PIERRE CARTIER

Processus aléatoires généralisés

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 272, p. 425-434
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__425_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 272

Mai 1964

PROCESSUS ALÉATOIRES GÉNÉRALISÉS

par Pierre CARTIER

1. Introduction.

Malgré un développement spectaculaire, la théorie des processus aléatoires n'a pas encore pu se débarrasser de certaines difficultés toujours renouvelées, tenant à l'absence d'une théorie réellement maniable de l'intégration dans les espaces fonctionnels. La théorie des processus séparables de DOOB [4] est assez couramment prise comme base aujourd'hui, mais son emploi requiert une virtuosité décourageante. En 1955, GEL'FAND [5] a introduit l'idée extrêmement féconde de considérer les fonctions aléatoires comme des cas particuliers des distributions aléatoires ; les conjectures qu'il formula alors furent démontrées rapidement par PROKHOROV [8] et MINLOS [7], et l'on a maintenant une théorie très souple. Il ne fait guère de doute que le nouveau point de vue devrait rapidement supplanter les autres dans de nombreux problèmes, mais le plus gros du travail reste à faire.

2. Description des processus aléatoires.

Avant d'exposer la méthode de GEL'FAND, nous rappellerons les points de vue classiques, que nous illustrerons par l'exemple du mouvement d'une particule microscopique en suspension dans un gaz. A cause des chocs incessants et imprévisibles que la particule subit de la part des molécules du gaz, il est impossible de prévoir avec certitude son mouvement. On peut cependant donner un modèle probabiliste tout à fait raisonnable, décrit mathématiquement par les données suivantes :

- l'intervalle de temps T pendant lequel on observe la particule ;
- le domaine M de l'espace qui contient le gaz ;
- pour chaque système d'instants $t_1 < \dots < t_p$, une mesure de Radon $m_{t_1 \dots t_p}$ sur l'espace produit M^p , positive et de masse totale 1 .

L'expérience fondamentale consiste à observer la position de la particule en des instants $t_1 < \dots < t_p$, et $m_{t_1 \dots t_p}(A_1 \times \dots \times A_p)$ représente la probabilité d'avoir successivement trouvé la particule dans les ensembles $A_1 , \dots , A_p$. Cette interprétation implique certaines conditions de compatibilité à la famille des mesures $m_{t_1 \dots t_p}$.

En fait, les quantités intéressantes que l'on veut déterminer sont des probabilités d'événements qui ne dépendent pas seulement d'un nombre fini d'observations comme précédemment ; on veut par exemple connaître la probabilité que la particule reste toujours dans une partie M' de M, ou qu'elle n'y entre pas avant une date déterminée.

Un premier stade consiste à introduire l'espace M^T de toutes les trajectoires possibles, c'est-à-dire de toutes les applications de T dans M ; sur M^T on considère ([1]) la tribu $\mathcal{A}_o$ engendrée par les ensembles de la forme

$$\{f \mid f(t_1) \in A_1 \, , \, \ldots \, , \, f(t_p) \in A_p\} \tag{1}$$

pour $t_1 < \ldots < t_p$ dans T et $A_1, \ldots, A_p$ boréliens dans M. D'après un résultat classique de KOLMOGOROV (cf. [6], p. 31), il existe sur la tribu $\mathcal{A}_o$ une mesure de probabilité P_o bien déterminée par le fait d'attribuer la masse $m_{t_1 \ldots t_p}(A_1 \times \ldots \times A_p)$ à tout ensemble du type (1).

Cependant, la tribu $\mathcal{A}_o$ se révèle tout à fait inadéquate pour la plupart des problèmes, et il faut la modifier ; pour cela, on dispose de deux méthodes :

a. D'après DOOB, le modèle mathématique complet est constitué par les données T, M, $m_{t_1 \ldots t_p}$ et Ω, où Ω est une partie de M^T, de mesure extérieure 1 pour P_o. On note alors $\mathcal{A}$ la tribu sur Ω formée des ensembles $E \cap \Omega$ pour E dans $\mathcal{A}_o$, et l'on définit la mesure de probabilité P sur $\mathcal{A}$ par $P(E \cap \Omega) = P_o(E)$, ce qui est légitime. Dans beaucoup de cas, la tribu complétée de $\mathcal{A}$ pour P sera assez vaste pour contenir tous les ensembles intéressants. Il y a deux inconvénients : on ne peut accepter Ω que lorsqu'on a prouvé que Ω est de mesure extérieure 1 pour P_o, ce qui est parfois délicat ; de plus, la probabilité d'un évenement donné peut fort bien dépendre de Ω, et non seulement des "données expérimentales" $m_{t_1 \ldots t_p}$.

