Roger Godement

La formule des traces de Selberg considérée comme source de problèmes mathématiques

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 244, p. 53-62
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__53_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 244

Décembre 1962

LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG
considérée comme source de problèmes mathématiques

par Roger GODEMENT

1. Une formule des traces "abstraite".

Soit $x \mapsto U(x)$ une représentation unitaire d'un groupe localement compact G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Une classe $\mathfrak{Q}$ de représentations unitaires irréductibles de G sera appelée une composante discrète de U s'il existe un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$, invariant par U, et dans lequel U induit une représentation irréductible de classe $\mathfrak{Q}$. Notant alors $\mathcal{H}(\mathfrak{Q})$ le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ engendré par les sous-espaces vérifiant cette condition, on voit que U induit dans $\mathcal{H}(\mathfrak{Q})$ une représentation unitaire qui est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles de classe $\mathfrak{Q}$, en nombre $(U : \mathfrak{Q})$ fini ou non. Bien entendu, $\mathcal{H}$ n'est pas en général somme directe hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{H}(\mathfrak{Q})$ - il y a un "spectre continu".

Considérons maintenant une fonction $f \in L^1(G)$ telle que l'opérateur

$$U(f) = \int_G U(x) \ f(x) \ dx$$

soit de Hilbert-Schmidt ; on a alors

$$U(f)^* \ U(f) = \sum \lambda_i . E(\lambda_i)$$

où les $E(\lambda_i)$ sont des opérateurs de projection associés à des sous-espaces $\mathcal{S}_i$ deux à deux orthogonaux et de dimension finie, et les λ_i des nombres positifs tels que

$$\sum \lambda_i . \dim(\mathcal{S}_i) = \mathrm{Tr}(U(f)^* \ U(f)) < +\infty \quad .$$

Soit $\mathcal{H}_i$ le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{S}_i$ et invariant par U ; si un opérateur continu T dans $\mathcal{H}_i$ commute aux $U(x)$ dans $\mathcal{H}_i$, alors il commute à $U(f)^* \ U(f)$ donc à $E(\lambda_i)$, donc laisse stable $\mathcal{S}_i$, et comme $\mathcal{S}_i$ est de dimension finie on voit que, dans le sous-espace invariant $\mathcal{H}_i$, le commutant de la représentation U est une algèbre de dimension finie ; on en déduit, par des raisonnements évidents, que la représentation de G dans $\mathcal{H}_i$ est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles en nombre fini. En recollant ensemble les décompositions des divers $\mathcal{H}_i$, on parvient donc finalement au résultat suivant (on choisit, pour chaque classe ω de représentations unitaires irréductibles de G, une réalisation qu'on note $x \rightarrowtail \omega(x)$, et on pose

$$\hat{f}(\omega) = \int_G f(x)\, \omega(x)\, dx$$

pour toute fonction f intégrable sur G) : <u>si l'opérateur</u> $U(f)$ <u>est de Hilbert-Schmidt dans</u> $\mathcal{H}$ <u>alors</u> $\hat{f}(\omega)$ <u>est de Hilbert-Schmidt pour toute composante discrète de</u> U, <u>et même nul si</u> $(U : \omega) = +\infty$; <u>en outre, on a la formule</u>

$$\mathrm{Tr}[U(f)^* U(f)] = \sum_{(U:\omega)\,\mathrm{fini}} (U : \omega).\mathrm{Tr}[\hat{f}(\omega)^* \hat{f}(\omega)] \quad .$$

On pourrait d'ailleurs ajouter qu'on a aussi $\hat{f}(\omega) = 0$ pour toutes (ou presque toutes) les représentations irréductibles qui appartiennent au spectre continu de U, mais on n'aura pas besoin de ce résultat ici : il suffit de savoir que $U(f)$ est nul sur le sous-espace orthogonal aux composantes discrètes de multiplicité finie de U.

Ceci montre du reste que, si $U(f)$ est de Hilbert-Schmidt pour "suffisamment" de fonctions $f \in L^1(G)$ (par exemple pour les fonctions continues à support compact), la représentation U est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles, chacune intervenant avec une multiplicité finie.

2. <u>Cas de l'espace</u> $L^2(\Gamma\backslash G)$.

