\ c\ell_R(A_{\bar{\eta}}) - \sum_{x\in C(k)} \varepsilon_x^R(A)\ . \tag{2}$$

Avant de démontrer le théorème 1, nous allons en donner une traduction en cohomologie galoisienne.

Soient S un ensemble fini de points de $C(k)$, $s = \mathrm{card}(S)$, et $U = C - S$. On sait [1] que les groupes $H^i(U\ ,\ A|U)$ sont finis, et sont nuls pour $i \geqslant 2$ si $S \neq \emptyset$. Nous pouvons donc définir de manière évidente $\chi_R(U\ ,\ A|U)$. Par ailleurs, la suite exacte de cohomologie relative à un sous-espace fermé nous donne les relations :

$$\chi_R(C\ ,\ A) = \chi_R(U\ ,\ A|U) + \sum_{x\in S} \sum_i (-1)^i\ c\ell_R\ H_x^i(A)$$

et

$$\chi(U) = 2 - 2g - s\ .$$

La formule (2) est donc équivalente à

$$\chi_R(U\ ,\ A|U) = \chi(U)\ c\ell_R(A_{\bar{\eta}}) - \sum_{x\in U(k)} \varepsilon_x^R(A) - \sum_{x\in S} \alpha_x^R(A)\ . \tag{2 bis}$$

En particulier, si S contient les points de C où A est ramifié, on obtient

$$\chi_R(U\ ,\ A|U) = \chi(U)\ c\ell_R(A_{\bar{\eta}}) - \sum_{x\in S} \alpha_x^R(A)\ . \tag{2 ter}$$

Or, dans ce dernier cas, si S est non vide et A de la forme $i_*(A_\eta)$, le premier membre de la formule (2 ter) est simplement :

$$c\ell_R\ H^0(\pi_1\ ,\ A_{\bar{\eta}}) - c\ell_R\ H^1(\pi_1\ ,\ A_{\bar{\eta}})\ ,$$

où π_1 est le groupe fondamental de U .

4. Démonstration du théorème 1.

Etablissons d'abord deux lemmes.

LEMME 1. - Soient K' une extension finie séparable de K , C' la courbe normalisée de C dans K' , $f : C' \to C$ le morphisme canonique. Soit A' un R-faisceau constructible, de ℓ torsion, défini sur C' . Alors la formule (2) est vraie pour A' si, et seulement si, elle est vraie pour $A = f_* A'$.

En effet, la suite spectrale de Leray

$$H^*(C', A') \Leftarrow H^p(C, R^q f_* A')$$

dégénère, car f étant fini, $R^q f_* A'$ est nul pour $i > 0$. On a donc un isomorphisme de R-modules :

$$H^i(C', A') \tilde{\rightarrow} H^i(C, A) , \quad \text{et à fortiori} \quad \chi_R(C, A) = \chi_R(C', A') .$$

Pour des raisons analogues,

$$H^i_x(A) \tilde{\rightarrow} \sum_{x' \to x} H^i_{x'}(A') .$$

Par ailleurs, $c\ell_R(A_{\bar{\eta}}) = [K':K]\, c\ell_R(A'_{\bar{\eta}'})$, et la formule de Hurwitz donne ici :

$$\chi(C') = [K':K]\, \chi(C) + d(K':K) .$$

Le lemme résulte alors facilement de la définition de $\varepsilon^R_x(.)$ (formule (1)) et de la proposition (1) (c).

LEMME 2. - Soient K' une extension galoisienne finie de K de groupe de Galois G , et C' la normalisée de C dans K' . Soit A' un faisceau constant sur C' , fini et annulé par ℓ , sur lequel $R = F_\ell(G)$ opère. Tenant compte de l'action de R sur A' et de l'action naturelle de G sur C' , on fait opérer G sur A' de façon compatible avec les opérations de G sur C' . Alors la formule (2) est vraie pour le R-faisceau A , image directe de A' par le morphisme canonique $f : C' \to C$.

Démonstration. - La suite spectrale de Leray (cf. lemme 1) nous donne un isomorphisme de R-modules

$$H^i(C, A) \tilde{\rightarrow} H^i(C', A') .$$

Etudions maintenant le deuxième membre de (2). Notons M' le R-module $A'_{\bar{\eta}'}$, où η' est un point générique de C' . Le faisceau $A_{\bar{\eta}}$ est défini par le $(G-R)$-bimodule induit : $A_{\bar{\eta}} = \mathrm{Hom}(G, M')$, sur lequel G opère par la représentation régulière droite

$${}^g u(h) = u(hg)$$

et R par la représentation régulière gauche et son action sur M'

$${}^g u(h) = g u(g^{-1} h) .$$

Soient x un point de $C(k)$, x' un point de C' au-dessus de x, $G_{x'}$ son stabilisateur dans G. La formule (1 ter) donne ici :

$$\varepsilon_x^R(A) = c\ell_R \operatorname{Hom}_{G_{x'}}[P_{G_{x'}}, \operatorname{Hom}(G, M')] + c\ell_R \operatorname{Hom}(G, M') - c\ell_R \operatorname{Hom}(G, M')^{G_{x'}}$$

$$= c\ell_R \operatorname{Hom}_{Z_\ell}[Z_\ell(G) \underset{Z_\ell(G_{x'})}{\otimes} P_{G_{x'}}, M'] + c\ell_R \operatorname{Hom}_{Z_\ell}(Z_\ell(G), M')$$

$$- c\ell_R \operatorname{Hom}_{Z_\ell}[Z_\ell(G) \underset{Z_\ell(G_{x'})}{\otimes} Z_\ell, M'] .$$