b. Pour simplifier l'exposé de la méthode de KAKUTANI, nous supposerons M compact. Dans ce cas, on pose $\Omega = M^T$, et on le munit de la topologie produit et de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ correspondante ([2]). Il existe alors sur la tribu $\mathcal{B}$ une mesure de probabilité P, et une seule, prolongeant P_o et satisfaisant à la condition de <u>régularité</u> :

$$P(A) = \sup\{P(K) \mid K \text{ compact}, \ K \subset A\} \qquad (A \in \mathcal{B}) \tag{2}$$

En fait, Ω est un espace compact, et P une mesure de Radon, que BOURBAKI [3]

([1]) Une <u>tribu</u> $\mathcal{A}$ sur un ensemble E est une classe de parties de E, stable pour les opérations d'intersection dénombrable et de passage au complémentaire. Une <u>mesure de probabilité</u> P sur $\mathcal{A}$ est une fonction sur $\mathcal{A}$, à valeurs réelles positives, et telle que $\sum_{n \geq 1} P(E_n) = 1$ pour toute suite $(E_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, de réunion E.

([2]) Sur un espace topologique T, la <u>tribu borélienne</u> $\mathcal{B}$ est engendrée par l'ensemble des parties ouvertes de T ; les éléments de $\mathcal{B}$ sont les parties boréliennes de T.

appelle la limite projective des mesures de Radon $m_{t_1 \dots t_p}$; elle est caractérisée par la formule :

$$(3) \qquad \int_{\Omega} u(f(t_1), \dots, f(t_p))\, dP(f) = \int_{M^p} u(x_1, \dots, x_p)\, dm_{t_1 \dots t_p}(x_1, \dots, x_p)$$

pour tout système d'instants $t_1 < \dots < t_p$ et toute fonction continue u sur M^p. On n'a introduit aucun élément arbitraire, mais la tribu $\mathcal{B}$, même complétée par rapport à P, est souvent trop petite.

Nous pouvons maintenant exposer l'idée fondamentale de GEL'FAND. Pour déterminer la position de la particule à un instant t, il faut mesurer la valeur de ses coordonnées, c'est-à-dire de certaines fonctions sur M ; mais, vu l'impossibilité de déterminer le temps sans erreur, ce que l'on mesurera effectivement est une quantité du type $\int h(X(\tau), \tau)\, d\tau$ où $X(\tau)$ est la position de la particule à l'instant τ et où la fonction h sur $M \times T$ est nulle en dehors d'un petit intervalle de temps entourant t. Simplifions un peu en supposant $M = \underset{\sim}{R}$ et en ne considérant que des quantités de la forme $X_h = \int X(\tau).h(\tau).d\tau$ où h est une fonction de classe C^∞ à support compact. Le modèle mathématique sera alors spécifié par T, M et des mesures $m_{h_1 \dots h_p}$, la probabilité d'obtenir X_{h_1} dans A_1, ..., X_{h_p} dans A_p étant égale à $m_{h_1 \dots h_p}(A_1 \times \dots \times A_p)$. Autrement dit, au lieu de prendre comme réceptacle universel l'espace M^T de <u>toutes</u> les fonctions sur T, on prendra l'espace $\mathcal{D}'$ des <u>distributions</u> sur T. Il y a deux avantages fondamentaux : tout d'abord, la théorie de la mesure dans $\mathcal{D}'$ est beaucoup moins pathologique que dans M^T ; de plus, <u>tous</u> les espaces fonctionnels usuels sont des parties mesurables de $\mathcal{D}'$, mais non de M^T.

3. Intégration dans les espaces topologiques.

Comme l'espace $\mathcal{D}'$ n'est pas localement compact, nous ne pourrons lui appliquer les résultats de BOURBAKI [3], et nous devrons introduire une classe convenable d'espaces topologiques.

Rappelons qu'un espace <u>polonais</u> est un espace métrique complet, admettant une base dénombrable d'ouverts. On dira qu'un espace topologique T est <u>standard</u> s'il existe un espace polonais P et une application continue bijective f de P sur T telle que :

(I) <u>Si</u> E <u>est une partie borélienne de</u> P, <u>alors</u> $f(E)$ <u>est borélienne dans</u> T.

