ANDRÉ HAEFLIGER

Plongements de variétés dans le domaine stable

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 245, p. 63-77

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__63_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 245

Décembre 1962

PLONGEMENTS DE VARIÉTÉS DANS LE DOMAINE STABLE

par André HAEFLIGER

Soit V une variété différentiable compacte de dimension n et soit M une variété différentiable de dimension m. On se propose de réduire à un problème d'homotopie le problème de la classification des plongements différentiables de V dans M, lorsque $m > \frac{3}{2}(n+1)$ (domaine stable).

On se bornera à considérer le cas différentiable, bien que des résultats remarquables et beaucoup plus forts aient été obtenus dans le cas combinatoire par E. C. ZEEMAN et son école ; dans le domaine stable cependant, les deux points de vue, combinatoire et différentiable, sont sans doute équivalents. On ne dira également rien de ce qui se passe en dehors du domaine stable, par exemple sur l'existence de sphères nouées différentiablement. Enfin les théorèmes de non-existence de plongements basés sur l'étude des classes caractéristiques ou sur la K-théorie (ATIYAH, HIRZEBRUCH) ne seront pas considérés, puisqu'on s'intéressera ici surtout à des théorèmes d'existence.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les applications considérées seront différentiables.

Un plongement f de V dans M est une application biunivoque de V dans M dont le rang est partout égal à $n = \dim V$. Deux plongements f_0 et f_1 de V dans M sont isotopes s'ils sont reliés par une homotopie f_t (dépendant différentiablement de t) telle que f_t soit un plongement pour tout t ; f_t est appelée une isotopie. Cette définition est équivalente à la suivante, en supposant toujours V compacte (cf. THOM [6]) ; les plongements f_0 et f_1 sont isotopes s'il existe une homotopie $h_t : M \to M$ qui, pour chaque t, est un difféomorphisme, telle que h_0 soit l'identité et $f_1 = h_1 f_0$.

Le plan de l'exposé est le suivant :

§ 1 : Enoncé du théorème de classification des plongements de V dans l'espace numérique R^m, suivi de quelques applications qui doivent montrer l'intérêt du théorème.

§ 2 : Enoncé du théorème A de classification des plongements de V dans M (qui contient le précédent comme cas particulier) et quelques applications.

§ 3 et § 4 : Grandes lignes de la démonstration du théorème A.

Le théorème A représente l'aboutissement de recherches initiées par VAN KAMPEN [1], WHITNEY [2], WU WEN TSUN [3] et [5] et A. SHAPIRO [4].

1. Plongements de V dans R^m.

1.1. – Δ_V est la diagonale de $V \times V$ et $V \times V - \Delta_V$ est le complémentaire de Δ_V dans $V \times V$. Une application équivariante $F : V \times V - \Delta_V \to S^{m-1}$ est une application continue telle que $F(x, y) = -F(y, x)$, pour $x, y \in V$, $x \neq y$. Une homotopie équivariante est une homotopie qui est une application équivariante pour chaque valeur du paramètre.

THÉORÈME A_o. – L'application associant à tout plongement $f : V \to R^m$ l'application équivariante

$$\bar{f} : V \times V - \Delta_V \to S^{m-1}$$

définie par

$$\bar{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|f(x) - f(y)|}$$

induit une application des classes d'isotopie de plongements de V dans R^m dans les classes d'homotopie équivariante de $V \times V - \Delta_V$ dans S^{m-1}.

Cette application est

a. surjective si $2m \geq 3(n + 1)$,

b. bijective si $2m > 3(n + 1)$.

1.2. Interprétation du théorème. – Soit V^* le carré symétrique réduit de V, c'est-à-dire le quotient de $V \times V - \Delta_V$ par la relation qui identifie (x, y) et (y, x). Le quotient du produit $(V \times V - \Delta_V) \times S^{m-1}$ obtenu en identifiant (x, y, s) et $(y, x, -s)$ est un espace fibré E de fibre S^{m-1}, groupe structural Z_2 et de base V^* ; il est associé au revêtement $V \times V - \Delta_V \to V^*$.

Il est clair que les classes d'homotopie équivariante d'applications de $V \times V - \Delta_V$ dans S^{m-1} correspondent bijectivement aux classes d'homotopie des sections de E.

Dans le domaine stable, le problème de la classification des plongements de V

dans R^m est ainsi ramené à celui de la classification des sections de E, qui est un problème classique d'homotopie. La cohomologie modulo 2 de V^* est calculée dans [8].