Soit $\mathrm{Art}_{G_{x'}}$ un $Z_\ell(G_{x'})$-module, libre sur Z_ℓ, dont le caractère est le caractère d'Artin de $G_{x'}$, et soit $\mathrm{Art}(G, x)$ le G-module induit

$$Z_\ell(G) \underset{Z_\ell(G_{x'})}{\otimes} \mathrm{Art}_{G_{x'}}$$

dont le caractère est indépendant du point x' choisi.

Faisons les remarques suivantes :

(a) Si N et N' sont deux $Z_\ell(G)$-modules, libres sur Z_ℓ, qui ont même caractère (c'est-à-dire qui deviennent isomorphes sur $Q_\ell(G)$), alors :

$$c\ell_R(N/\ell\, N) = c\ell_R(N'/\ell\, N')$$

dans $K(R)$ où $R = F_\ell(G)$.

(b) Si N est un $Z_\ell(G)$-module, libre sur Z_ℓ, à caractère entier, $\operatorname{Hom}_{Z_\ell}(N, Z_\ell)$ a même caractère que N.

(c) D'après la définition de $P_{G_{x'}}$ (cf. n° 1), les $Z_\ell(G_{x'})$-modules :

$$\mathrm{Art}_{G_{x'}} \oplus Z_\ell \qquad \text{et} \qquad P_{G_{x'}} \oplus Z_\ell(G_{x'})$$

ont même caractère.

Il est clair alors que l'expression trouvée plus haut pour $\varepsilon_x^R(A)$ est aussi égale à $c\ell_R(\mathrm{Art}(G, x) \otimes_{Z_\ell} M')$ de sorte que la formule (2) sera vraie pour le faisceau **A** si, et seulement si, on a l'égalité :

$$(3) \quad \chi_R(C', A') = \chi(C)\, c\ell_R[Z_\ell(G) \otimes_{Z_\ell} A'_{\eta'}] - \sum_{x \in C(k)} c\ell_R[\mathrm{Art}(G, x) \otimes_{Z_\ell} A'_{\eta'}] .$$

Or, si $\underset{\sim}{F_\ell}$ désigne le faisceau constant sur C' défini par F_ℓ, sur lequel R opère trivialement, on a un isomorphisme de R-modules :

$$H^i(C\ ,\ \underset{\sim}{F}_\ell) \underset{F_\ell}{\otimes} A'_{\overline{\eta}'} \xrightarrow{\sim} H^i(C'\ ,\ A')\ ,$$

de sorte que (3) se déduit "par tensorisation par $A'_{\overline{\eta}'}$ sur F_ℓ " de la formule (3) obtenue pour $A' = \underset{\sim}{F}_\ell$. Il nous suffit donc de démontrer (3) lorsque $A' = \underset{\sim}{F}_\ell$. Considérons alors les groupes de cohomologie étale ℓ-adique de C' : $H^i(C'\ ,\ Z_\ell)$, définis comme limite projective des groupes $H^i(C'\ ,\ \underset{\sim}{Z/\ell^n Z})$:

$$H^o(C'\ ,\ Z_\ell) \simeq H^2(C'\ ,\ Z_\ell) \simeq Z_\ell \qquad H^1(C'\ ,\ Z_\ell) \simeq T_\ell(J) = \ell\text{-module}$$

de Tate de la jacobienne de C' . Appliquons <u>la formule de Weil</u> ([12] , [8]) au revêtement galoisien $C' \to C$. On obtient la relation suivante entre caractères de $Z_\ell(G)$-modules, libres sur Z_ℓ :

$$(4) \qquad \sum_i (-1)^i\ H^i(C'\ ,\ Z_\ell) = \chi(C)\ Z_\ell(G) - \sum_{x \in C(\mathbf{k})} \operatorname{Art}(G\ ,\ x)$$

Il suffit alors de remarquer que la formule (3), dans le cas $A' = \underset{\sim}{F}_\ell$, se déduit de (4) par "réduction modulo ℓ ", opération qui a un sens d'après la remarque (a) ci-dessus.

[Rappelons que la formule de Weil provient elle-même d'une formule de Lefschetz et de l'interprétation des valeurs des caractères d'Artin des groupes d'inertie $G_{x'}$, comme étant des ordres de multiplicité des points fixes de C' sous G .]