Toute bijection continue $f : P \to T$ satisfait à la condition (I) d'après un théorème profond de LUSIN (Cf. [2], p. 134), pourvu que P soit polonais et T métrisable. Le même théorème de Lusin entraîne la propriété suivante :

(i) Soient S et T deux espaces standards, et f une application continue injective de S dans T ; alors $f(S)$ est une partie borélienne de T et f transforme la tribu borélienne de S en la tribu borélienne de $f(S)$. Réciproquement, toute partie borélienne de T est un sous-espace standard de T.

Par ailleurs, les propriétés élémentaires de stabilité de la classe des espaces polonais entraînent le résultat suivant :

(ii) Soit (T_n) une famille dénombrable d'espaces standards. L'espace produit $T = \prod_n T_n$ est standard, et la tribu borélienne sur T est produit des tribus boréliennes sur les facteurs T_n. Si les T_n sont des sous-espaces d'un même espace topologique E, les sous-espaces $\bigcup_n T_n$ et $\bigcap_n T_n$ de E sont standards.

Toute mesure de probabilité P sur la tribu borélienne d'un espace standard T satisfait à la condition de régularité (2). Ceci entraîne que l'on peut décomposer T sous la forme $T = N \cup \bigcup_n K_n$, où $P(N) = 0$ et où les K_n sont des compacts métrisables deux à deux disjoints ; la théorie de l'intégration sur un espace standard ressemble donc beaucoup à celle des espaces localement compacts polonais. De plus, l'argument de KOLMOGOROV [6], p. 31, repose essentiellement sur la régularité des mesures dans un espace euclidien, et se transpose facilement pour donner un théorème d'existence de limites projectives de mesures :

(iii) Supposons donnés des espaces standards T_n $(n \geqslant 1)$ et des applications continues f_n de T_n dans T_{n-1} pour $n \geqslant 2$. La limite projective T de ce système est un espace standard. De plus, si l'on s'est donné pour chaque $n \geqslant 1$ une mesure de probabilité P_n sur T_n, avec $f_n(P_n) = P_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$, il existe sur T une mesure de probabilité P et une seule dont la projection sur T_n soit égale à P_n pour tout $n \geqslant 1$.

4. Processus linéaires.

Les résultats de ce numéro sont dus à BOCHNER [1] et représentent une extension facile du théorème bien connu du même auteur sur les fonctions de type positif. Etant donné un espace vectoriel réel E, on peut lui associer trois espèces d'objets.

a. On appelle processus linéaire $\mathfrak{L}$ sur E la donnée, pour toute suite $h_1, \ldots, h_p$ d'éléments de E, d'une mesure de probabilité $m_{h_1 \ldots h_p}$ sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$, l'axiome suivant étant vérifié :

(A) Soient $h_1, \ldots, h_p$ et $h'_1, \ldots, h'_q$ deux suites finies d'éléments de E, liés par des relations linéaires :

$$h_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant q} a_{ij} . h'_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

et soit u l'application linéaire de $\underset{\sim}{R}^q$ dans $\underset{\sim}{R}^p$ de matrice (a_{ij}). On a alors, pour toute partie borélienne A de $\underset{\sim}{R}^p$, la relation

(5) $$m_{h_1 \ldots h_p}(A) = m_{h'_1 \ldots h'_q}(u^{-1}(A)) .$$

Les processus aléatoires généralisés de Gel'fand peuvent se définir comme des processus linéaires particuliers associés à l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions de classe C^∞ à support compact sur T.

b. Soit E^* le dual algébrique de E. On dira qu'une partie H de E^* est cylindrique s'il existe des éléments $h_1, \ldots, h_p$ de E et une partie borélienne A de $\underset{\sim}{R}^p$ tels que

(6) $$H = \{\eta \mid (\langle h_1, r\rangle, \ldots, \langle h_p, r\rangle \in A\}$$

On note $\mathcal{A}^*_0$ la classe des ensembles cylindriques et $\mathcal{A}^*$ la tribu sur E^* engendrée par $\mathcal{A}^*_0$. On appelle loi de probabilité sur E^* toute mesure de probabilité P^* sur la tribu $\mathcal{A}^*$.

c. On appelle fonctionnelle caractéristique sur E toute fonction Φ sur E à valeurs complexes, continue sur chaque sous-espace vectoriel de dimension finie de E, avec $\Phi(0) = 1$, et vérifiant les inégalités

(7) $$\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j \Phi(h_i - h_j) \geq 0 \qquad (c_i \text{ complexes}, \; h_i \in E)$$

(" Φ est de type positif").

