FRANÇOIS BRUHAT

# Sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples $p$-adiques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 271, p. 413-423

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__413_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 271

Mai 1964

# SOUS-GROUPES COMPACTS MAXIMAUX DES GROUPES SEMI-SIMPLES p-ADIQUES

par François BRUHAT

## 1. Considérations préliminaires.

Les propriétés des sous-groupes compacts maximaux des groupes de Lie réels sont bien connus. En particulier :

(1) Tout sous-groupe compact est contenu dans un sous-groupe compact maximal ;

(2) Deux sous-groupes compacts maximaux sont conjugués par un automorphisme intérieur.

Par ailleurs, les sous-groupes compacts maximaux interviennent dans des théorèmes de décomposition. Avant de les énoncer, rappelons quelques définitions et résultats relatifs aux groupes algébriques ([1], [15]).

Soit $P$ un corps, et soit $G$ un groupe algébrique linéaire connexe semi-simple (i. e. n'admettant pas de sous-groupe fermé résoluble connexe distingué $\neq \{e\}$ ) défini sur $P$ . On notera $G_P$ le groupe des points de $G$ rationnels sur $P$ . Un tore décomposé sur $P$ de $G$ est un sous-groupe algébrique $A$ de $G$ , défini sur $P$ et isomorphe sur $P$ à un produit $(G_m)^r$ de groupes multiplicatifs. Tout caractère de $A$ est alors rationnel sur $P$ . On sait (BOREL-TITS) que deux tores décomposés sur $P$ maximaux sont conjugués par un automorphisme intérieur défini par un élément de $G_P$ . Un sous-groupe parabolique de $G$ est un sous-groupe algébrique contenant un sous-groupe de Borel de $G$ . On sait que deux sous-groupes paraboliques définis sur $P$ minimaux sont conjugués par un élément de $G_P$ .

Soit $A$ un tore décomposé sur $P$ maximal, et soit $\Gamma$ un sous-groupe parabolique défini sur $P$ minimal contenant $A$ . Le centralisateur $Z$ de $A$ est un "sous-groupe de Lévi" réductif de $\Gamma$, et $\Gamma$ est produit semi-direct de $Z$ et de son radical unipotent $U$ , qui sont définis sur $P$ . Comme il existe un sous-groupe $Z' \subset Z$ tel que l'application $(x , a) \mapsto ax$ soit une isogénie de $Z' \times A$ sur $Z$ , l'ensemble des caractères $\chi$ de $A$ qui se prolonge en un caractère rationnel sur $P$ de $Z$ , trivial sur $Z'$ , est un sous-groupe $Y$ d'indice fini du groupe des caractères de $A$ , lequel est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}^r$ (avec $r = \dim A =$ P-rang de $G$ ). On a donc $Y \simeq \underset{\sim}{Z}^r$ .

Prenons maintenant $P = \underset{\sim}{R}$ , et soit $A_o$ la composante connexe de $e$ dans $A_{\underset{\sim}{R}}$ (pour la topologie localement compacte de $A_{\underset{\sim}{R}}$ ). On a alors :

(3) Quel que soit le sous-groupe compact maximal $K$ de $G_{\underset{\approx}{R}}$, on a $G_{\underset{\approx}{R}} = KA_o U_{\underset{\approx}{R}}$ (et même l'application $(k, a, u) \mapsto kau$ est un isomorphisme de variétés analytiques-réelles). Ceci constitue la "décomposition d'Iwasawa" de $G_{\underset{\approx}{R}}$.

Par ailleurs, on peut choisir $K$ de telle sorte que :

(4) Le normalisateur $N$ de $A$ dans $G$ est contenu dans $KZ$, et on a $G_{\underset{\approx}{R}} = K A_o K$ ("décomposition de Cartan"). Plus précisément, le choix de $\Gamma \supset A$ (ou de $U$) revient à choisir un système de racines simples de $G$ suivant $A$, et détermine une chambre de Weyl $A_o^+$ dans $A_o$ : c'est l'ensemble de $x \in A_o$ tels que $|\chi(x)| \geqslant 1$ pour tout caractère $\chi$ de $A$ intervenant dans la représentation adjointe de $A$ dans l'algèbre de Lie de $U$. On sait que $A_o^+$ est un domaine fondamental pour le groupe de Weyl $W = N/Z$ opérant sur $A_o$, et on peut préciser (4) en disant que $A_o^+$ est exactement un système de représentants des doubles classes modulo $K$ dans $G_{\underset{\approx}{R}}$.