<u>Fin de la démonstration du théorème</u> 1. - Notons que les deux membres de (2) sont additifs en A , et que (2) est trivialement vraie si A est un faisceau concentré en un nombre fini de points de $C(k)$.

Nous pouvons donc supposer que A est un R-faisceau constructible sur C , annulé par ℓ , de la forme $i_* A_{\overline{\eta}}$, puis, que R opère fidèlement sur $A_{\overline{\eta}}$. L'anneau R est alors fini et son radical I est nilpotent. Filtrant $A_{\overline{\eta}}$ par les $I^n A_{\overline{\eta}}$, on se ramène au cas où $A_{\overline{\eta}}$ est un R-module simple, puis au cas où R est simple, de sorte que $K(R)$ est isomorphe à Z . On peut alors supposer R trivial.

Soit K' une extension galoisienne de K , de groupe G , qui trivialise A . D'après un théorème d'Artin, les représentations de G obtenues en induisant à G les représentations rationnelles sur Q des <u>sous-groupes cycliques</u> de G , engendrent un sous-groupe d'indice fini de $K[Q(G)]$. D'après SWAN [10], ce résultat est encore vrai dans $K[F_\ell(G)]$. Quitte à remplacer A par $A^{\oplus r}$ $(r > 0)$, ce qui est loisible, on peut donc se limiter au cas où $A_{\overline{\eta}}$ est un G-module de la forme:

$$F_\ell(G) \underset{F_\ell(H)}{\otimes} M$$

où H est un sous-groupe cyclique de G .

Si L est le corps des invariants de H , C' la normalisée de C dans L , et f le morphisme $C' \to C$, A est donc de la forme $f_* A'$ où A'_η est trivialisé par H . Grâce au lemme 1, il suffit de démontrer le théorème 1 pour A' . On se ramène au cas où le groupe cyclique H opère de manière simple et fidèle sur le F_ℓ espace vectoriel $A'_{\bar\eta}$, mais alors, H <u>est nécessairement d'ordre</u> premier à ℓ .

Nous supposons donc que A est de la forme $i_* A_\eta$ où $A_{\bar\eta}$ est annulé par ℓ et trivialisé par le groupe G d'ordre premier à ℓ . Soient C' le revêtement galoisien de C correspondant à G , f le morphisme canonique $C' \to C$. Soient $A' = f^* A$ et $\bar{A} = f_* A'$. Faisons opérer G sur A' grâce à l'action de G sur A'_η et sur C' (cf. lemme 2). Le théorème 1 est alors vrai pour le R-faisceau $\bar{A}$ où $R = F_\ell(G)$, d'après le lemme 2. D'autre part, le morphisme canonique $A \to \bar{A}$ identifie A au faisceau $\bar{A}^G$ des invariants de $\bar{A}$ sous G . Comme l'ordre de G est premier à ℓ , $\bar{A}$ est somme directe de $\bar{A}^G$ et de $I\bar{A}$ (I = idéal d'augmentation de R), de sorte que le foncteur des invariants sous G va commuter à tout foncteur additif. Prenons alors les invariants sous G dans les deux membres de la formule (2) relative à $\bar{A}$; on obtient la relation :

$$\chi_R(\bar{A}^G) = \chi(C)\ c\ell_R(\bar{A}^G) - \sum_{x \in C(k)} \varepsilon_x^R(\bar{A}^G) \ ,$$

qui n'est autre que la formule (2) pour $A = \bar{A}^G$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

II. Cohomologie des variétés abéliennes. Formule de Ogg-Šafarevič.

1. Remarques générales.

Nous conservons les notations introduites dans la première partie : k , C , η , p , K . Si x est un point de C(k) , K_x désigne le corps local, complété de K en la place x . Le nombre ℓ est un nombre premier distinct de p , et l'entier n parcourt les puissances positives de ℓ . Nous notons D le groupe Q_ℓ/Z_ℓ . Si M est un groupe abélien, M_n (resp. $M^{(n)}$) est le noyau (resp. le conoyau) de la multiplication par n dans M ; $M(\ell)$ est la composante ℓ primaire de M .

Soit A une variété abélienne définie sur K. Comme les corps K et K_x ont une dimension cohomologique $\leqslant 1$ (théorème de Tsen et théorème de Lang), les groupes $H^i(K, A)$ et $H^i(K_x, A)$ sont nuls pour $i \geqslant 2$, d'après [9] (§3, prop. 12).

Nous allons étudier le groupe $H^1(K, A)$ (resp. $H^1(K_x, A)$), groupe des classes de fibrés principaux homogènes de groupe A définis sur K (resp. K_x).

2. Cas local.

Dans ce paragraphe, o désigne un anneau de valuation discrète <u>hensélien</u> de corps résiduel k, algébriquement clos, de caractéristique p. Soient $\widetilde{K}$ le corps des fractions de o, $\hat{o}$ et $\hat{K}$ les complétés de o et $\widetilde{K}$.