Soit Γ un sous-espace discret de G, et prenons pour $\mathcal{H}$ l'espace $L^2(\Gamma\backslash G)$ des fonctions $\varphi(x)$, $x \in G$, telles que

$$\varphi(\gamma x) = \varphi(x) \ , \quad \int_{\Gamma\backslash G} |\varphi(x)|^2\, dx < +\infty \quad ;$$

on a une représentation unitaire U de G dans $\mathcal{H}$ en prenant pour $U(x)$ l'opérateur qui transforme chaque fonction $\varphi(g)$ en la fonction $\varphi(gx)$. Si $f \in L^1(G)$, l'opérateur $U(f)$ correspondant est donné par

$$U(f)\,\varphi(x) = \int_G \varphi(xy)\, f(y)\, dy = \int_G \varphi(y)\, f(x^{-1}y)\, dy = \int_{\Gamma\backslash G} N_f(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

où le noyau N_f est donné par la formule

$$N_f(x, y) = \sum f(x^{-1}\gamma y) \quad ,$$

la série étant absolument convergente pour presque tout couple (x , y) . Pour que $U(f)$ soit de Hilbert-Schmidt, il suffit que N_f soit de carré sommable sur le produit de $\Gamma\backslash G$ par lui-même ; c'est le cas par exemple si $\Gamma\backslash G$ est compact et f continue à support compact, car alors N_f est continu (ceci montre en passant que, si $\Gamma\backslash G$ est compact, la représentation considérée de G dans $L^2(\Gamma\backslash G)$ est somme directe hilbertienne de représentations irréductibles répétées un nombre fini de fois seulement ; ce raisonnement suppose Γ fermé et à quotient compact, mais n'utilise pas l'hypothèse que Γ est discret) ; c'est aussi le cas si $\Gamma\backslash G$ est de volume fini et $N_f(x , y)$ borné sur $G \times G$ par exemple.

Supposons donc le noyau N_f de carré sommable sur $(\Gamma\backslash G) \times (\Gamma\backslash G)$, et introduisons la fonction

$$g(x) = f \star \tilde{f}(x) = \int_G f(xy)\, \overline{f(y)}\, dy \qquad ;$$

on a

$$U(g) = U(f)\, U(f)^* \,, \qquad N_g(x , y) = \int_G N_f(x , z)\, \overline{N_f(y , z)}\, dz$$

et par suite

$$\sum (U : \omega)\ \mathrm{Tr}[\hat{f}(\omega)\ \hat{f}(\omega)^*] = \int |N_f(x , y)|^2\, dx\, dy = \int N_g(x , x)\, dx$$

$$= \int_{\Gamma\backslash G} dx \sum g(x^{-1}\, \gamma\, x) \qquad ;$$

pour évaluer cette dernière expression, on introduit, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, le centralisateur Γ_γ de γ dans Γ , la classe (γ) de γ modulo les automorphismes intérieurs de Γ , et enfin le centralisateur G_γ de γ dans G ; il vient alors tout d'abord

$$\int_{\Gamma\backslash G} dx \sum_{\gamma} g(x^{-1}\, \gamma\, x) = \int_{\Gamma\backslash G} dx \sum_{(\gamma)} \sum_{\Gamma_\gamma \gamma'} g(x^{-1}\, \gamma'^{-1}\, \gamma\gamma'\, x)$$

$$= \sum_{(\gamma)} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} g(x^{-1}\, \gamma\, x)\, dx \qquad ;$$

or, pour γ donné, la fonction $g(x^{-1}\, \gamma\, x)$ est constante sur les classes $G_\gamma \cdot x$; si l'intégrale

$$\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} g(x^{-1}\, \gamma\, x)\, dx$$

converge absolument et n'est pas nulle, on en déduit qu'il existe sur l'espace homogène $G_\gamma\backslash G$ une mesure invariante, que $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ est de volume fini, et enfin que

$$\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} g(x^{-1}\,\gamma\,x)\;dx = v(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\int_{G_\gamma\backslash G} g(x^{-1}\,\gamma\,x)\;dx$$

où le second membre est calculé à l'aide d'une mesure invariante sur $G_\gamma\backslash G$.