Les trois classes précédentes d'objets sont en correspondance bijective, $\mathcal{L}$, P^* et Φ se correspondant si et seulement si l'on a les relations suivantes

(8) $$m_{h_1 \ldots h_p}(A) = P^*(H) \qquad (\text{pour } H \text{ de la forme } (6))$$

(9) $$\Phi(h) = \int_{E^*} e^{i\langle h,\eta\rangle} \, dP(\eta)$$

(10) $$\int_{\underset{\sim}{R}^p} e^{i\sum_k \tau_k \lambda_k} \, dm_{h_1 \ldots h_p}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \Phi(\tau_1 h_1 + \ldots + \tau_p h_p) .$$

Pour exprimer la relation (8), on dira que les mesures $m_{h_1 \ldots h_p}$ sont les marges de P^*.

5. Généralités sur les espaces $(\mathcal{LF})$ et $(\mathcal{LM})$.

Nous supposons désormais que E est muni d'une topologie localement convexe $\mathcal{T}$, et qu'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\geq 1}$ de sous-espaces vectoriels de E, de réunion E, ayant les propriétés :

a. Pour la topologie induite par $\mathcal{T}$, l'espace E_n est complet et admet une base dénombrable d'ouverts.

b. Si une partie convexe U de E est telle que $E_n \cap U$ soit un voisinage de 0 dans E_n pour tout $n \geqslant 1$, alors U est un voisinage de 0 dans E.

On exprimera ces propriétés (3) en disant que E est de type $(\mathcal{LF})$; on dira qu'il est de type $(\mathcal{LM})$ si l'on peut choisir les E_n de telle sorte que toute partie bornée du dual topologique E'_n de E_n soit relativement compacte pour la topologie forte.

Par analogie avec ce qu'on a fait au n° 4, on définira la classe $\mathcal{A}'_0$ des parties cylindriques du dual topologique E' de E, et la tribu $\mathcal{A}'$ engendrée par $\mathcal{A}'_0$. On appellera loi de probabilité sur E' toute mesure de probabilité P sur la tribu $\mathcal{A}'$; les marges $m_{h_1 \ldots h_p}$ d'une telle loi seront définies comme dans (8).

LEMME 1. - Si E est de type $(\mathcal{LF})$ (resp. de type $(\mathcal{LM})$), le dual E' de E est un espace standard pour la topologie faible (resp. forte) et la tribu $\mathcal{A}'$ est la tribu borélienne pour cette topologie.

Comme toute partie bornée de E est contenue dans l'un des espaces E_n, la condition (b) entraîne la possibilité d'identifier E' muni de la topologie faible (resp. forte) à la limite projective des E'_n munis de la topologie faible (resp. forte). Si $(U_{nm})_{m \geqslant 1}$ est une base de voisinages de 0 dans E_n, le polaire A_{nm} de U_{nm} dans E'_n est une partie compacte et métrisable de E'_n pour la topologie faible (resp. forte), et $E'_n = \bigcup_m A_{nm}$ est standard d'après le n° 3 (ii). Alors E' est standard d'après le n° 3 (iii). En utilisant une partie dénombrable dense de E, on construit facilement une famille dénombrable $\mathcal{E}$ de cylindres dans E', séparant les points de E' ; d'après une propriété générale des espaces standards, $\mathcal{E}$ engendre la tribu borélienne $\mathcal{B}'$ sur E' ; comme les cylindres appartiennent à $\mathcal{B}'$ et engendrent la tribu $\mathcal{A}'$, on a finalement $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$.

6. Processus associés à un espace $(\mathcal{LF})$.

Nous supposons dans la suite que E est un espace $(\mathcal{LF})$, et nous considérons un processus linéaire $\mathcal{L} = (m_{h_1 \ldots h_p})$ sur E ; nous noterons Φ la fonctionnelle caractéristique associée et Φ_n la restriction de Φ à E_n. Nous allons d'abord montrer que, si Φ_n est continue sur E_n pour tout n, alors Φ est continue sur E ; il suffit de prouver que Φ est continue en 0. Soit alors $\varepsilon > 0$; pour chaque entier $n \geqslant 1$, il existe un voisinage ouvert U_n de 0 dans E_n tel que $|\Phi(h) - 1|^{1/2} \leqslant \varepsilon . 2^{-n-1}$ pour h dans U_n. Les éléments de la forme $h = h_1 + \ldots + h_n$

