SERGE LANG

Les formes bilinéaires de Néron et Tate

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 274, p. 435-445
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__435_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 274

Mai 1964

LES FORMES BILINÉAIRES DE NÉRON ET TATE

par Serge LANG

1. Hauteurs.

Pour les démonstrations des énoncés résumés ici, concernant la théorie générale des hauteurs, voir [2].

Soient k un corps de nombres algébriques, et M_k l'ensemble de toutes les valeurs absolues sur k étendant les valeurs absolues canoniques sur $\mathbb{Q}$. Celles-ci sont normalisées de telle façon qu'on ait, pour $x \in \mathbb{Q}$,

$$|x|_v = x \quad \text{si } v \text{ est archimédienne, } x > 0 \ ,$$

$$|p|_v = 1/p \quad \text{si } v \text{ étend la valeur } p\text{-adique.}$$

On note N_v le degré local de v.

(Tout ce qui suit s'appliquerait aussi à un corps quelconque, et un ensemble propre de valeurs absolues, satisfaisant éventuellement à la formule du produit.)

On a la formule du produit

$$\sum_v N_v . v(x) = 0 \ ,$$

si on pose $v(x) = \log|x|_v$, pour $x \in k^*$. Si $(x_0 , \ldots , x_n)$ sont les coordonnées homogènes d'un point de l'espace projectif sur k, on pose

$$v(x) = \sup_i v(x_i) \ ,$$

et on définit la hauteur

$$h(x) = \frac{1}{[k : \mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_k} N_v . v(x) \ ,$$

indépendante des coordonnées et du corps k sur lequel le point est rationnel.

Si $k = \mathbb{Q}$, et si les x_i sont des entiers relativement premiers entre eux, alors on voit immédiatement que $h(x) = \sup_i \log|x_i|$, notant $|\ |$ la valeur absolue ordinaire.

Soit V une variété algébrique, définie sur k, et soit $\varphi : V \to \mathbb{P}^n$ un morphisme dans un espace projectif, défini sur k. On définit la hauteur $h \circ \varphi = h_\varphi$ comme fonction réelle, sur les points de V dans $\bar{k}$ (ensemble qu'on note $V_{\bar{k}}$ comme d'habitude).

Soient f , g deux fonctions réelles définies sur un ensemble. On dit qu'elles sont équivalentes, si leur différence est bornée en valeur absolue. Le théorème fondamental sur les hauteurs, dû à WEIL, est le suivant :

THÉORÈME 1. - Soit V complète, normale, définie sur k . Soient φ , ψ deux morphismes non constants de V dans un espace projectif, définis sur k . Si les systèmes linéaires associés à φ , ψ sont linéairement équivalents, alors h_φ est équivalente à h_ψ .

On voit que tout théorème sur les classes de diviseurs aura un analogue sur les classes de hauteurs.

Si V est projective non singulière, et si X est un diviseur sur V , alors on a $X \sim Y - Z$, où Y , Z sont des hyperplans dans des plongements projectifs convenables. Si φ , ψ sont des plongements projectifs correspondant à Y , Z , on peut définir une hauteur $h_X = h_\varphi - h_\psi$, bien définie à une équivalence près.

2. Formes quasi-linéaires.

Soient G un groupe abélien, et $f : G \to \underline{R}$ une fonction réelle. On dit que f est quasi-linéaire si sa "dérivée" $\Delta f(x , y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$ est bornée, comme fonction de deux variables x , y . Une fonction de deux variables $\beta(x , y)$ est dite quasi-bilinéaire si la fonction

$$\Delta_1 \beta(x , y , z) = \beta(x + y , z) - \beta(x , z) - \beta(y , z)$$

est bornée sur $G \times G \times G$, ainsi que $\Delta_2 \beta$. Une fonction est dite quasi-quadratique si sa dérivée est quasi-bilinéaire.