1.3. Applications.

a. Invariance topologique de la classification dans le domaine stable.

b. Non-existence de noeuds dans le domaine stable [9]. On remarque que le produit symétrique réduit $(S^n)^*$ de S^n a le même type d'homotopie que l'espace projectif réel P^n, car c'est un rétracte par déformation du produit symétrique réduit de la boule B^{n+1}. Donc toutes les sections de E sont homotopes si $m > n + 1$. D'après le théorème A_o, deux plongements de S^n dans R^m sont toujours isotopes si $2m > 3(n + 1)$.

c. Classification des chaînes (links). Une 2-chaîne dans R^m est un plongement f dans R^m de l'union disjointe $V = S^p \cup S^q$ de deux sphères. Si $m > \max(p, q) + 1$, les classes d'homotopie de sections de E correspondent canoniquement, d'après (b), aux éléments de

$$H^{p+q}(S^p \times S^q, \pi_{p+q}(S^{m-1})) = \pi_{p+q}(S^{m-1}) .$$

Si $2m > 3(\max(p, q) + 1)$, les classes d'isotopie de 2-chaînes dans R^m correspondent aux éléments de $\pi_{p+q}(S^{m-1})$. Interprétation géométrique : si $f : S^p \cup S^q \to R^m$ est un plongement, $f(S^p)$ représente, dans le complémentaire de $f(S^q)$, qui a le type d'homotopie de S^{m-q-1}, un élément $\lambda_{1,2}$ de $\pi_p(S^{m-q-1})$ (les restrictions de dimension signifient que ce groupe est stable) ; par suspension $\lambda_{1,2}$ donne au signe près l'élément de $\pi_{p+q}(S^{m-1})$ qui caractérise la classe de f.

d. La première obstruction. La première obstruction que l'on rencontre pour plonger V dans R^m, c'est-à-dire la première obstruction à la construction d'une section de E, est un élément de $H^m(V^*, Z_{(m)})$, où $Z_{(m)}$ désigne les entiers si m est pair, et les entiers tordus par le revêtement $V \times V - \Delta_V \to V^*$ si m est impair.

Si V est connexe, alors $H^{2n}(V^*, Z) = 0$, car V^* est une variété connexe ouverte de dimension $2n$. Donc toute variété V^n compacte peut être plongée dans R^{2n} (WHITNEY [2]).

On peut montrer en général que la première classe obstruction s'annule si et seulement si $\overline{W}^i = 0$ pour $i \geqslant m - n$, où $\overline{W}^i$ est la i-ième classe de Stiefel-Whitney normale de V (à coefficient entier, entier tordu ou modulo 2 suivant les cas).

D'autre part si V est homologiquement $(k - 1)$-connexe, c'est-à-dire si $\tilde{H}_i(V, Z) = 0$ pour $i < k$, alors $H^j(V^*) = 0$ pour $j > 2n - k$ et tout groupe de coefficients (cf. [10]). On a donc :

THÉORÈME. - Soit V une variété close de dimension n et homologiquement $(k - 1)$-connexe. Si $2(k + 1) < n$, V peut être plongée dans R^{2n-k} si et seulement si $\overline{W}^{n-k} = 0$.

(Un théorème légèrement moins fort est démontré dans [11].)

e. La première classe différence. Si f_0 et f_1 sont deux plongements de V dans R^m, la première obstruction à construire une homotopie, reliant les deux sections de E correspondant à f_0 et f_1, est un élément de $H^{m-1}(V^*, Z_{(m)})$. Donc les classes d'isotopie de plongements dans R^{2n+1} d'une variété V de dimension n, avec r composantes connexes sans bord, correspondent bijectivement aux systèmes de $r(r - 1)/2$ entiers ou entiers modulo 2 qui sont les nombres d'enlacement de ces composantes. En particulier, si V est connexe, tous les plongements de V dans R^{2n+1}, $n > 1$, sont isotopes (WU WEN TSUN [4]).

Lorsque V est une variété close orientable et homologiquement k-connexe, $k > 0$, alors

$$H^{2n-k-1}(V^*, Z_{(q)}) = H^{n-1-k}(V)$$

avec coefficients entiers ou modulo 2 suivant que $n - q$ est impair ou pair. On a donc le

THÉORÈME. - Soit V une variété close orientable, de dimension n et homologiquement k-connexe. Si $2(k + 2) \leqslant n$, les classes d'isotopie de plongements de V dans R^{2n-k} correspondent aux éléments de $H^{n-k-1}(V, Z)$ ou $H^{n-k-1}(V, Z_2)$ suivant que $n - k$ est impair ou pair (cf. [11]).