Les calculs précédents (interversions de signes $\int$ et Σ) sont toujours justifiés si $\Gamma\backslash G$ est compact ; du reste, dans ce cas, il est facile de voir que $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ est compact pour tout γ, en sorte que $G_\gamma\backslash G$ admet une mesure invariante pour tout γ ; la formule de Selberg prend alors la forme

$$\Sigma\,(U : \omega)\;\mathrm{Tr}[\hat{g}(\omega)] = \mathrm{Tr}[U(g)] = \Sigma\, v(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\cdot\int_{G_\gamma\backslash G} g(x^{-1}\,\gamma\,x)\;dx \qquad .$$

Par contre, si $\Gamma\backslash G$ est de volume fini mais non compact, l'hypothèse que le noyau N_f est de Hilbert-Schmidt (par exemple borné sur $G \times G$) ne suffit pas à justifier les calculs précédents ; on pourrait évidemment supposer la série $\Sigma\, g(x^{-1}\,\gamma\,x)$ normalement convergente sur G – mais cette hypothèse n'a <u>aucune chance</u> d'être vérifiée (prendre γ unipotent ; les conjugués $x^{-1}\,\gamma\,x$ s'accumulent sur l'élément neutre, en sorte que

$$\sup_{x\in G}\,|g(x^{-1}\,\gamma\,x)| = g(e) \qquad ,$$

hélas!). Dans le cas du noyau de Bergman, qui sera utilisé au n° 4, il semble, si l'on en croit les vagues allusions publiées par SELBERG, que l'on puisse se tirer d'affaire en groupant les termes $g(x^{-1}\,\gamma\,x)$ pour lesquels le centralisateur Γ_γ (ou G_γ) est donné, ce qui peut en effet se vérifier dans le cas du demi-plan de Poincaré. L'expérience montre toutefois que le passage du groupe modulaire au cas général (groupes définis arithmétiquement) n'est pas sans présenter certaines difficultés. Comme les résultats récents de BOREL permettent, dans le cas général, d'avoir une idée très précise sur la forme du domaine fondamental (et de compactifier celui-ci), on peut espérer y voir bientôt plus clair.

3. Fonctions noyaux des espaces symétriques complexes.

Prenons pour G un groupe de Lie semi-simple et supposons que, K étant un sous-groupe compact maximal de G, l'espace symétrique G/K admette une structure complexe invariante par G. Soit ρ une représentation de K dans un espace vectoriel complexe de dimension finie F ; regardant G comme un fibré principal de base G/K et de groupe K, et faisant opérer K sur F par ρ, on en déduit sur G/K un fibré vectoriel associé E_ρ, sur lequel G opère à gauche ; ce fibré est lui aussi muni naturellement d'une structure complexe invariante par G. Si G est simple, on sait que $rg(K) = rg(G)$ et que le centre de K est de dimension 1 ; en notant $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K, et $\mathfrak{g}^C$ et $\mathfrak{k}^C$ leurs complexifications, il existe alors dans le centre de $\mathfrak{k}$ un et un seul opérateur W tel que $Ad(W)$ ait pour seules valeurs propres 0, i et $-i$; notant p^+ le sous-espace de $\mathfrak{g}^C$ correspondant à la valeur propre $+i$, et p^- celui qui correspond à $-i$, on a

$$\mathfrak{g}^C = p^- \oplus \mathfrak{k}^C \oplus p^+ \quad ,$$

et les relations

$$[p^+ , p^+] = 0 \;, \quad [\mathfrak{k}^C , p^+] \subset p^+ \;, \quad [p^- , p^+] \subset \mathfrak{k}^C \quad ,$$

etc. Soit G^C le groupe complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^C$, et supposons que G soit le sous-groupe de G^C correspondant à $\mathfrak{g}$ (on exclut donc de la théorie les "formes automorphes de poids non entier", mais c'est uniquement pour simplifier l'exposé) ; soient K^C, P^- et P^+ les sous-groupes (complexes) de G^C engendrés par $\mathfrak{g}^C$, p^- et p^+ ; les deux derniers sont donc invariants par le premier, et $G.K^C.P^-$ est un ouvert de $P^+.K^C.P^-$, lequel est lui-même ouvert dans G^C, et on a $G.K^C.P^- \cap K^C.P^- = K$, en sorte que $G/K \cong G.K^C.P^-/K^C.P^-$, ce qui met en évidence la structure complexe de G/K, et plus généralement des fibrés E_ρ. Les sections holomorphes de E_ρ correspondent alors aux applications <u>holomorphes</u>

$$\varphi : \quad G.K^C.P^- \to F$$

vérifiant

$$\varphi(gkp) = \rho(k)^{-1}\, \varphi(g) \quad \text{pour} \quad g \in G \;, \quad k \in K^C \;, \quad p \in P^- \quad .$$