LEMME FONDAMENTAL. - Si f est quasi-linéaire, il existe une seule fonction linéaire équivalente à f . Si f est quasi-quadratique, il existe une fonction quadratique q et une fonction linéaire ℓ (uniquement déterminées) telles que f soit équivalente à $q + \ell$.

Démonstration. - Soit f quasi-quadratique, par exemple. Posons

$$\beta(x , y) = f(x + y) - f(x) - f(y) \quad ,$$

et soit

$$B(x , y) = \lim_{m \to \infty} \frac{\beta(2^m x , 2^m y)}{2^{2m}} \quad .$$

On voit trivialement, par récurrence sur m , que la limite existe, puis que B est bilinéaire, et équivalente à β . Il s'en suit que $f(x) - \frac{1}{2} B(x , y)$ (comme fonction de x) est quasi-linéaire, et l'astuce de la limite montre que cette fonction est équivalente à une seule fonction linéaire ℓ . On trouve donc bien

$f \sim q + \ell$. L'unicité est évidente.

3. Hauteurs sur les variétés abéliennes.

Soit A une variété abélienne définie sur k . On notera $D(A)$, $D_\alpha(A)$, $D_\ell(A)$ les groupes de diviseurs (resp. diviseurs algébriquement équivalents à 0 , resp. linéairement équivalents à 0) sur A . Les deux dernières équivalences se notent $\approx$ et $\sim$. On met un k en indice pour désigner la rationalité sur k . On pose $\mathrm{Pic}(A) = D(A)/D_\ell(A)$ (dans [1], on considère $\mathrm{Pic}_0(A) = D_a(A)/D_\ell(A)$).

THÉORÈME 2. - Soient $\alpha , \beta : A \to B$ deux homomorphismes de variétés abéliennes, et, pour $\xi \in \mathrm{Pic}(B)$, posons

$$D_\xi(\alpha , \beta) = (\alpha + \beta)^{-1}(\xi) - \alpha^{-1}(\xi) - \beta^{-1}(\xi) \quad ,$$

comme dans [1]. Alors D_ξ est bilinéaire en α , β .

Malheureusement, ceci n'est démontré dans [1] que modulo l'équivalence algébrique. Le théorème, en général, est néanmoins immédiat à partir du théorème du carré, et peut être laissé comme exercice.

Soit φ un morphisme non constant de A dans un projectif, défini sur k . Soit X l'image réciproque d'un hyperplan. Soient

$$s_2 : A \times A \to A$$

la somme,

$$p_i : A \times A \to A$$

la projection sur le i-ième facteur.

Posons

$$Y = s_2^{-1}(X) - p_1^{-1}(X) - p_2^{-1}(X) = D_X(p_1 , p_2) \quad .$$

Alors, sur le produit $A \times A$, on a, par fonctorialité,

$$h_Y \sim \Delta h_X \quad .$$

Les théorèmes 1 et 2 montrent que Δh_X est quasi-bilinéaire. Le lemme fondamental donne donc :

THÉORÈME 3. - Soient A une variété abélienne définie sur k , et φ un morphisme non constant de A dans un projectif. Il existe une forme quadratique q et une forme linéaire ℓ uniquement déterminées, telles que

$$h_\varphi \sim q + \ell \quad .$$

Remarques (qui se démontrent sans difficultés).

1. Si φ est un plongement projectif, alors q est non-dégénérée.

2. Si X est algébriquement équivalent à X^-, alors la forme linéaire ℓ est égale à 0.

Soient maintenant Γ une classe d'équivalence linéaire, et X un diviseur dans Γ. On sait que $X \sim Y - Z$, où Y, Z sont des éléments de systèmes linéaires amples, correspondant à des plongements projectifs φ, ψ. Par linéarité, on peut donc associer à Γ une forme quadratique q et une forme linéaire ℓ telles que $q + \ell$ soit équivalent à $h_\varphi - h_\psi$. On posera $h_\Gamma = q + \ell$. L'application $\Gamma \mapsto h_\Gamma$ est un homomorphisme de $\mathrm{Pic}(A)$ dans le groupe des fonctions sur $A_{\bar{k}}$. Si $\Gamma \approx 0$, alors h_Γ est linéaire.