Soit maintenant V close, connexe et non-orientable, et soit V_0 le complémentaire d'un point. Alors

$$H^{2n-1}(V^*, Z_{(q)}) = H^{n-1}(V_0, Z)/2H^{n-1}(V, Z) \quad \text{ou} \quad H^{n-1}(V_0, Z_2)$$

suivant que $n - q$ est pair ou impair. On a donc

THÉORÈME. - Pour $n \geqslant 4$, les classes d'isotopie des plongements d'une variété close V connexe et non orientable de dimension n dans R^{2n} correspondent aux éléments de $H^{n-1}(V_o, Z)/2H^{n-1}(V, Z)$ ou $H^{n-1}(V_o, Z_2)$ suivant que n est pair ou impair.

Par exemple, pour $n \geqslant 4$, les classes d'isotopie de plongements de l'espace projectif réel P_n dans R^{2n} correspondent aux entiers ou aux entiers modulo 2 suivant que n est pair ou impair.

2. Plongements de V dans une variété M.

2.1. - Soient X et Y des espaces topologiques. Une application continue $F : X \times X \to Y \times Y$ est dite équivariante si elle commute avec les symétries qui échangent les facteurs de X^2 et Y^2. Elle est isovariante si de plus $F^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X$.

THÉORÈME A. - Soient V une variété compacte de dimension n et M une variété de dimension m.

a. Supposons $2m \geqslant 3(n + 1)$. Une application continue $f : V \to M$ est homotope à un plongement f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante

$$H_t : V^2 \to M^2$$

reliant f^2 à une application isovariante H_1. On peut construire f_1 de sorte que f_1^2 et H_1 soient reliés par une homotopie isovariante.

b. Supposons $2m > 3(n + 1)$. Une homotopie f_τ reliant deux plongements f_o et f_1 de V dans M est homotope à une isotopie si et seulement s'il existe une homotopie équivariante

$$H_{\tau,t} : V^2 \to M^2 \quad ,$$

où τ, $t \in [0, 1]$, reliant $f_\tau^2 = H_{\tau,o}$ à une homotopie isovariante $H_{\tau,1}$ (cf. [12]).

(On dit qu'une homotopie $h_{\tau,t}$ relie deux homotopies h_τ et h'_τ si $h_{\tau,o} = h_\tau$, $h_{\tau,1} = h'_\tau$, $h_{o,t} = h_o = h'_o$ et $h_{1,t} = h_1 = h'_1$.)

On peut également formuler un théorème relatif dans le cas où f est déjà un plongement au voisinage d'un fermé $A \subset V$ (cf. [12]).

2.2. Applications.

a. Invariance topologique.

b. Homotopies équivalences. Pour une application continue f de V dans M, $\pi_i(f) = 0$ signifie que f induit un homomorphisme injectif $\pi_{i-1}(V) \to \pi_{i-1}(M)$ et un homomorphisme surjectif $\pi_i(V) \to \pi_i(M)$. On peut démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION. - Soit f une application de la variété close V dans M telle que $\pi_i(f) = 0$ pour $i \leq 2n - m + 1$. Si $m > n$, il existe une homotopie équivariante reliant f^2 à une application isovariante de V^2 dans M^2.

Comme corollaire de cette proposition et du théorème A (cf. [9]) :

THÉORÈME. - Soient V une variété close et $f : V \to M$.

1° Si $2m \geq 3(n + 1)$ et si $\pi_i(f) = 0$ pour $i \leq 2n - m + 1$, alors f est homotope à un plongement.

De la proposition analogue pour les isotopies et du théorème A (b), il résulte :

2° Si $2m > 3(n + 1)$ et si $\pi_i(f) = 0$ pour $i \leq 2n - m + 2$, deux plongements f_0 et f_1 de V dans M homotopes à f sont isotopes.

c. Cas où M est $(2n - m + 1)$-connexe (c'est-à-dire où $\pi_i(M) = 0$ pour $i \leq 2n - m + 1$). On a alors une théorie des obstructions analogue à celle du paragraphe 1.