THÉORÈME 2. - Soit A une variété abélienne de dimension d définie sur $\widetilde{K}$, et soit B sa variété duale. Alors :

(i) Le groupe $A(\widetilde{K})$ est extension d'un groupe fini par un groupe $A(\widetilde{K})^0$ qui est ℓ divisible pour tout entier ℓ premier à p.

(ii) Le groupe $H^1(\widetilde{K}, A)(\ell)$ est canoniquement isomorphe au groupe

$$\mathrm{Hom}[T_\ell(B)(\widetilde{K}), D]$$

où $T_\ell(B)$ est le ℓ-groupe de Tate de B, et il est isomorphe au groupe

$$D^{2d-\beta}$$

où β est un nombre entier, indépendant de ℓ, compris entre $2d$ et 0, nul si, et seulement si, A possède une "bonne réduction" sur o.

(iii) Le morphisme canonique : $H^1(\widetilde{K}, A)(\ell) \to H^1(\hat{K}, A)(\ell)$ est un isomorphisme.

<u>Démonstration</u>. - Il résulte des travaux de NÉRON [4] que l'on peut associer à A un schéma en groupes $\mathfrak{A}$ sur $\mathrm{Spec}\ o$, ayant les propriétés suivantes :

(a) $\mathfrak{A}$ est lisse et quasi-projectif sur o.

(b) La fibre générique $\mathfrak{A}_{\widetilde{K}}$ de $\mathfrak{A}$ est $\widetilde{K}$ isomorphe à A.

(c) Le morphisme canonique : $\mathfrak{A}(o) \to \mathfrak{A}(\widetilde{K})$ est un isomorphisme.

Ceci étant, soit N le noyau du morphisme de spécialisation : $\mathfrak{A}(o) \to \mathfrak{A}(k)$ (morphisme surjectif, d'après (a)). Il résulte du lemme de Hensel que N est un groupe uniquement ℓ-divisible. D'autre part, le groupe algébrique $\mathfrak{A}_k$ est extension d'un groupe fini par un groupe algébrique connexe : $(\mathfrak{A}_k)^0$ de dimension d, lui-même extension d'une variété abélienne de dimension d_a, par un groupe linéaire produit d'un tore de dimension d_t et d'un groupe unipotent connexe. Comme le groupe $(\mathcal{A}_k)^o(k)$ est ℓ-divisible, nous démontrons l'assertion (i) du théorème en prenant pour $A(\widehat{K})^o$ le sous-groupe de $A(\widehat{K}) \simeq \mathcal{A}(o)$ image réciproque de $(\mathcal{A}_k)^o(k)$. De plus, N étant uniquement ℓ-divisible, $A(\widetilde{K})(\ell)$ est isomorphe à $\mathcal{A}(k)(\ell)$, donc, à un quotient fini près, est isomorphe à $(D)^{2d_a+d_t} = D^{2d-\beta(A)}$ où $\beta(A)$ est un nombre entier compris entre 0 et 2d. Il en résulte que $T_\ell(A)(\widetilde{K})$ est isomorphe à $Z_\ell^{2d-\beta(A)}$ Le nombre $\beta(A)$ "mesure" le degré de dégénérescence du modèle de Néron $\mathcal{A}$; en particulier, $\beta(A)$ est nul si, et seulement si, A possède une "bonne réduction" en o, c'est-à-dire si $\mathcal{A}$ est un schéma abélien.

Démontrons la deuxième assertion du théorème.

La suite exacte "de Kummer" :

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A \xrightarrow{n} A \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte de cohomologie :

$$0 \to A(\widetilde{K})^{(n)} \to H^1(\widetilde{K}, A_n) \to H^1(\widetilde{K}, A) \to H^1(\widetilde{K}, A) \to 0$$

[noter que $\widetilde{K}$ a un groupe de Galois isomorphe à celui de $\widehat{K}$, donc $\widetilde{K}$ est aussi de dimension cohomologique $\leqslant 1$].

Ceci prouve que $H^1(\widetilde{K}, A)$ est ℓ-divisible et que $H^1(\widetilde{K}, A)_n$ est fini, donc $H^1(\widetilde{K}, A)(\ell)$ est isomorphe à D^r, et s'identifie à $\varinjlim_n H^1(\widetilde{K}, A)_n$. Par ailleurs, l'assertion (i) du théorème entraîne que $\varinjlim_n A(\widetilde{K})^{(n)} = 0$, donc $H^1(\widetilde{K}, A)(\ell)$ est isomorphe à $\varinjlim_n H^1(\widetilde{K}, A_n)$.

Le théorème de dualité locale (cf. 1re partie, n° 2) donne un isomorphisme canonique :

$$H^1(\widetilde{K}, A_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}[B_n(\widetilde{K}), D].$$

Finalement, $H^1(\widetilde{K}, A)(\ell)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}[\varprojlim_n B_n(\widetilde{K}), D]$, c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}[T_\ell(B)(\widetilde{K}), D]$. Il est donc isomorphe à $D^{2d-\beta(B)}$. Notons que B étant K-isogène à A, on a $\beta(B) = \beta(A)$.