Au Congrès de 1958 (Edinburgh), NÉRON avait conjecturé que, dans certains cas, la hauteur était donnée par une forme quadratique. Pour le démontrer, NÉRON élaborait entre temps une méthode basée sur les modèles minimaux, donnant des résultats plus forts par des moyens plus profonds, encore que plus compliqués. Nous venons de montrer comment TATE a obtenu la forme quadratique par l'astuce de la limite, plus directe.

En employant cette astuce, NÉRON a montré comment on peut retrouver ses résultats locaux, pour chaque valeur absolue, puis comment on peut relier ces résultats locaux avec sa théorie des modèles minimaux. Dans ce qui suit, nous allons énoncer les résultats locaux, en esquissant les démonstrations.

4. Symboles locaux.

Soient k un corps, A une variété abélienne définie sur k. On note Z, Z_0, Z_ℓ les groupes de cycles habituels (de dimension 0, de degré 0, dans le noyau d'Albanese), et les relations d'équivalence, données par ces deux derniers, sont notées $\approx$ et $\sim$ respectivement. On note $Z'(A)_k$ le groupe des cycles dont toutes les composantes sont des points de A_k (i. e. des points rationnels sur k). On met un k en indice pour désigner la rationalité sur k.

Si ψ est une application d'une variété dans un anneau, et si $\alpha = \sum n_i(a_i)$ est un cycle, on pose

$$\psi(\alpha) = \prod \psi(a_i)^{n_i} .$$

Si f est une fonction rationnelle sur une variété, morphique et non nulle en tout point, et α un cycle comme ci-dessus, on peut définir $f(\alpha)$ comme élément du groupe multiplicatif. Si X est le diviseur d'une fonction f, si α et X sont étrangers (i. e. leurs supports sont disjoints), alors on pose $X(\alpha) = f(\alpha)$.

Soit v une valeur absolue sur k. Soient U un k-ouvert affine, "coordinatisé" et c un nombre réel. L'ensemble des points $x = (x_1, \dots, x_n)$ de U_k, tels que $v(x) \leq c$, sera appelé un ensemble v-borné de V_k (relatif à U). Comme A admet un plongement projectif, on voit que A_k est recouvert par un ensemble fini de sous-ensembles v-bornés.

Le théorème local principal s'énonce alors comme suit :

THÉORÈME 4. - Soit A une variété abélienne définie sur k. A tout couple (X, α) composé d'un diviseur $X \in D_a(A)_k$ et d'un cycle $\alpha \in Z_0'(A)_k$ étrangers l'un à l'autre, on peut associer d'une et d'une seule façon un nombre réel $\langle X, \alpha\rangle_v$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) $\langle X, \alpha\rangle_v$ est bilinéaire.

(ii) Si X est le diviseur d'une fonction, alors

$$\langle X, \alpha\rangle_v = v(X(\alpha)) \quad .$$

(iii) Le symbole est invariant par translation.

(iv) Si $X \in D_a(A)_k$ et si x_0 est un point de A_k qui ne soit pas dans X, alors l'application

$$x \longmapsto \langle X, (x) - (x_0)\rangle_v$$

est bornée sur tout sous-ensemble v-borné de $A_k - |X|_k$.

(Par fonctorialité, le théorème s'étend aux variétés projectives non singulières, la condition (iii) devant alors être remplacée par une condition fonctorielle évidente.)

Nous allons démontrer l'unicité. Supposons donnés deux accouplements comme dans le théorème. Soit τ leur différence. Si $X \sim 0$, alors $\tau(X, \alpha) = 0$, pour X, α étrangers. On peut définir $\tau(X, \alpha)$ pour tout couple (X, α), même s'ils ne sont pas étrangers, en bougeant X par le diviseur d'une fonction convenable. On voit alors que l'application

$$x \mapsto \tau(X, (x) - (x_0))$$

est bornée sur A_k, quel que soit x_0 dans A_k. En outre, $\tau(X, \alpha)$ ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de X.