(3) Nos espaces $(\mathcal{LF})$ sont les espaces $(\mathcal{LF})$ au sens usuel qui contiennent un ensemble dénombrable dense.

pour n variable et h_i dans U_i, forment un voisinage de 0 dans E d'après le numéro 5 (b). D'après l'inégalité bien connue pour les fonctions de type positif

(11) $$|\Phi(x + y) - \Phi(x)| \leq \sqrt{2}\, |\Phi(y) - 1|^{1/2}$$

on a alors

$$|\Phi(h) - 1| \leq |\Phi(h_1) - 1| + \sum_{1<i\leq n} |\Phi(h_1 + \dots + h_i) - \Phi(h_1 + \dots + h_{i-1})|$$
$$\leq \sqrt{2} \sum_{1\leq i\leq n} |\Phi(h_i) - 1|^{1/2} \leq \varepsilon$$

pour h dans U.

Nous considérerons un certain nombre de conditions portant sur le processus $\mathcal{L}$; pour cela, nous noterons J^p l'ensemble des vecteurs $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de $\underset{\sim}{R}^p$ avec $|\xi_i| \leq 1$ pour $1 \leq i \leq p$.

$(B_{n,p})$ <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E_n <u>tel que</u>

(12) $$m_{h_1 \dots h_p}(J^p) \geq 1 - \varepsilon \qquad \text{pour } h_1, \dots, h_p \text{ dans } U.$$

(C_n) <u>Pour tout</u> $\varepsilon > 0$, <u>il existe un voisinage</u> U <u>de</u> 0 <u>dans</u> E_n <u>tel que</u> (12) <u>soit valable pour tout</u> $p \geq 1$.

En utilisant la formule (10) et les propriétés de continuité de la transformation de Fourier, on montre que $(B_{n,1})$ entraîne la continuité de Φ_n sur E_n, et que cette continuité entraîne à son tour chacune des conditions $(B_{n,p})$. Par ailleurs, on a le résultat fondamental :

THÉORÈME 1 (PROKHOROV). - <u>Pour qu'il existe une loi de probabilité</u> P <u>sur</u> E', <u>ayant les marges</u> $m_{h_1 \dots h_p}$, <u>il faut et il suffit que la condition</u> (C_n) <u>soit satisfaite pour tout entier</u> $n \geq 1$.

<u>Nécessité</u>. - Fixons un entier $n \geq 1$, et soit $(U_{nm})_{m\geq 1}$ une base décroissante de voisinages ouverts de 0 dans E_n ; le polaire A_{nm} de U_{nm} <u>dans</u> E' est faiblement fermé, donc appartient à la tribu $\mathcal{A}'$ (lemme 1). De plus, on a $E' = \bigcup_m A_{nm}$, et comme la suite $(A_{nm})_{m\geq 1}$ est croissante, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $m \geq 1$ avec $P(A_{nm}) \geq 1 - \varepsilon$. Pour $h_1, \dots, h_p$ dans U_{nm}, l'ensemble cylindrique $H = \bigcap_{1\leq i\leq p} \{\eta \mid |\langle h_i, \eta\rangle| \leq 1\}$ contient A_{nm}, d'où les inégalités

$$m_{h_1 \dots h_p}(J^p) = P(H) \geq P(A_{nm}) \geq 1 - \varepsilon .$$

<u>Suffisance</u>. - Il existe un sous-espace vectoriel F_0 de E, de dimension dénombrable par rapport au corps $\underset{\sim}{R}$, et tel que $F_0 \cap E_n$ soit dense dans E_n pour tout $n \geq 1$. Soit $F \supset F_0$ un sous-espace vectoriel de dimension dénombrable sur $\underset{\sim}{R}$.