Prenons désormais pour $P$ un corps valué non discret, non archimédien, pour une valuation discrète. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $P$, $\mathfrak{p}$ son idéal maximal, $\pi$ un générateur de $\mathfrak{p}$, $\varkappa = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ son corps résiduel. Un sous-groupe $K$ de $G_P$ sera dit borné si les coefficients des matrices des éléments de $K$ restent bornés dans une réalisation matricielle définie sur $P$ de $G$. On vérifie aisément que cela ne dépend pas de la réalisation matricielle choisie et est encore équivalent au fait suivant : Si $\rho$ est une représentation linéaire définie sur $P$ de $G$, de noyau fini, dans un espace vectoriel $V$ défini sur $P$, il existe un réseau $L$ de $V_P$ invariant pour tous les opérateurs $\rho(k)$ pour $k \in K$. Il en résulte que tout sous-groupe borné de $G_P$ est contenu dans un sous-groupe borné ouvert (pour la topologie définie par la valuation !) de $G_P$. Si $P$ est localement compact, les sous-groupes bornés ne sont autres que les sous-groupes relativement compacts de $G_P$.

Soit alors $Z_c$ l'ensemble des $x \in Z_P$ tels que $|\chi(x)| = 1$ pour tout $\chi \in Y$, et soit $\Delta = Z_P/Z_c$ : il est immédiat que $\Delta$ est un groupe isomorphe à $\underset{\sim}{Z}^r$ et l'image de $A_P$ par l'application canonique $\delta$ de $Z_P$ sur $\Delta$ est un sous-groupe d'indice fini de $\Delta$. De plus, le choix de $U$ détermine comme plus haut une "chambre de Weyl" $A_P^+$ dans $A_P$. Nous désignerons par $\Delta^+$ l'ensemble des $d \in \Delta$ tels qu'il existe un entier $n > 0$ avec $nd \in \delta(A_P^+)$.

On peut alors faire la conjecture suivante : il existe un sous-groupe borné $K$ de $G_P$ tel que

(5) $$K \supset Z_c \quad \text{et} \quad N \subset KZ$$

(6) $$G_P = KZ_P U_P$$

(7) $G_P = KZ_P K$. Plus précisément, toute double classe $C = K x K$ de $G_P$ ren-

contre $Z_P$ et $\delta(C \cap Z_P)$ contient exactement un point de $\Delta^+$ . Remarquons que (7) entraine que K est borné maximal.

(8) Il existe un ordre sur $\Delta$ tel que si $d$ , $d^+ \in Z_P$ avec $\delta(d^+) \in \Delta^+$ et $KdU_P \cap Kd^+K \neq \emptyset$ , alors $d \geqslant d^+$ et $Kd^+K \cap Kd^+U_P = Kd^+$ .

Lorsque P est localement compact, les relations (5) à (8) ont des conséquences intéressantes pour la théorie des représentations unitaires du groupe localement compact $G_P$ : par exemple l'algèbre (pour la convolution) des fonctions continues biinvariantes par K est commutative ([2], [3], [11]).

Nous pouvons donc résumer ainsi les problèmes posés :

a. Généralisation de (1) : existence de sous-groupes bornés maximaux.

Nous verrons que (2) n'est plus exact, d'où :

b. Classification à automorphismes intérieurs près des dits.

c. Existence d'au moins une "bonne" classe possédant les propriétés (5) à (8).

## 2. L'exemple le plus simple.

C'est celui de $G = SL(n)$ . On voit alors aussitôt que les sous-groupes bornés maximaux de $G_P = SL(n , P)$ sont exactement les sous-groupes $K_L$ formés des $x \in G_P$ laissant fixe un réseau L de $P^n$ , d'où (1) (avec borné au lieu de compact si P n'est pas localement compact). Deux tels sous-groupes sont conjugués par un automorphisme extérieur défini par un élément de $GL(n , P)$ , mais la considération des produits extérieurs d'une base de L montre qu'on obtient n classes de conjugaison par automorphismes intérieurs.

Par ailleurs, prenons $L = \mathcal{O}^n$ . On peut prendre pour A (resp. U ) le sous-groupe des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures unipotentes). On a $Z = A$ et N est le sous-groupe des matrices monomiales. On montre alors aisément par récurrence sur n que (5) et (6) sont exactes, et (7) et (8) résultent du théorème des diviseurs élémentaires. Des considérations analogues s'appliquent au groupe unimodulaire sur un corps gauche de centre P .