Nous allons maintenant déduire que $\tau(X, \alpha)$ s'annule pour $\alpha \sim 0$. On voit facilement que tout $\alpha \sim 0$ s'écrit sous la forme

$$\alpha = c_u - c$$

avec un $c \in Z_0'(A)_k$. Donc

$$\tau(X\ ,\ \alpha) = \tau(X\ ,\ c_u - c) = \tau(X_{-u} - X\ ,\ c)\ .$$

Comme $X \approx 0$, on a $X_{-u} - X \sim 0$, et donc $\tau(X\ ,\ \alpha) = 0$. Donc $\tau(X\ ,\ \alpha)$ ne dépend que de la classe de α modulo le noyau d'Albanese.

Posons maintenant $\mathfrak{b} = (b) - (0)$ avec b variable dans A_k . Pour tout entier $m > 0$, on a $(m\delta)\mathfrak{b} = (mb) - (0) \sim m(b) - m(0)$. Donc

$$m\tau(X\ ,\ \mathfrak{b}) = \tau(X\ ,\ (m\delta)\mathfrak{b}) = \tau(X\ ,\ (mb) - (0))$$

est borné, ce qui ne peut être vrai que si $\tau(X\ ,\ \mathfrak{b}) = 0$, et l'unicité est démontrée.

Si A est un modèle minimal au-dessus d'un des anneaux de valuation discrète de k , alors le symbole $\langle X\ ,\ \alpha\rangle_v$ admet une interprétation comme multiplicité d'intersection, prise sur le schéma minimal de A . Il serait trop compliqué d'entrer ici dans ces considérations. Notons seulement qu'on en déduit que le symbole (pour v discrète) prend des valeurs rationnelles, et pas seulement réelles, ce qui n'est pas apparent d'après le procédé de la limite.

5. Relation avec la hauteur.

La forme bilinéaire du théorème 4 s'appellera la forme de Néron. Nous allons maintenant montrer sa relation avec la forme de Tate.

Soient k , de nouveau, un corps de nombres, M_k l'ensemble de toutes les valeurs absolues normalisées, et A une variété abélienne sur k . La démonstration d'existence du symbole $\langle X\ ,\ \alpha\rangle_v$ montre que, pour X , α fixés, étrangers, le nombre $\langle X\ ,\ \alpha\rangle_v$ est égal à 0 , pour presque tout v . Donc, nous pouvons définir le symbole

$$\langle X\ ,\ \alpha\rangle = \frac{1}{[k:\mathbb{Q}]} \sum_{v \in M_k} N_v \langle X\ ,\ \alpha\rangle_v$$

d'abord pour X , α étrangers, puis pour X , α quelconques, puisque la formule du produit montre qu'il ne dépend que de la classe d'équivalence linéaire de X . Le même argument que dans la démonstration d'unicité du théorème 4 montre qu'il ne dépend que de la classe de α modulo le noyau d'Albanese. On obtient donc une application bilinéaire

$$\mathrm{Pic}_a(A)_k \times A_k \to \mathbb{R}$$

satisfaisant à des propriétés fonctorielles évidentes.

Soit maintenant Γ une classe d'équivalence linéaire rationnelle sur k , i. e. un élément de $\mathrm{Pic}(A)_k$. Etant donnés deux points a , b de A_k , on pose

$$\langle a\ ,\ b\rangle_\Gamma = \langle X_a - X\ ,\ (b) - (0)\rangle$$

si X est un élément de Γ . Ceci définit une forme bilinéaire sur A_k , à valeurs réelles, appelée aussi forme de Néron.