Soit $T_0(\Delta_M)$ l'espace obtenu en identifiant en un point le complémentaire dans $M \times M$ d'un voisinage tubulaire symétrique de Δ_M ; la fibre de ce voisinage tubulaire devient alors une sphère $S^m \subset T_0(\Delta_M)$. L'involution qui échange les facteurs de $M \times M$ induit une involution sur $T_0(\Delta_M)$. Toute application continue $f : V \to M$ définit une application équivariante de $V \times V - \Delta_V$ dans $T_0(\Delta_M)$ obtenue en composant f^2 (restreinte à $V \times V - \Delta_V$) avec la projection naturelle de $M \times M$ sur $T_0(\Delta_M)$. Si M est $(2n - m + 1)$-connexe, cette application est homotope d'une manière équivariante à une application de $V \times V - \Delta_V$ dans $S^m \subset T_0(\Delta_M)$, dont la classe d'homotopie équivariante est bien déterminée. A cette application correspond, comme plus haut, une section s_f du fibré $\hat{E}$ qui est la suspension du fibré E défini en 1.2. Le fibré $\hat{E}$ a pour base V^* et pour fibre S^m ; son groupe structural est engendré par l'application linéaire de S^m laissant fixe pôle nord et pôle sud et se réduisant à la transformation antipodique sur l'équateur. La classe d'homotopie de s_f ne dépend que de celle de f. Le fibré $\hat{E}$ possède une section canonique s_0 associant à chaque point le pôle nord de la fibre S^m au-dessus de ce point.

On peut démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. - Soit f une application continue de V dans M ; supposons que M est $(2n - m + 1)$-connexe et que $m > n + 1$. Alors f^2 est relié par une homotopie équivariante à une application isovariante si et seulement si les sections s_f et s_o de $\hat{E}$ sont homotopes.

Il en résulte, en vertu du théorème A (a) :

THÉORÈME. - Soit $f : V \to M$ où V est compacte et M est $(2n - m + 1)$-connexe. Supposons $2m \geqslant 3(n + 1)$. Alors f est homotope à un plongement si et seulement si les sections s_f et s_o de $\hat{E}$ sont homotopes.

On est donc ramené dans ce cas à un problème classique d'obstructions. Voici d'ailleurs comment on peut voir géométriquement l'obstruction. Soient f et g des plongements de deux disques D^p et D^q dans M tels que

$$f(\partial D^p) \cap g(D^q) = f(D^p) \cap g(\partial D^q) = \emptyset \quad .$$

On peut supposer que $f(D^p)$ et $f(D^q)$ se coupent transversalement. Leur intersection est alors une sous-variété W de $f(D^p)$ munie d'un champ de $(m - q)$-repères normaux F , obtenu en prenant la restriction à W d'un champ de repères normaux à $g(D^q)$ (qui sont alors tangents à $f(D^p)$ moyennant des identifications évidentes). La construction de Pontrjagin-Thom appliquée à la sous-variété W munie du champ F détermine un élément de $\pi_p(S^{m-q})$, qui sera appelé le coefficient d'intersection $i(f , g)$ de f et g . De même $i(g , f)$ est un élément de $\pi_q(S^{m-p})$; les suspensions stables de ces éléments sont égales au signe près. Si M est $(p + q - m + 1)$-connexe et si $2m \geqslant \max(p , q) + p + q + 3$, la nullité de $i(f , g)$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une isotopie f_t de f , fixe sur D^p , telle que

$$f_t(D^p) \cap g(\partial D^q) = \emptyset$$

et que

$$f_1(D^p) \cap g(D^q) = \emptyset$$

On pourrait aussi formuler un théorème analogue concernant les isotopies.

Comme application du théorème précédent, considérons une variété close V homologiquement $(k-1)$-connexe et soit $f : V \to M$, où M est une variété de dimension $2n-k$ et $(n-k+1)$-connexe. Alors pour que f soit homotope à un plongement, il faut et il suffit que la première obstruction à déformer s_f en s_o soit nulle. Si $\overline{W}_f^{n-k}$ est la classe de Stiefel-Whitney du fibré $TV - TM$ (fibré normal à f) et si $f^* \Delta f_* V$ est l'image par $f^* : H^*(M) \to H^*(V)$ de la classe duale à la classe d'homologie de M représentée par fV, cette obstruction s'annule si et seulement si

$$\overline{W}_f^{n-k} - f^* \Delta f_* V = 0 \qquad ,$$

tout au moins si $n-k$ est impair.