On notera $\mathcal{H}^2(\rho)$ l'espace de Hilbert (complet, car il s'agit de fonctions holomorphes) formé des fonctions φ qui vérifient en outre

$$\int_G \|\varphi(g)\|^2 \, dg < +\infty$$

(sections holomorphes de carré intégrable du fibré E_ρ) ; on a $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$ pourvu que ρ vérifie des conditions qu'on doit à HARISH-CHANDRA (*) : on choisit une

(*) Amer. J. of Math., 1955, p. 743-777 et 1956, p. 1-41 et 564-628.

sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{k}$ (donc de $\mathfrak{g}$), on ordonne les racines de $\mathfrak{g}^{\underset{\sim}{C}}$ par rapport à $\mathfrak{h}^{\underset{\sim}{C}}$ de telle sorte que celles se trouvant dans $\mathfrak{p}^{+}$ soient positives, on désigne par α_0 , α_1 , ... , α_r les racines positives simples en convenant (ce qui est permis) que α_0 est dans $\mathfrak{p}^{+}$ et les autres α_i dans $\mathfrak{k}^{\underset{\sim}{C}}$, on introduit les $H_i \in \mathfrak{k}^{\underset{\sim}{C}}$ correspondants, et enfin on désigne par Λ_ρ le poids dominant de ρ (qui est donc une forme linéaire sur $\mathfrak{h}^{\underset{\sim}{C}}$) ; ceci fait, pour que $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, il faut et il suffit que d'une part les $\Lambda_\rho(H_i)$ soient des entiers <u>positifs</u> pour $1 \leqslant i \leqslant r$, et d'autre part que $\Lambda_\rho(H_0)$ soit un entier <u>négatif</u> assez grand (on trouvera la borne exacte dans Harish-Chandra) résultat à rapprocher du fait qu'une forme linéaire Λ sur $\mathfrak{h}^{\underset{\sim}{C}}$ est le poids dominant d'une représentation de dimension finie de $G^{\underset{\sim}{C}}$ si tous les $\Lambda(H_i)$, y compris $\Lambda(H_0)$, sont des entiers positifs.

Si $\mathcal{H}^2(\rho) \neq 0$, et si l'on fait opérer G sur $\mathcal{H}^2(\rho)$ par les translations à gauche, on obtient une représentation unitaire $\mathfrak{Q}_\rho$ de G ; celle-ci est irréductible (voir ci-dessous) et c'est donc (puisque $\mathcal{H}^2(\rho) \subset L^2(G)$) une composante discrète de la représentation régulière de G .

Noter que l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(\rho)$, formé de fonctions holomorphes, admet une "fonction noyau" ; cette fonction $K_\rho(x , y)$ est définie pour x , $y \in G.K^{\underset{\sim}{C}}.P^-$, à valeurs dans l'espace des endomorphismes de l'espace F de ρ , holomorphe en x , hermitienne

$$K_\rho(x , y)^* = K_\rho(y , x)$$

(pour définir le $*$ on choisit sur F un produit scalaire invariant par K), de carré sommable sur G , vérifie

$$K_\rho(xkp , y) = \rho(k)^{-1} K_\rho(x , y) \qquad (k \in K^{\underset{\sim}{C}} , \ p \in P^-) \qquad ,$$

et enfin est telle que l'on ait

$$\varphi(x) = \int_G K_\rho(x , y) \ \rho(y) \ dy$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{H}^2(\rho)$; démonstration de l'existence de K : l'application

$$\varphi \to \varphi(x)$$

de $\mathcal{H}^2(\rho)$ dans F est continue, donc produit scalaire de φ et d'un élément de $\mathcal{H}^2(\rho) \otimes F$, etc. Ces propriétés déterminent entièrement K_ρ (d'où l'irréductibilité de la représentation ρ , car les opérateurs continus, dans $\mathcal{H}(\rho)$, qui commutent à ρ transforment K_ρ en des fonctions possédant les mêmes propriétés, i. e. proportionnelles à K, etc). On déduit immédiatement de là le calcul de $K_\rho(x , y)$ pour $x , y \in G.K^{\mathbf{C}}.P^-$; on écrit

$$\overline{y}^{-1} x = p^+ kp^- \quad (\text{avec } p^+ \in P^+ , \ k \in K^{\mathbf{C}} , \ p^- \in P^-)$$