THÉORÈME 5. - Soit Γ une classe d'équivalence linéaire sur A. Alors, pour tout a, b de A_k, on a

$$\Delta h_\Gamma(a , b) = - \langle a , b\rangle_\Gamma ,$$

autrement dit, les formes bilinéaires de Tate et Néron sont les mêmes, au signe près.

COROLLAIRE. - Si $\Gamma \approx 0$, et si $\Gamma = \mathrm{Cl}(X)$, si α est de degré 0 et $S(\alpha) = a$, alors

$$h_\Gamma(a) = - \langle X , \alpha\rangle .$$

6. Quasi-fonctions.

Pour l'existence du théorème 4, NÉRON refait la théorie des "distributions" de WEIL, en les rebaptisant quasi-fonctions. Vu l'avantage de sa présentation et terminologie, nous allons résumer brièvement de quoi il s'agit.

Rappelons la définition d'un M_k-diviseur. C'est une fonction c sur M_k, à valeurs réelles, telle que $c(v) = 0$ pour presque tout v. On étend c à $M_{k'}$, pour tout corps k' contenant k, en posant $c(w) = c(v)$ si w est dans $M_{k'}$ au-dessus de v dans M_k.

Soit V une variété définie sur k. Un sous-ensemble E de $V_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}}$ sera dit M_k-borné s'il existe un M_k-diviseur c, un k-ouvert affine U, "coordinatisé", tel que E soit contenu dans l'ensemble des couples (x , v) dans $U_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}}$ satisfaisant à la condition $v(x) \leqslant c(v)$. On note l'ensemble de ces points par $E(U , c)$.

Une application $\lambda : V_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}} \to R$ est dite M_k-localement bornée ou admissible, si elle est M_k-bornée sur tout sous-ensemble M_k-borné de $V_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}}$ (i. e. si, pour un tel sous-ensemble E, il existe un M_k-diviseur c tel que

$$|\lambda(x , v)| \leqslant c(v) \qquad \text{pour tout } (x , v) \text{ dans } E).$$

Nous considérons maintenant des triplets (U , f , λ) constitués d'un k-ouvert U, d'une fonction rationnelle $f \in k(V)$, et d'une fonction admissible λ sur $U_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}}$. Deux triplets (U , f , λ) et (U_1 , f_1 , λ_1) seront dits compatibles si ff_1^{-1} est morphique non nulle sur $U \cap U_1$, et si, pour chaque $v \in M_{\bar{k}}$, on a

$$(ff_1^{-1})(P , v) = \lambda(P , v) - \lambda_1(P , v)$$

pour tout P dans $(U \cap U_1)_{\bar{k}}$. Une classe maximale de compatibilité de triplets recouvrant V est appelée une quasi-fonction, définie sur k. Si ξ est une quasi-fonction, on définit son diviseur (ξ) de la manière évidente.

Supposons V non singulière et projective. Pour tout diviseur X , il existe une quasi-fonction ξ dont le diviseur est X . Soient ξ une quasi-fonction et W le complément de son diviseur. On définit les valeurs de ξ sur $W_{\bar{k}} \times M_{\bar{k}}$ en posant

$$\xi(P , v) = v(f(P)) - \lambda(P , v) \quad ,$$

si (U , f , λ) représente ξ en P . On démontre facilement qu'une quasi-fonction dont le diviseur est nul est M_k-bornée. Une quasi-fonction de diviseur nul, prenant la même valeur en tout (P , v) , sera dite <u>constante</u>.

Les quasi-fonctions donnent une décomposition de la hauteur en termes locaux. En effet, soit ξ une quasi-fonction de diviseur X . Définissons h_ξ sur le complément de X par la formule

$$h_\xi(P) = \frac{1}{[k : Q]} \sum_{v \in M_k} N_v . \xi(P , v)$$

pour tout P de V_k . Alors h_ξ est équivalente à $- h_X$, si h_X désigne la hauteur appartenant à la classe d'équivalence linéaire de X .