## 3. Existence de sous-groupes compacts maximaux.

Supposons P localement compact.

THÉORÈME (LANGLANDS). - Si G est réductif, tout sous-groupe compact de $G_P$ est contenu dans un sous-groupe compact maximal.

Comme G admet une représentation rationnelle sur P , de noyau fini et complètement réductible, on se ramène au cas où G est réalisé comme groupe irréductible sur $P$ d'automorphismes d'un vectoriel $V$. Il suffit de montrer que toute suite croissante de sous-groupes ouverts et compacts $K_n$ de $G_P$ est stationnaire, ou encore que la réunion $H$ des $K_n$ est relativement compacte. Soit $L$ un réseau de $V_P$, et posons :

$$X_n = \{x \in L \mid k.x \in L, \quad \forall k \in K_n\}$$

$$Y_n = X_n \cap (L - \pi L)$$

Les $Y_n$ forment une suite décroissante de compacts non vides. Donc $Y = \cap Y_n$ est non vide, et $X = \cap X_n$ est un sous-$\mathcal{O}$-module de $V_P$ non réduit à $0$ et invariant par $H$. Mais $H$ est ouvert dans $G_P$ (pour la topologie localement compacte), lequel est dense dans $G$ pour la topologie de Zariski (parce que $P$ est valué complet). Il en résulte que le sous-espace vectoriel engendré par $X$ dans $V$ est invariant par $G$ et défini sur $P$, donc égale $V$. Donc $X$ est un réseau de $V_P$ et $H$ est relativement compact.

Remarque. - En caractéristique zéro, si $G$ n'est pas réductif, il possède un sous-groupe unipotent $U$ défini sur $P$, distingué et isomorphe sur $P$ à un produit de groupes additifs. Alors $U_P$ n'est pas compact, mais est réunion d'une suite croissante de sous-groupes compacts. On en tire aisément que $G_P$ ne possède pas de sous-groupes compacts maximaux.

## 4. Existence de "bons" sous-groupes bornés maximaux : cas des groupes classiques ([3], [8], [11], [12], [13], [16]).

Nous avons déjà vu le cas $SL(n)$. La même méthode fournit une "bonne" classe de sous-groupes bornés maximaux des groupes isogènes, par exemple $PGL(n)$, mais il y a alors d'autres classes (voir n° 6).

Pour les autres groupes classiques, l'existence de bonnes classes résulte des propriétés des réseaux maximaux. Prenons par exemple pour $G$ le groupe orthogonal $SO(Q)$ d'une forme quadratique non dégénérée $Q$ sur un vectoriel $V$, définie sur $P$, et supposons $P$ complet, de caractéristique $\neq 2$. Si $L$ est un réseau de $V_P$, on appelle norme de $L$, l'idéal (fractionnaire) $n(L)$ engendré par les éléments $\frac{1}{2} Q(x)$ pour $x \in L$, et on dit que $L$ est maximal s'il est maximal parmi les réseaux de norme donnée (par homothétie, on se ramène soit à $n(L) = \mathcal{O}$, soit à $n(L) = p$). On peut alors, d'après EICHLER, trouver une base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathcal{O}$-module $L$ qui soit une "base de Witt" de $V_P$, c'est-à-dire telle que

$$(e_1, \dots, e_r) \quad \text{et} \quad (e_n, e_{n-1}, \dots, e_{n-r+1})$$

soient des bases en dualité de deux sous-espaces totalement isotropes maximaux

$V_1$ et $V_3$, tandis que $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ est une base orthogonale du sous-espace $V_2$ orthogonal à $V_1 + V_3$ (sous-espace qui est anisotrope), engendrant l'unique réseau maximal de norme $n(L)$ de $(V_2)_P$. On peut alors prendre pour $A$ (resp. $U$) la composante connexe du sous-groupe des éléments de $G$ dont la matrice par rapport à cette base est diagonale (resp. triangulaire supérieure unipotente) et par $K = K_L$ le sous-espace des éléments de $G_P$ laissant fixe le réseau $L$. Les propriétés (5) à (8) sont alors vérifiées : elles se démontrent par récurrence sur $\dim V$ et (7), par exemple, résulte du théorème d'Eichler sur la comparaison de deux réseaux maximaux $L_1$ et $L_2$ : il existe une base de Witt $(e_i)$ de $L_1$ et des scalaires $\lambda_i$ tels que $(\lambda_i e_i)$ soit une base de Witt de $L_2$.