L'assertion (iii) du théorème résulte simplement de ce qui précède et du fait que le morphisme canonique : $H^1(\widetilde{K}, A_n) \to H^1(\widehat{K}, A_n)$ est un isomorphisme. Aussi, dans la suite, nous travaillerons avec les complétés des anneaux locaux de C, plutôt qu'avec les hensélisés.

3. Cas global.

Soit A une variété abélienne de dimension d définie sur K, et soit B la variété duale de A. Notons A^F (resp. B^F) la partie fixe (appelée aussi K/k-trace [2]) de A (resp. B), et soit d_o la dimension commune de A^F et B^F. D'après une propriété fondamentale de la trace [3], le groupe : $A(K)/A^F(k)$ est de type fini sur Z ; nous noterons r son rang.

Désignons par $\mathfrak{A}$ un modèle minimal global de A sur C [4]. $\mathfrak{A}$ est donc un schéma en groupes, lisse sur C, dont la fibre générique est K, isomorphe à A, et qui va représenter le faisceau $i_* A$. Soit S_o l'ensemble fini de points de $C(k)$ où A ne possède pas une bonne réduction, et notons $\mathfrak{A}^o$ la composante connexe de l'origine de $\mathfrak{A}$, de sorte que le faisceau quotient $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}^o$ est un faisceau à fibres finies, nulles en dehors de S_o.

Nous pouvons appliquer les résultats de la première partie aux faisceaux constructibles de ℓ-torsion sur C que sont $(\mathfrak{A}^o)_\ell$ et $\mathfrak{A}_\ell = i_* A_\ell$. Soit donc G le groupe de Galois d'une extension de K qui trivialise A_ℓ, et soit $G_{x'}$ un groupe d'inertie au-dessus de $x \in C(k)$. Notons $P_{G_{x'}}$ le module de Swan relatif à ℓ et à $G_{x'}$ (1re partie, n° 1). Nous sommes alors amenés à poser :

$$\alpha_x^\ell = \alpha_x^Z(\mathfrak{A}_\ell) = \mathrm{Long}_{F_\ell}\ \mathrm{Hom}_{G_{x'}}[P_{G_{x'}}\ ,\ A_\ell(\bar{K})] = \alpha_x^Z(\mathfrak{A}^o)_\ell$$

$$\varepsilon_x^\ell = \varepsilon_x^Z(\mathfrak{A}^o)_\ell = \alpha_x^\ell + \mathrm{Long}_{F_\ell}(A_\ell)(\bar{K}) - \mathrm{Long}_{F_\ell}[(\mathfrak{A}^o)_\ell(K_x)]$$

$$= \alpha_x^\ell + \beta_x$$

où $\beta_x = \beta(A_{K_x})$ avec les notations du théorème 2.

Soit alors S un ensemble fini de points de $C(k)$ ayant s éléments. Nous allons préciser la structure du groupe $H^1(C - S\ ,\ \mathfrak{A})$, groupe des classes d'espaces principaux homogènes de groupe $\mathfrak{A}$, triviaux aux points de $C - S$.

THÉORÈME 3.

(i) Si S est non vide, $H^1(C - S\ ,\ \mathfrak{A})(\ell)$ est un groupe divisible, isomorphe à $D^{r_S(\ell)}$. Si de plus S contient S_o, $r_S(\ell)$ est donné par la formule :

$$r + r_S(\ell) = 2d_o + 2d(2g + s - 2) + \sum_{x \in S_o} \alpha_x^\ell .$$

(ii) Le groupe $H^1(C\ ,\ A)(\ell)$ est divisible pour presque tout ℓ , et dans le cas général est extension d'un groupe fini par un groupe divisible isomorphe à $D^{r_o(\ell)}$, où $r_o(\ell)$ est donné par la formule de Ogg-Šafarevič :

$$r + r_o(\ell) = 4d_o + 2d(2g - 2) + \sum_{x\in S_o} (\beta_x + \alpha_x^\ell) .$$

(iii) Il existe des suites exactes canoniques :

Si S est non vide :

$$(*)\quad 0 \to H^1(C, \mathcal{A})(\ell) \to H^1(C-S, \mathcal{A})(\ell) \to \sum_{x\in S} H^1(K_x, A)(\ell) \to \mathrm{Hom}[T_\ell(B^F), D] \to 0 .$$

Si S est non vide et contient S_o :

$$(**)\quad 0 \to H^1(C, \mathcal{A})_n \to H^1(C-S, \mathcal{A})_n \to \sum_{x\in S} H^1(K_x, A)_n \to \mathrm{Hom}[(\mathcal{B}^o)_n(K), D] \to 0 ,$$

où $\mathcal{B}^o$ désigne la composante connexe du modèle minimal global de B sur C .