D'après le n° 4, il existe sur le dual algébrique F^* de F une mesure de probabilité P_F^* ayant les marges $m_{h_1 \dots h_p}$ pour $h_1, \dots, h_p$ dans F. Soit D le sous-ensemble dénombrable de F formé des vecteurs à coordonnées rationnelles par rapport à une base convenable de F. Pour $h_1, \dots, h_p$ dans $D \cap U_{nm}$, soit $B^{m,n}_{h_1 \dots h_p}$ l'ensemble des η dans F^* tels que $|\langle h_i, \eta \rangle| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Si φ est l'application linéaire de E^* sur F^* définie par restriction des formes linéaires, on a alors

$$\varphi(E') = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{h_1 \dots h_p} B^{m,n}_{h_1 \dots h_p} . \tag{13}$$

L'hypothèse faite entraîne que, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $m \geqslant 1$ avec $P_F^*(B^{m,n}_{h_1, \dots, h_p}) \geqslant 1 - \varepsilon$ quels que soient $h_1, \dots, h_p$ dans $D \cap U_{mn}$; d'après (13) et la propriété d'additivité dénombrable de P_F^*, ceci entraîne $P_F^*(\varphi(E')) = 1$. Mais pour les topologies faibles, E' et F^* sont des espaces standards, et d'après le n° 3 (i), φ transforme la tribu borélienne sur E' en la tribu borélienne sur $\varphi(E') \subset F^*$. Il existe alors une mesure de probabilité P_F sur E' dont l'image par φ soit la mesure induite par P_F^* sur $\varphi(E')$, et P_F est caractérisée par le fait d'avoir les marges $m_{h_1 \dots h_p}$ pour $h_1, \dots, h_p$ dans F. L'unicité prouve que l'on a $P_F = P_{F^o}$, et comme toute partie finie de E est contenue dans un sous-espace tel que F^o, la mesure P_{F_o} convient.

C. Q. F. D.

Voici maintenant le second résultat fondamental.

THÉORÈME 2 (MINLOS). - Soit Φ une fonction continue de type positif sur un espace nucléaire E de type $(\mathfrak{LS})$, avec $\Phi(0) = 1$. Il existe alors sur le dual topologique E' de E une mesure de probabilité P et une seule telle que l'on ait

$$\Phi(h) = \int_{E'} e^{i\langle h, \eta \rangle} \, dP(\eta) \qquad (h \in E) \tag{14}$$

D'après le n° 4, il existe sur E un processus linéaire $\mathfrak{L} = (m_{h_1 \dots h_p})$, de fonctionnelle caractéristique Φ ; d'après le théorème 1, il suffit donc d'établir que $\mathfrak{L}$ satisfait à la condition (C_n) pour tout $n \geqslant 1$.

Or l'espace E est nucléaire si et seulement si chacun des espaces E_n satisfait à la propriété suivante :

(D_n) Pour tout voisinage U de 0 dans E_n, il existe sur E_n des formes quadratiques continues et définies positives, soient Q et Q', telles que U contienne l'ensemble des x avec $Q(x) \leqslant 1$, et que, pour $x_1, \dots, x_m$ orthonormaux pour Q', on ait $Q(x_1) + \dots + Q(x_m) \leqslant 1$.

Nous appliquerons cette condition au voisinage U de 0 dans E_n qui se compose des x tels que $|\Phi(x\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}) - 1| \leqslant \varepsilon$ (noter que Φ est continue). Comme $|\Phi| \leqslant 1$, on en déduit facilement l'inégalité

$$(15) \qquad |\Phi(y) - 1| \leqslant \varepsilon(1 + Q(y)) \qquad (y \in E_n)$$

Comme Q' est continue, l'ensemble des x dans E_n tels que $Q'(x) \leqslant 1$ est un voisinage V de 0 dans E_n. Soient $h_1, \dots, h_p$ dans V ; soit $\{u_1, \dots, u_q\}$ une base orthonormale pour Q' du sous-espace de E_n engendré par $h_1, \dots, h_p$, qui soit aussi orthogonale pour Q ; il existe donc des scalaires réels λ_{ij} avec $h_i = \sum_j \lambda_{ij} u_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$ (l'indice de sommation j prend dans la suite les valeurs $1, 2, \dots, q$), et l'on a $\sum_j \lambda_{ij}^2 = Q'(h_i) = 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\underset{\approx}{R}^q$ montre alors que l'ensemble B des vecteurs $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_q)$ avec $\sum_j \xi_j^2 \leqslant 1$ est contenu dans l'ensemble C des ξ tels que $|\sum_j \lambda_{ij}\, \xi_j| \leqslant 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. En utilisant l'axiome (A) des processus linéaires, on en déduit

$$(16) \qquad m_{h_1 \dots h_p}(J^p) = m_{u_1 \dots u_q}(C) \geqslant m_{u_1 \dots u_q}(B) .$$