3. Démonstration du théorème A.

Le théorème suivant est un des deux pas essentiels de la démonstration du théorème A ; il sera démontré au paragraphe 4.

3.1. Enoncé du théorème B. - Une immersion f de V dans M est une application dont le rang est partout égal à la dimension de V. Deux immersions f_o, $f_1 : V \to M$ sont régulièrement homotopes s'il existe une homotopie f_τ (appelée homotopie régulière) reliant f_o et f_1 et qui est une immersion pour chaque valeur de τ. Remarquons que si f_τ est une immersion, alors Δ_V est un ouvert dans $(f^2)^{-1} \Delta_M$.

THÉORÈME B.

a. Supposons $2m \geq 3(n+1)$. Une immersion $f : V \to M$ est régulièrement homotope à un plongement f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante $H_t : V^2 \to M^2$ reliant f^2 à une application isovariante H_1 et telle que Δ_V soit ouvert dans $H_t^{-1}(\Delta_M)$ pour tout t. On peut construire f_1 de sorte que f_1^2 et H_1 soient reliés par une homotopie **isovariante**.

b. Supposons $2m > 3(n+1)$. Une homotopie régulière f_τ reliant deux plongements de V dans M est régulièrement homotope à une isotopie si et seulement s'il existe une homotopie équivariante $H_{\tau,t} : V^2 \to M^2$ reliant $f_\tau^2 = H_{\tau,o}$ à une homotopie isovariante $H_{\tau,1}$ et telle que Δ_V soit ouvert dans $H_{\tau,t}^{-1}(\Delta_M)$ pour tout τ, t.

3.2. Immersions dans le domaine stable (cf. [10]).

Notations : TV (resp. TM) est le fibré tangent à V (resp. M).

L(TV , TM) = ensemble des représentations linéaires injectives de TV dans TM , c'est-à-dire des représentations fibrées dont la restriction à chaque fibre est une application linéaire injective.

I(TV , TM) = ensemble des représentations isovariantes de TV dans TM , c'est-à-dire des représentations fibrées dont la restriction à chaque fibre est une application φ de R^n dans R^m telle que $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ et $\varphi^{-1}(0) = 0$.

$I(\Delta_V , \Delta_M)$ = ensemble des applications isovariantes de voisinages de $\Delta_V \subset V \times V$ dans $M \times M$, deux applications étant considérées comme équivalentes si elles coïncident sur un voisinage assez petit de Δ_V.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\text{Immersions différentiables de } V \text{ dans } M \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i"] & L(TV , TM) \arrow[dr, "j"] \arrow[d, "\theta"] & \\
\text{Immersions topologiques de } V \text{ dans } M \arrow[r, "\delta"] & I(\Delta_V , \Delta_M) & I(TV , TM) \arrow[l, "\Theta"]
\end{tikzcd}$$

où d associe à toute immersion f sa différentielle df et δ le germe le long de Δ_V de l'application f^2 ; i et j sont des inclusions évidentes. Θ est défini comme suit. Munissons V et M de métriques riemanniennes complètes ; l'application $\exp : TV \to V$, associant à tout vecteur tangent X à V en x l'extrémité de la géodésique de longueur $|X|$ et tangente à X en son origine, est bien définie. Soit $e_V : TV \to V \times V$ l'application définie par

$$e_V(X) = (\exp X , \exp - X) \qquad ;$$

sa restriction à un voisinage de la section nulle de TV est un difféomorphisme sur un voisinage de Δ_V. On définit de même $e_M : TM \to M \times M$. Alors si $\psi \in I(TV , TM)$, on définit $\Theta(\psi) = e_M \psi e_V^{-1}$ et θ comme la restriction de Θ.

THÉORÈME. - <u>En passant aux classes d'homotopie dans le diagramme précédent, on a</u> $\delta i = \Theta d$ <u>et</u>

δi est bijectif pour $2m > 3n + 1$

δi est surjectif pour $2m \geq 3n + 1$.

(Dans cet énoncé, il s'agit évidemment de classes d'homotopie régulières, linéaires injectives et isovariantes respectivement. Deux immersions topologiques f_o et f_1 sont régulièrement homotopes s'il existe une homotopie continue f_t telle que $F(x, t) = (f_t(x), t)$ soit une immersion topologique de $V \times I$ dans $M \times I$.)