(et où $y \to \overline{y}$ est la conjugaison évidente de $G^{\mathbf{C}}$ par rapport à G, laquelle échange P^+ et P^-), et alors

$$K_\rho(x , y) = c_\rho . \rho(k)^{-1} = K_\rho(\overline{y}^{-1} x)$$

où l'on désigne maintenant (et dorénavant) par K_ρ la fonction définie sur $P^+ K^{\mathbf{C}} P^-$ par

$$K_\rho(p^+ kp^-) = c_\rho . \rho(k)^{-1} \quad ,$$

et où c_ρ est une constante positive déterminée de telle sorte que l'on ait

$$\int_G K_\rho(xy) \ K_\rho(y)^* \ dy = K_\rho(x)$$

(on en trouvera la valeur exacte, en fonction du poids dominant de ρ, dans HARISH-CHANDRA). En introduisant cette fonction K_ρ d'une seule variable, on a donc

$$\varphi(x) = \int_G K_\rho(y^{-1} x) \ \varphi(y) \ dy$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{H}^2(\rho)$.

Si le paramètre $\Lambda_\rho(H_0)$ de ρ est assez grand (négatif), on voit facilement que la fonction K_ρ est dans $L^p(G)$ pour tout p tel que $1 \leqslant p \leqslant +\infty$; la formule intégrale précédente est alors encore valable pour toute $\varphi \in \mathcal{H}^p(\rho)$, en notant $\mathcal{H}^p(\rho)$ l'espace des sections holomorphes de puissance p-ième intégrable du fibré E_ρ. Il est par ailleurs clair que toute solution de cette équation intégrale est une section holomorphe de E_ρ.

4. Application aux fonctions automorphes.

La situation étant celle du n° 3, on considère en outre un sous-groupe discret Γ de G, tel que $\Gamma\backslash G$ soit de volume fini. Une forme automorphe d'espèce ρ pour Γ sera une section holomorphe du fibré E_ρ, invariante (à gauche, forcément) par ρ, et vérifiant à l'infini des conditions de croissance adéquates ;

on se bornera ici aux fonctions holomorphes

$$\varphi : G.K^{\mathbb{C}}.P^- \to F$$

vérifiant

$$\varphi(\gamma gkp) = \rho(k)^{-1}\,\varphi(g)$$

qui sont <u>de carré intégrable modulo</u> Γ (Spitzenformen), et on supposera que toutes ces fonctions sont <u>bornées sur</u> G ; c'est le cas du groupe modulaire de Siegel (voir le Séminaire Cartan, 1957/58), des groupes fuchsiens de première espèce dans le cas classique, et les résultats récents de BOREL sur les "pointes" des groupes Γ définis arithmétiquement doivent certainement permettre de justifier l'hypothèse en question dans ce dernier cas, le plus intéressant (et le seul connu en dehors d'une seule variable ...). Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{H}^2_\Gamma(\rho)$ des formes automorphes vérifiant les conditions en question est de dimension finie (un sous-espace <u>fermé</u> d'un espace L^2 formé de fonctions <u>bornées</u> est toujours de dimension finie), et on peut encore le définir comme suit : on considère l'espace des applications de G dans F qui sont invariantes à gauche par Γ, et de carré sommable modulo Γ ; autrement dit, on considère $L^2(\Gamma\backslash G)\otimes F$; ceci dit, et si K_ρ est intégrable (ce qu'on suppose désormais), le sous-espace $\mathcal{H}^2_\Gamma(\rho)$ est formé des solutions dans $L^2(\Gamma\backslash G)\otimes F$ de l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_G K_\rho(y^{-1}x)\,\varphi(y)\,dy = \int_G K_\rho(y^{-1})\,\varphi(xy)\,dy \quad ;$$

faisant opérer G sur $L^2(\Gamma\backslash G)\otimes F$ par les translations à droite, on déduit immédiatement de là que l'opérateur

$$A = \int_G U(y)\,K_\rho(y^{-1})\,dy$$

n'est autre que la <u>projection orthogonale de</u> $L^2(\Gamma\backslash G)\otimes F$ sur $\mathcal{H}^2_\Gamma(\rho)$, et par suite le nombre de Spitzenformen d'espèce ρ de Γ est donné par

$$\dim \mathcal{H}^2_\Gamma(\rho) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(AA^*) \quad .$$