Etablissons quelques résultats auxiliaires :

LEMME 3. - Les groupes $H^i(C - S\ ,\ \mathcal{A})$ sont des groupes de torsion pour $i = 1$ et 2 , et sont nuls pour $i \geqslant 3$.

Le lemme résulte de la suite spectrale de Leray, relative au morphisme i_S : $\eta \to C - S$, compte tenu du fait que les groupes $H^i(K\ ,\ A)$ et $H^i(K_x\ ,\ A)$ sont de torsion pour $i = 1$, et sont nuls pour $i \geqslant 2$. Ainsi pour $i = 1$ et 2 , on conclut à l'aide de la suite exacte :

$$0 \to H^1(C-S, \mathcal{A}) \to H^1(K, A) \to \sum_{x\in C-S} H^1(K_x, A) \to H^2(C-S, \mathcal{A}) \to H^2(K, A) = 0 .$$

Par ailleurs, la suite exacte :

$$0 \to (\mathcal{A}^o)_n \to \mathcal{A}^o \to \mathcal{A}^o \to 0$$

donne la suite exacte de cohomologie :

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} &0 \to (\mathcal{A}^o)_n(K) \to \mathcal{A}^o(K) \xrightarrow{n} \mathcal{A}^o(K) \to H^1[C-S, (\mathcal{A}^o)_n] \to H^1(C-S, \mathcal{A}^o) \\ &\to H^1(C-S, \mathcal{A}^o) \to H^2[C-S, (\mathcal{A}^o)_n] \to H^2(C-S, \mathcal{A}^o) \to H^2(C-S, \mathcal{A}^o) \to 0 . \end{aligned}$$

Comme les groupes $H^i[C - S, (\mathcal{A}^o)_n]$ sont finis [1], les quotients de Herbrand des groupes $H^i(C - S, \mathcal{A}^o)$, relatifs à l'entier ℓ sont définis. Nous posons :

$$h_\ell\, H^i(C - S, \mathcal{A}^o) = \mathrm{Long}_{F_\ell}\, H^i(C - S, \mathcal{A}^o)_\ell - \mathrm{Long}_{F_\ell}\, H^i(C - S, \mathcal{A}^o)^{(\ell)}\ .$$

D'autre part, de la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{A}^o \to \mathcal{A} \to \mathfrak{F} \to 0$$

et du fait que les groupes $H^i(C - S, \mathfrak{F})$ sont finis et même nuls pour $i \geqslant 1$, on déduit que le quotient de Herbrand : $h_\ell\, H^i(C - S, \mathcal{A})$ est défini et est égal à $h_\ell\, H^i(C - S, \mathcal{A}^o)$, de sorte que la suite exacte (a) donne la relation :

$$\text{(b)} \qquad \sum_i (-1)^i\, h_\ell\, H^i(C - S, \mathcal{A}) = \chi_Z[C - S, (\mathcal{A}^o)_\ell]\ .$$

Le groupe $A(K)$ est extension du groupe de rang r : $A(K)/A^F(k)$ par le groupe divisible $A^F(k)$ de sorte que :

$$h_\ell\, H^o(C - S, \mathcal{A}) = h_\ell\, A(K) = 2d_o - r\ .$$

<u>Démonstration de</u> (i). - Si S n'est pas vide, $H^2(C - S, (\mathcal{A}^o)_n) = 0$. De la suite exacte (a), on déduit alors :

$$H^2(C - S, \mathcal{A}^o)(\ell) = H^2(C - S, \mathcal{A})(\ell) = 0\ .$$

$H^1(C - S, \mathcal{A}^o)(\ell)$ est isomorphe à $D^{r_S(\ell)}$, et il en est donc de même de $H^1(C - S, \mathcal{A})$.

L'entier $r_S(\ell)$ est donné par la relation (b) :

$$2d_o - r - r_S(\ell) = \chi_Z[C - S, (\mathcal{A}^o)_\ell]\ .$$

Utilisant la formule (2 bis) de la première partie, on voit que le second membre est égal à

$$2d(2 - 2g - s) - \sum_{x \in C-S} \varepsilon_x^\ell - \sum_{x \in S} \alpha_x^\ell\ ,$$

soit finalement :

$$r + r_S(\ell) = 2d_o + 2d(2g + s - 2) + \sum_{x \in S_o} \alpha_x^\ell + \sum_{x \in C-S} \beta_x\ .$$

Démonstration de (iii). - La suite spectrale de Leray relative à l'immersion : $C - S \to C$ fournit les suites exactes suivantes (compte tenu du lemme 3 et de $H^2(C - S , \mathcal{A}) = 0$ si $S \neq \emptyset$) :

$$\text{(c)} \quad 0 \to H^1(C , \mathcal{A}_n) \to H^1(C - S , \mathcal{A}_n) \to \sum_{x \in S} H^1(K_x , \mathcal{A}_n) \to H^2(C , \mathcal{A}_n) \to 0$$

$$\text{(d)} \quad 0 \to H^1(C , \mathcal{A})(\ell) \to H^1(C - S , \mathcal{A})(\ell) \to \sum_{x \in S} H^1(K_x , A)(\ell) \to H^2(C , \mathcal{A})(\ell) \to 0 .$$