Ce théorème résulte des trois faits suivants :

a. Θ est toujours bijectif (c'est un exercice de géométrie différentielle).

b. j est surjectif pour $2m \geq 3n + 1$ et bijectif pour $2m > 3n + 1$; c'est un théorème de pure topologie algébrique dont la démonstration utilise essentiellement le théorème de suspension de Freudenthal (cf. [10]).

c. d est bijectif si $m > n$; c'est l'énoncé du théorème de classification des immersions de Smale-Hirsch (cf. [7]).

3.3. Le théorème B entraîne le théorème A. - Plaçons-nous en effet dans les hypothèses du théorème A (a). D'après 3.2, on peut supposer que f est déjà une immersion et qu'il existe une homotopie isovariante $H_t^\delta : T_\delta \to M \times M$ d'un petit voisinage tubulaire T_δ de Δ_V de rayon δ, reliant les restrictions de f^2 et H_1 à T_δ. On définit alors une nouvelle homotopie équivariante H_t' vérifiant les hypothèses de B (a) en posant :

$$H_t' = \begin{cases} H_t^\delta & \text{sur un voisinage tubulaire } T_{\delta/2} \text{ de rayon } \delta/2 \\ H_t & \text{en dehors de } T_\delta \end{cases}$$

et en prolongeant cette homotopie équivariante comme on veut sur $T_\delta - T_{\delta/2}$ de sorte que $H_o' = f^2$ et $H_1' = H_1$.

On procède de même pour montrer que B (b) entraîne A (b).

4. Démonstration du théorème B.

Nous ferons la démonstration dans le cas où le bord de B est vide. Le cas général s'en déduit facilement (cf. [12]).

4.1. Construction d'un modèle typique de déformation éliminant les points doubles. - Nous allons construire des variétés L et L', une immersion $\Phi_o : L \to L'$ et une homotopie régulière $\Phi_t : L \to L'$ telle que Φ_1 soit un plongement et que Φ_t soit fixe en dehors d'un compact de L.

Nous partons des trois éléments suivants :

i. Une variété compacte D munie d'une involution J sans point fixe.

ii. Une fonction λ sur D, invariante par J, prenant ses valeurs dans $[-1, +1[$, telle que $\lambda^{-1}(-1) = \partial D =$ bord de D et que $d\lambda \neq 0$ sur $\lambda^{-1}(0)$.

iii. Un fibré vectoriel L de base D.

Soit I l'intervalle $[-1, +1]$ et soit D' le quotient de $D \times I$ obtenu en identifiant les points (d, t) et $(Jd, -t)$; c'est un fibré de fibre I et de base D/J, le quotient de D par l'action de J.

L' sera un fibré vectoriel de base D' construit de la manière suivante. Soit $\tilde{L}$ le fibré de base $D \times I$ image réciproque du fibré $L \times L$ par l'application $(d, t) \to (d, Jd)$ de $D \times I$ dans $D \times D$; ses points sont les triples (ℓ_d, ℓ_{Jd}, t), où ℓ_d appartient à la fibre L_d de L au-dessus de d et $\ell_{Jd} \in L_{Jd}$. Le fibré L' est défini comme quotient de $\tilde{L}$ en identifiant (ℓ_d, ℓ_{Jd}, t) et $(-\ell_{Jd}, -\ell_d, -t)$. On désignera par $[d, t]$ et $[\ell_d, \ell_{Jd}, t]$ les points de D' et L' qui sont les classes de (d, t) et (ℓ_d, ℓ_{Jd}, t) respectivement.

Définissons une immersion φ_o de D dans D' en posant $\varphi_o(d) = [d, \lambda(d)]$. Après avoir identifié D et D' aux sections nulles de L et L', φ_o peut se prolonger suivant une immersion Φ_o de L dans L' définie par

$$\Phi_o(\ell_d) = [\ell_d, 0, \lambda(d)] \qquad .$$

Les paires de points doubles de Φ_o sont les paires de points, se correspondant par J, de la sous-variété $D_o = \lambda^{-1}(0) \subset D \subset L$. Les deux nappes de $\Phi_o(L)$ se coupent en position générale le long de $\Phi_o(D_o)$.

Il est facile de construire une déformation φ_t de φ_o de la forme $\varphi_t(d) = [d, \psi(t, d)]$ de sorte que φ_1 soit un plongement et que φ_t soit indépendant de t au voisinage du bord de D.