Nous notons désormais μ la mesure de probabilité $m_{u_1 \dots u_q}$ sur $\underset{\approx}{R}^q$ et B' le complémentaire de B dans $\underset{\approx}{R}^q$; de plus, $\xi.\eta = \sum_j \xi_j \eta_j$ pour ξ et η dans $\underset{\approx}{R}^q$. Comme le nombre $1 - e^{-\xi.\xi/2}$ est positif pour ξ dans B et au moins égal à $1 - e^{-1/2} \geqslant \frac{1}{3}$ pour ξ dans B', on a

$$(17) \qquad \mu(B')/3 \leqslant \int_{\underset{\approx}{R}^q} (1 - e^{-\xi.\xi/2})\, d\mu(\xi) .$$

En utilisant la formule (10) et les propriétés bien connues des transformées de Fourier des fonctions gaussiennes $e^{-\xi.\xi/2}$, on transforme l'intégrale du second membre de (17) en l'intégrale

$$(18) \qquad I = (2\pi)^{-q/2} \int_{\underset{\approx}{R}^q} e^{-\eta.\eta/2}(1 - \Phi(\sum_j \eta_j.u_j))\, d\eta_1 \dots d\eta_q .$$

Par ailleurs, d'après (15), il vient

$$(19) \qquad |1 - \Phi(\sum_j \eta_j.u_j)| \leqslant \varepsilon.(1 + \sum_j Q(u_j).\eta_j^2)$$

et par un calcul facile, on obtient

$$(20) \qquad I \leqslant \varepsilon.(1 + \sum_j Q(u_j)) \leqslant 2\varepsilon$$

(d'où $I \leqslant 2\varepsilon$, puisque, d'après la condition (D_n), on a $\sum_j Q(u_j)$). D'après (17), on a $\mu(B') \leqslant 6\varepsilon$, d'où $\mu(B) \geqslant 1 - 6\varepsilon$ et en utilisant (16), on trouve finalement

$$(21) \qquad m_{h_1 \dots h_p}(J^p) \geqslant 1 - 6\varepsilon \qquad (p \geqslant 1 \text{ entier et } h_1, \dots, h_p \text{ dans } V)$$

On a vérifié la condition (C_n) .

C. Q. F. D.

7. Compléments.

La condition (D_n) utilisée dans la démonstration du théorème 2 se démontre très facilement dans le cas de l'espace $\mathcal{D}$. Il en résulte que toute fonction Φ continue de type positif sur $\mathcal{D}$, avec $\Phi(0) = 1$, est la "transformée de Fourier" d'une mesure de probabilité sur $\mathcal{D}'$. Par exemple, ceci s'applique à

$$\Phi(h) = \exp - \frac{1}{2} \int h(t)^2 \, dt \ ;$$

on obtient ainsi une "distribution aléatoire" qui n'est autre que la dérivée de la fonction aléatoire du mouvement brownien. Si E est un espace de Hilbert séparable, la fonction $\Phi(h) = \exp - \frac{1}{2} \|h\|^2$ est continue et de type positif, mais elle n'est pas de la forme (14), ce que chacun découvre avec stupéfaction un jour ou l'autre ! D'ailleurs, en généralisant cette remarque, MINLOS a prouvé que l'hypothèse de nucléarité du théorème 2 est nécessaire, aussi bien que suffisante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOCHNER (Salomon). - Harmonic analysis and the theory of probability. - Berkeley, University of California Press, 1960 (California Monographs in mathematical Sciences).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chapitre IX, 2e éd. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1045 ; Bourbaki, 8).

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chapitres I à IV. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).

[4] DOOB (J. L.). - Stochastic processes. - New York, J. Wiley and Sons, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[5] GEL'FAND (I. M.). - Processus aléatoires généralisés [en russe], Doklady Akad. Nauk SSSR, t. 100, 1955, p. 853-856.

[6] KOLMOGOROV (A. N.). - Foundations of the theory of probability, 2nd english edition. - New York, Chelsea publishing Company, 1956.

[7] MINLOS (R. A.). - Generalized random processes and their extension to a measure [en russe], Trudy Moscov. math. Obšč., t. 8, 1959, p. 497-518.

[8] PROKHOROV (Ju. V.). - Skhodimost' slučajn'kh pročessov i predel'nye teorem' teorii verojatnostej, Teor. Verojatn. i Prim., t. 1, 1956, p. 177-238 ; en traduction : Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theory of Prob. and Appl., t. 1, 1956, p. 157-214.