Pour déduire la suite exacte ($\star$) de la suite exacte (d), il suffit d'exhiber un isomorphisme canonique entre $H^2(C , A)(\ell)$ et $\mathrm{Hom}[T_\ell(B^F) , D]$. Mais le groupe $B(K)/B^F(k)$, étant de type fini sur Z, ne contient pas de points indéfiniment ℓ-divisibles. Donc,

$$T_\ell(B^F) = T_\ell(B)(K) = \varprojlim_n (\mathcal{B}^o)_n(K) ,$$

de sorte que l'isomorphisme cherché

$$H^2(C , A)(\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}[T_\ell(B)(K) , D]$$

s'obtient par passage à la limite inductive sur n, à partir de la suite exacte ($\star\star$).

Pour établir ($\star\star$), notons que l'hypothèse $S \supset S_o$ entraîne que l'on a une suite exacte "de Kummer" :

$$0 \to \mathcal{A}_n|C-S \to \mathcal{A}|C-S \xrightarrow{n} \mathcal{A}|C-S \to 0 ,$$

et par suite, $H^1(C - S , \mathcal{A}_n)$ s'envoie surjectivement sur $H^1(C - S , \mathcal{A})_n$. Par ailleurs, le théorème de dualité locale donne un isomorphisme canonique :

$$H^1(K_x , A_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}[B_n(K_x) , D] ,$$

tandis que le théorème de dualité globale [1] donne un isomorphisme canonique :

$$H^2(C , \mathcal{A}_n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}[B_n(K) , D] .$$

Le morphisme $H^1(K_x , A_n) \to H^2(C , \mathcal{A}_n)$, inclus dans la suite exacte (c), correspond alors au transposé de l'injection canonique : $B_n(K) \to B_n(K_x)$. Enfin, il résulte du théorème 2 que l'on a un isomorphisme canonique :

$$H^1(K_x , A)_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}[(\mathcal{B}^o)_n(K_x) , D] .$$

Nous résumons les remarques précédentes en disant que le diagramme commutatif ci-dessous est exact :

$$\begin{tikzcd}
H^1(C - S\ ,\ \mathfrak{A}_n) \arrow[r] \arrow[d] & \sum\limits_{x\in S} \mathrm{Hom}[B_n(K_x)\ ,\ D] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}[B_n(K)\ ,\ D] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^1(C - S\ ,\ \mathfrak{A})_n \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \sum\limits_{x\in S} \mathrm{Hom}[(\mathfrak{B}^o)_n(K_x)\ ,\ D] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\ (u) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} ;$$

mais alors Coker (u) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}[(\mathfrak{B}^o)_n(K)\ ,\ D]$, ce qui achève de prouver l'exactitude de (**).

<u>Démonstration de</u> (ii). - Posons $X = H^1(C\ ,\ A)$ = groupe des classes d'espaces principaux homogènes de groupe A , définis sur K , qui sont localement triviaux.

En comparant les suites exactes (*) et (**), on voit facilement que :

$$\mathrm{card}\ X^{(n)} = \mathrm{card}\ (\mathfrak{B}^o)_n(K)/\mathrm{card}\ (B^F)_n(K)\ ,$$

donc card $X^{(n)}$ divise l'ordre du sous-groupe de torsion T de $B(K)/B^F(k)$. Mais T est un groupe fini, donc $X(\ell)$ est divisible pour presque tout ℓ , et, pour tout ℓ distinct de p , il existe un entier m tel que $\ell^m X$ soit ℓ-divisible et d'indice fini dans X .

Par ailleurs, on sait que $h_\ell\ H^o(C\ ,\ \mathfrak{A}) = 2d_o - r$, et que $h_\ell\ H^2(C\ ,\ \mathfrak{A})$ est égal à $h_\ell\ \mathrm{Hom}[T_\ell(B^F)\ ,\ D] = 2d_o$. La structure trouvée pour $X(\ell)$ montre que $h_\ell\ H^1(C\ ,\ \mathfrak{A})$ est égal à $r_o(\ell)$. Pour obtenir la formule de Ogg-Šafarevič, il suffit alors d'utiliser la relation (b) dans le cas où S est vide. On trouve :

$$2d_o - r - r_o(\ell) + 2d_o = 2d(2 - 2g) - \sum_{x\in S_o} \varepsilon_x^\ell\ .$$

<u>Remarques</u>.

1° OGG [5] et ŠAFAREVIČ [6], ne disposant pas de l'invariant α_x^ℓ , ont démontré la formule ci-dessus dans le cas où A_n est supposé modérément ramifié sur C . Leur démonstration utilise la structure précise du groupe fondamental modéré de $C - S$.

2° GROTHENDIECK a montré (non publié) que les invariants locaux α_x^ℓ ne dépendent pas du nombre premier ℓ distinct de p .