On définit alors une homotopie régulière Φ_t ayant les propriétés requises en posant :

$$\Phi_t(\ell_d) = [\ell_d \, , \, 0 \, , \, \psi(\alpha|\ell_d| \, t \, , \, d)]$$

où $|\ell_d|$ désigne la norme de ℓ_d et où α est une fonction paire d'une variable réelle x, égale à 1 pour $x = 0$ et à 0 pour $|x| \geqslant \varepsilon > 0$.

4.2. Choix du modèle. - Dans les hypothèses du théorème B (a), nous pouvons supposer que f est une immersion en position générale, c'est-à-dire que $f^2 : V^2 \to M^2$ est transversa à Δ_M en dehors de Δ_V, et que f n'a pas de point triple (ce qui est possible si $2m > 3n$). Nous pouvons aussi supposer que l'homotopie équivariante H_t est définie pour $t \in I = (-1 \, , +1)$ et qu'elle vérifie de plus les trois conditions suivantes :

1. L'application $H : V^2 \times I \to M^2$ définie par $H(v_1 \, , v_2 \, , t) = H_t(v_1 \, , v_2)$ est transversale à Δ_M en dehors de $\Delta_V \times I$. Alors

$$\Delta = H^{-1}(\Delta_M) - \Delta_V \times I$$

est une sous-variété fermée de $V \times V \times I$.

2. Soient p_1 et p_2 les projections de $V \times V \times I$ sur le premier et le second facteur respectivement. On exige que $\underline{p}_1$ = restriction de p_1 à Δ soit un plongement de Δ dans V.

3. La restriction à Δ de la projection t de $V \times V \times I$ sur I est une fonction qui n'a pas 0 comme valeur critique.

Pour que la condition (2) soit réalisable, on suppose $2 \dim \Delta < \dim V$ (c'est-à-dire $2m \geqslant 3(n+1)$) et l'on applique le théorème de plongement de Whitney (avec des modifications convenables).

On réalise (1) et (3) en appliquant essentiellement le théorème de transversalité de Thom ; aucune restriction de dimension n'est ici nécessaire.

Nous construisons alors le modèle $\Phi_0 : L \to L'$ comme dans 4.1 en utilisant les trois éléments suivants :

i. La variété $D = p_1 \Delta = p_2 \Delta$ munie de l'involution $J = p_2 \, \underline{p}_1^{-1}$;

ii. La fonction λ sur D, composé de $\underline{p}_1^{-1}$ avec la projection t ;

iii. Le fibré $L =$ le fibré normal à la sous-variété D dans V.

4.3. Identification avec le modèle. - Nous voulons construire des difféomorphismes

$$\Psi : L \to V \quad \text{et} \quad \Psi : L' \to M$$

sur des ouverts de V et M respectivement de sorte que

a. $f\Psi = \Psi' \Phi_o$,

b. $f^{-1} \Psi'(L') = \Psi L$.

Il suffira alors de poser

$$f_t(v) = \begin{cases} \Psi' \Phi_t \Psi^{-1}(v) & \text{pour } v \in \Psi(L) \\ f(v) & \text{pour } v \notin \Psi(L) \end{cases}$$

pour obtenir une homotopie régulière f_t déformant f en un plongement.

La construction de Ψ et Ψ' est la partie la plus délicate de la démonstration qui se fait en trois étapes.

Première étape. On construit des plongements

$$\psi : D \to V \quad \text{et} \quad \psi' : D' \to M$$

tels que

a_o. $f\psi = \psi' \varphi_o$,

b_o. $f^{-1} \psi' D' = \psi D$,

c_o. $\psi'(D')$ est transverse à fV le long de fD .

On définit naturellement ψ comme l'inclusion de D dans V ; alors ψ'_o = restriction de ψ' à $\varphi_o(D)$ est définie d'après (a_o). On peut étendre ψ'_o suivant une application continue $\overline{\psi}'$ définie sur l'ensemble A des points de D' de la forme $[d , t]$, avec t compris entre 0 et $\lambda(d)$, en posant

$$\overline{\psi}'[d , t] = q_1 H(d , Jd , \lambda(d) - t) ,$$

où q_1 est la projection de $M \times M$ sur le premier facteur ; enfin $\overline{\psi}'$ peut s'étendre à D' , car D' peut se rétracter sur A .