Les quasi-fonctions sur V forment un groupe $QF(V)$. On met un k en indice pour désigner le sous-groupe défini sur k . On note $QF^*(V)$, le groupe $QF(V)$ modulo les quasi-fonctions constantes. On notera aussi que toute fonction rationnelle f définit une quasi-fonction de la manière évidente, notée ξ_f .

THÉORÈME 6. - <u>Soit</u> A <u>une variété abélienne définie sur</u> k . <u>Il existe un homomorphisme et un seul</u>

$$\gamma : D_a(A)_{\bar{k}} \to QF^*(A)_{\bar{k}}$$

<u>satisfaisant aux conditions suivantes</u> :

(i) <u>Le diviseur de</u> $\gamma(X)$ <u>est</u> X , <u>donc</u> γ <u>est injective</u>.

(ii) <u>Si</u> $X = (f)$ <u>est le diviseur d'une fonction, alors</u> $\gamma(X) = \xi_f$.

(iii) <u>L'application</u> γ <u>commute avec les translations</u>.

<u>En outre, si</u> X <u>est rationnel sur</u> k , <u>alors</u> $\gamma(X)$ <u>est définie sur</u> k .

L'existence se démontre par les techniques du théorème du cube, et par celles des lois de réciprocités pour les correspondances (cf. [1]), ainsi que par l'astuce de la limite, appliquées aux quasi-fonctions (voir n° 7).

Pour $X \in D_a(A)_k$ et $\alpha \in Z'_0(A)_k$, étranger à X , notons $\gamma(X , \alpha)_v$ la valeur de $\gamma(X)$ en (α , v) , prise de façon évidente. On voit alors que ce symbole satisfait aux conditions du théorème 4. Ceci donne l'unicité de la quasi-fonction "canonique" $\gamma(X)$, ainsi que l'existence du théorème 4.

7. Démonstration du théorème 6.

Tout d'abord, soit $\mathfrak{a} = (a_0) - (a_1) + (a_2) - (a_3)$ dans le noyau d'Albanese, et soit $\mathfrak{b} = (b_0) - (b_1)$ de degré 0. Sur le produit $A^{(5)}$, nous poserons

$$(\mathfrak{a}' , \mathfrak{b}') = (a_0 , a_1 , a_2 , b_0 , b_1) .$$

PROPOSITION 1. - Soient Y un diviseur sur A, et η une quasi-fonction de diviseur Y, définis sur k. Il existe alors une fonction g sur $A^{(5)}$ et une quasi-fonction η' sur $A^{(5)}$ ayant le même diviseur, et la propriété suivante : si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont comme ci-dessus, et tels que $Y_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b})$ soit défini, on a :

$$Y_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = g(\mathfrak{a}' , \mathfrak{b}')$$

$$\eta_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \eta'(\mathfrak{a}' , \mathfrak{b}') .$$

Démonstration. - Essentiellement routine avec les techniques du théorème du cube et de la loi de réciprocité pour les correspondances.

COROLLAIRE. - Soit η une quasi-fonction de diviseur Y, définie sur k. Il existe un M_k-diviseur c tel que pour tout $\mathfrak{a} \in Z_\ell$ et $\mathfrak{b} \in Z_0$ on ait

$$|\langle \xi(Y_{\mathfrak{a}})\, \eta_{\mathfrak{a}}^{-1} , \mathfrak{b}\rangle_v| \leq c(v)\, d_+(\mathfrak{a})\, d_+(\mathfrak{b}) .$$

Démonstration. - On se sert de la proposition et du fait qu'une quasi-fonction de diviseur nul est bornée.

(Noter qu'on a mis $\langle\ ,\ \rangle_v$ pour désigner la valeur d'une quasi-fonction en $(\mathfrak{b} , v)$. C'est assez standard comme notation.)

L'analogue de l'astuce limite pour les quasi-fonctions est contenu dans le lemme suivant.