3° Il résulte de travaux de M. ARTIN sur les courbes elliptiques que, si $d = 1$, $X(\ell)$ est toujours un groupe divisible. Par contre, supposons que k soit le corps des complexes et que d soit au moins égal à 2. Utilisant alors la structure du compactifié de Satake de la variété des modules des variétés abéliennes de dimension d, on montre qu'il existe une courbe C, lisse et projective sur k, et un schéma abélien $\mathfrak{A}$ non constant défini sur C. Le schéma dual $\mathfrak{B}$ possède la même propriété. On peut supposer que $\mathfrak{B}_\ell$ est décomposé sur C. En se reportant à la valeur trouvée plus haut, on constate que, dans le cas présent, $H^1(C, \mathfrak{A})^{(\ell)}$ n'est pas le groupe unité.

3. Application à la théorie des surfaces (d'après M. ARTIN).

Soit X une surface non singulière, connexe et projective sur k. Soit :

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$$

une factorisation du morphisme structural de X, où Y est une courbe lisse, connexe, projective sur k, et f est un morphisme génériquement lisse, à fibres géométriquement intègres. Soient η le point générique de Y, X_η la fibre générique de f, $i : \eta \to Y$ le morphisme canonique.

Les hypothèses faites entraînent les propriétés suivantes :

(i) $f_*(G_m)_X = (G_m)_Y$ (où G_m désigne le groupe multiplicatif).

(ii) $R^1 f_*(G_m)_X = i_*(P_\eta)$ où $\underline{\operatorname{Pic}}\,(X_\eta/k(\eta)) = P_\eta$.

(iii) $R^i f_*(G_m)_X = 0$ pour $i \geqslant 2$.

La suite spectrale de Leray :

$$H^*(X, G_m) \Longleftarrow H^p(Y, R^q f_* G_m)$$

donne alors un isomorphisme canonique entre le groupe de Brauer $H^2(X, G_m)$ de la surface X et le groupe $H^1(Y, i_* P_\eta)$. Pour calculer ce dernier terme, mettons en évidence la jacobienne A_η de la fibre X_η. On a donc une suite exacte :

$$0 \to A_\eta \to P_\eta \to Z_\eta \to 0,$$

avec $Z_\eta = Z$. Mais $H^1(Y, Z_Y)$ est nul et l'image de $P_\eta(k(\eta))$ dans $Z_\eta(k(\eta))$ est d'indice fini. On en déduit que le morphisme canonique :

$$H^1(Y, i_* A_\eta) \to H^1(Y, i_* P_\eta) = H^2(X, G_m)$$

a un noyau et un conoyau fini (c'est même un isomorphisme si X possède un point rationnel sur $k(\eta)$).

Par ailleurs, la suite exacte de Kummer :

$$0 \to (\mu_n)_X \to (G_m)_X \to (G_m)_X \to 0$$

donne la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Pic}\,(X)^{(n)} \to H^2(X\,,\,\mu_n) \to H^2(X\,,\,G_m)_n \to 0\ .$$

Par passage à la limite sur les puissances de ℓ , on en déduit que le corang de $H^2(X\,,\,G_m)(\ell)$ est égal à $B_2 - \rho$ avec :

$$B_2 = \mathrm{rang}\ H^2(X\,,\,Z_\ell) = 2\text{e nombre de Betti de } X\ ,$$

$$\rho = \text{nombre de Picard de } X\ .$$

Le corang de $H^1(Y\,,\,i_* A_\eta)$, donné par la formule de Ogg-Šafarevič, est donc égal à $B_2 - \rho$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARTIN (M.) et GROTHENDIECK (A.). - Cohomologie étale des schémas, Séminaire de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures-sur-Yvette, 1963/64 et 1964/65.

[2] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[3] LANG (S.) and NÉRON (A.). - Rational points of abelian varieties over function fields, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 95-118.

[4] NÉRON (André). - Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux. - Paris, Presse Universitaire de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 21).

[5] OGG (A. P.). - Cohomology of abelian varieties over function fields, Annals of Math., Séries 2, t. 76, 1962, p. 185-212.

[6] ŠAFAREVIČ (I. R.). - Principal homogeneous spaces defined over a function field, Amer. math. Soc. Transl., Series 2, t. 37, 1964, p. 85-114.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Corps locaux. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1296).

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la rationalité des représentations d'Artin, Annals of Math., Séries 2, t. 72, 1960, p. 405-420.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Cohomologie galoisienne, Cours professé au Collège de France, 1962/63 (multigraphié).

[10] SWAN (Richard G.). - Induced representations and projective modules, Annals of Math., Series 2, t. 71, 1960, p. 552-578.

[11] SWAN (Richard G.). - The Grothendieck ring of a finite group, Topology, t. 2, 1963, p. 85-110.

[12] WEIL (André). - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent. - Paris, Hermann, 1948 (Act. scient. et ind., 1041 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 7).