Si le groupe Γ est à quotient compact, on en déduit donc la relation

$$\dim \mathcal{H}^2_\Gamma(\rho) = \sum_{(\gamma)} v(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma).\int_{G_\gamma\backslash G} \mathrm{Tr}[K_\rho(x^{-1}\gamma x)]\,dx \quad .$$

Dans le cas général (groupes définis arithmétiquement, pour lesquels $\Gamma\backslash G$ est de volume fini mais non compact), on ne trouve dans la littérature aucune étude détaillée (pour la fonction K_ρ ci-dessus) des calculs du n° 2, sauf pour les groupes fuchsiens de première espèce dans le demi-plan de Poincaré, qui ont fait l'objet d'un exposé dactylographié de KOECHER. Il s'agit d'ailleurs, dans ce dernier cas, d'un noyau un peu plus général que K_ρ, et permettant de calculer les traces des opérateurs T_n de Hecke.

Même dans le cas où $\Gamma\backslash G$ est compact, on a encore des problèmes sérieux à résoudre. L'expérience du groupe symplectique montre que dans ce cas l'intégrale

$$\int_{G_\gamma\backslash G} K_\rho(x^{-1}\gamma x)\,dx = 0$$

lorsque γ est un élément semi-simple non elliptique de G (un élément de G étant qualifié d'elliptique s'il est conjugué d'un élément de K, i. e. s'il a un point fixe dans G/K) ; la démonstration consiste dans ce cas à extraire de l'intégration modulo G_γ une intégration partielle étendue à un sous-groupe unipotent à un paramètre de G, et à constater que, $u(t)$ désignant l'élément générique de ce sous-groupe, l'expression $K_\rho[x^{-1}\,u(t)^{-1}\,\gamma\,u(t)\,x]$ est une fraction rationnelle en t dont le dénominateur est une puissance d'une fonction linéaire de t, en sorte qu'on trouve déjà 0 en intégrant par rapport à t. Il devrait être possible d'étendre ce résultat à tous les espaces symétriques complexes (c'est un problème de théorie des groupes semi-simples, non de théorie des groupes discrets). S'il en était bien ainsi, la formule de Selberg se réduirait à une somme étendue aux classes (γ) d'éléments elliptiques de Γ, lesquelles sont en nombre fini ; autrement dit, la formule de Selberg se réduirait à une somme finie, et pour la calculer effectivement on devrait calculer

$$\int_{G_\gamma\backslash G} K_\rho(x^{-1}\gamma x)\,dx$$

lorsque $\gamma \in K$ (ou même simplement lorsque γ est un élément d'ordre fini de K). Dans le demi-plan de Poincaré on a

$$K_\rho(g) = [(ai + b) + i(ci + d)]^{-n} \quad \text{pour} \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et $G_\gamma = K$ si $\gamma \in K$, $\gamma \neq 1$, -1, ce qui permet de calculer trivialement l'intégrale en question. Le calcul semble aussi avoir été effectué par SELBERG pour le demi-plan de Siegel, et ρ de dimension un. On ne connaît rien dans le cas général, peut-être parce que personne n'a sérieusement essayé d'étudier le problème.

Notons enfin qu'on peut tirer de la formule de Selberg, dans certains cas, une évaluation asymptotique de la dimension de l'espace des formes automorphes d'espèce ρ (lorsque le paramètre $\Lambda_\rho(H_0)$ de ρ tend vers $-\infty$), évaluation qui finit par devenir exacte lorsque $r = -\Lambda_\rho(H_0)$ est suffisamment grand. Mais la question n'est évidemment pas là ; elle est d'évaluer exactement l'intégrale

$$\int_{G_\gamma \backslash G} K_\rho(x^{-1}\gamma x)\, dx$$

pour tout $\gamma \in G$ tel qu'il existe une mesure invariante sur $G_\gamma \backslash G$; et, ceci fait, d'étendre les calculs du n° 2 à tous les groupes Γ définis arithmétiquement et à tous les espaces symétriques complexes.