LEMME 1. - Soit η une quasi-fonction de diviseur Y sur k. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de degré 0. Alors la limite

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \langle \xi(Y_{m\mathfrak{a}-(m\delta)\mathfrak{a}})\, \eta^{-1}_{m\mathfrak{a}-(m\delta)\mathfrak{a}} , \mathfrak{b}\rangle_v$$

existe, et il existe un M_k-diviseur c tel que pour tout $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ cette limite soit bornée en valeur absolue par $c(v)\, d_+(\mathfrak{a})\, d_+(\mathfrak{b})$.

Démonstration. - En employant le corollaire de la proposition 1, on voit que l'expression entre crochets $\langle\ ,\ \rangle_v$ est quasi-linéaire en m, et le lemme s'ensuit immédiatement.

On notera QF et BQF les groupes de quasi-fonctions, resp. quasi-fonctions bornées, et on mettra un $*$ pour désigner ces groupes modulo les (quasi-fonctions) constantes.

PROPOSITION 2. - <u>Soit</u> η <u>une quasi-fonction de diviseur</u> Y <u>sur</u> k . <u>A chaque</u> α <u>de degré</u> 0 , <u>on peut associer un élément</u> $\lambda(\alpha)$ <u>de</u> BQF* <u>tel que</u> :

(i) λ <u>soit un homomorphisme</u>.

(ii) <u>Si</u> α <u>est dans le noyau d'Albanese, alors</u>

$$\lambda(\alpha) = \xi(Y_\alpha)\, \eta_\alpha^{-1} \quad .$$

(iii) <u>Pour tout point</u> u <u>de</u> $A_{\bar{k}}$ <u>on a</u> $\lambda(\alpha_u) = \lambda(\alpha)_u$.

<u>Démonstration</u>. - Pour α donné, il est clair qu'il existe une quasi-fonction unique, bornée, telle que sa valeur en $(b\ ,\ v)$ soit la limite donnée dans le lemme 1 . Si on la note $\lambda(\alpha)$, on obtient immédiatement la propriété (i) . Supposons que $S(\alpha) = 0$. Il existe alors une fonction f telle que $Y_\alpha = (f)$. Mais on a $d_+((m\delta)\alpha) = d_+(\alpha)$. Donc

$$\xi(Y_{-(m\delta)\alpha})\, \eta^{-1}_{-(m\delta)\alpha}$$

prend des valeurs bornées sur $(b\ ,\ v)$ d'après le corollaire de la proposition 1 , et ce terme s'évanouit quand on divise par m et qu'on prend la limite. La contribution de l'autre terme donne ce qu'on veut dans (ii) . Un argument semblable démontre (iii) .

Nous pouvons maintenant aborder le théorème d'existence principal sur les quasi-fonctions canoniques sur les variétés abéliennes. Soient Y un diviseur non dégénéré (par exemple, une section hyperplane), et η une quasi-fonction de diviseur Y . Etant donné $X \in D_a(A)_{\bar{k}}$, il existe un α de degré 0 et une fonction f tels que

$$X = Y_\alpha + (f) \quad .$$

On définit

$$\gamma(X) = \lambda(\alpha)\, \eta_\alpha\, \xi_f \quad .$$

On voit que $\gamma(X)$ est indépendant du choix de α et de f parce que si $Y_\alpha = (g)$ est le diviseur d'une fonction, il existe un entier n tel que $n\alpha$ soit dans le noyau d'Albanese, et on applique la proposition 2 , (ii) . Cette même référence montre alors que si $X = (f)$, on a $\gamma(X) = \xi_f$, et la propriété (iii) de la proposition 2 montre que γ commute aux translations, ce qui démontre tout.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LANG (Serge). - Abelian varieties. - New York, Interscience Publishers, 1959 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 7).

[2] LANG (Serge). - Diophantine geometry. - New York, Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 11).

[3] NÉRON (André). - Hauteurs et quasi-fonctions sur les variétés abéliennes (à paraître).

[4] TATE (John). - Heights on abelian varieties, non publié (comme d'habitude).