On modifie ensuite légèrement $\bar{\psi}'$ pour obtenir une extension ψ' de ψ'_o qui est un plongement vérifiant (c_o) (on utilise ici $\dim D < m - n$, c'est-à-dire $2m \geqslant 3n + 2$) et aussi (b_o) ; pour réaliser cette dernière condition, on doit supposer $\dim D' + \dim fV < \dim M$, c'est-à-dire la condition limite $2m \geqslant 3(n + 1)$.

Deuxième étape. On construit des représentations injectives d'espaces fibrés

$$\dot{\psi} : L \to TV \quad \text{et} \quad \dot{\psi}' : L' \to TM$$

qui prolongent ψ et ψ' , telles que

$$df\dot{\psi} = \dot{\psi}' \Phi_o$$

$\dot{\psi}(L)$ et $\dot{\psi}'(L')$ étant des sous-fibrés de TV et TM respectivement complémentaires à TD et à $T(\psi' D')$.

De nouveau $\dot{\psi}$ sera simplement un relèvement dans TV de $L =$ fibré normal à D dans V . Ceci définit $\dot{\psi}'$ sur $\Phi_o L$. La construction de l'extension de $\dot{\psi}'$ à L' est trop longue pour être donnée ici. On utilise encore les propriétés de H au voisinage de Δ ; on rencontre des obstructions à valeur dans les i-ièmes groupes d'homotopie de la variété de Stiefel des $(n - \dim D)$-repères dans un espace de dimension égale à $m - \dim D'$; ces groupes sont tous nuls si et seulement si $2m \geqslant 3n + 3$, ce qui est de nouveau la condition limite.

Troisième étape. On construit Ψ et Ψ' de sorte que Ψ soit tangent à $\dot{\psi}$ le long de D et Ψ' tangent à $\dot{\psi}'$ le long de D' . Pas de difficulté particulière ici.

4.4. Le cas des isotopies (théorème B (b)). - Il se traite d'une manière tout à fait analogue avec quelques difficultés supplémentaires. On remplace V par $V \times [0 , 1]$, M par $M \times [0 , 1]$ et f par $F : V \times [0 , 1] \to M \times [0 , 1]$ définie par $F(v , t) = f_t(v)$. Les inégalités sur les dimensions deviennent $2(m + 1) \geqslant 3(n + 2)$, c'est-à-dire $2m \geqslant 3(n + 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] VAN KAMPEN (E. R.). - Komplexe in euklidischen Raümen, Abh. math. Sem. Hamb. Univ., t. 9, 1932, p. 72-78 et 152-153.

[2] WHITNEY (Hassler). - The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space, Annals of Math., Series 2, t. 45, 1944, p. 220-246.

[3] WU WEN-TSUN. - On the realization of complexes in euclidean spaces, I. Acta Math. Sinica, t. 5, 1955, p. 505-552 [en chinois], Sc. Sinica, t. 7, 1958, p. 251-297 [en anglais] ; II. Acta Math. Sinica, t. 7, 1957, p. 79-101 [en chinois] ; III. Acta Math. Sinica, t. 8, 1958, p. 79-94 [en chinois], Sc. Sinica, t. 8, 1959, p. 133-150 [en anglais].

[4] SHAPIRO (Arnold). - Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space, I : The first obstruction, Annals of Math., Series 2, t. 66, 1957, p. 256-269.

[5] WU WEN-TSUN. - On the isotopy of C^r-manifolds of dimension n in euclidean (2n + 1)-space, Science Record, N. S., t. 2, 1958, p. 271-275.

[6] THOM (René). - La classification des immersions d'après Smale, Séminaire Bourbaki, t. 10, 1957/58, n° 157, 11 p.

[7] HIRSCH (Morris W.). - Immersions of manifolds, Trans. Amer. math. Soc., t. 93, 1959, p. 242-276.

[8] HAEFLIGER (André). - Points multiples d'une application et produit cyclique réduit, Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 57-70.

[9] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helvet., t. 36, 1961, p. 47-82.

[10] HAEFLIGER (A.) and HIRSCH (M. W.). - Immersions in the stable range, Annals of Math., Series 2, t. 75, 1962, p. 231-241.

[11] HAEFLIGER (A.) and HIRSCH (M. W.). - On the existence and classification of differentiable embeddings, Topology (à paraître).

[12] HAEFLIGER (André). - Plongements différentiables dans le domaine stable, Comment. Math. Helvet. (à paraître).