On obtient ainsi deux "bonnes" classes qui tantôt sont conjuguées par automorphismes extérieurs, tantôt ne le sont pas (cela dépend de la partie anisotrope de $Q$). On a les mêmes résultats pour les autres "groupes classiques" (**symplectiques**, unitaires, etc.).

5. Cas des groupes déployés ([4], [5]).

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $R$ le système des racines de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$. Pour $\alpha \in R$, on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X, \quad \forall\ H \in \mathfrak{h}\},$$

on sait que $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, et il existe un unique élément $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tel que

$$\alpha(H_\alpha) = 2 \quad \text{et} \quad H_\alpha \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}].$$

On a $\beta(H_\alpha) \in \underset{\sim}{Z}$ pour $\alpha, \beta \in R$. CHEVALLEY a montré ([6]) qu'on peut choisir $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ tels que

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha \qquad [X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta}\, X_{\alpha+\beta}$$

avec $N_{\alpha,\beta} \in \underset{\sim}{Z}$ et même $|N_{\alpha,\beta}| \leqslant 3$. Le $\underset{\sim}{Z}$-module engendré par les $H_\alpha$ et les $X_\alpha$ est alors une $\underset{\sim}{Z}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}}$.

Posons $\mathfrak{g}_P = \mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}} \otimes P$ et $\mathfrak{g}_\mathcal{O} = \mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}} \otimes \mathcal{O}$ : alors $\mathfrak{g}_\mathcal{O}$ s'identifie à un réseau de $\mathfrak{g}_P$ que nous appellerons réseau de Chevalley de $\mathfrak{g}_P$. Soit de plus $\Gamma$ un sous-groupe de groupe des poids $\Pi$ de $\mathfrak{g}$ suivant $\mathfrak{h}$, contenant le sous-groupe $\Sigma$ engendré par $R$. Alors à $\mathfrak{g}$, $P$ et $\Gamma$ est associé un groupe semi-simple $G$ défini sur $P$ qui est dit déployé ([7]), et $G$ admet une représentation rationnelle définie sur $P$ de noyau fini dans $\mathfrak{g}_P$, dite représentation adjointe et notée ad. Pour $\Gamma = \Sigma$, on obtient le groupe adjoint (et ad est injective), pour $\Gamma = \Pi$, on obtient le groupe simplement connexe.

A chaque racine $\alpha$, est associé un isomorphisme défini sur $P$, $x_\alpha$ du groupe additif $G_\alpha$ sur un sous-groupe unipotent $U_\alpha$ de $G$ , tel que

$$\mathrm{ad}\, x_\alpha(t) = \exp(t\, \mathrm{ad}\, X_\alpha) \qquad \text{pour} \quad t \in P .$$

Nous poserons

$$\mathfrak{X}_\alpha = (U_\alpha)_P = x_\alpha(P) .$$

De plus à $\mathfrak{h}$ est associé un tore décomposé maximal $A$ de $G$ et un isomorphisme $\chi \rightsquigarrow h_\chi$ de $\mathrm{Hom}(\Gamma , P^*)$ sur $A_P$ tel que $\mathrm{ad}\, h_\chi(H_\alpha) = H_\alpha$ et $\mathrm{ad}\, h_\chi(X_\alpha) = \chi(\alpha)X_\alpha$ . Si l'on choisit un système de racines simples, donc de racines positives, on peut prendre pour sous-groupe unipotent maximal normalisé par $A$ le sous-groupe $U$ (resp. $V$ ) engendré par les $U_\alpha$ pour $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$ ) et $\mathfrak{U} = U_P$ (resp. $\mathfrak{V} = V_P$ ) est engendré par les $\mathfrak{X}_\alpha$ pour $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$ ) (et en est d'ailleurs le produit).

Supposons $P$ complet, de caractéristique zéro, et $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ de caractéristique $\neq 2 , 3 , 5$ . On peut alors montrer que le <u>sous-groupe</u> $K$ <u>des éléments de</u> $G_P$ <u>qui conservent</u> $\mathfrak{g}_\mathcal{O}$ <u>vérifie</u> (5) <u>à</u> (8).

La démonstration repose sur le fait que $\mathfrak{g}_\mathcal{O}$ (ou plutôt un réseau $L$ un peu plus grand dont $\mathfrak{g}_\mathcal{O}$ est le réseau dérivé) possède une représentation linéaire (sur $\mathcal{O}$ ), $\rho$ , de forme trace $\mathrm{Tr}(\rho(X)\, \rho(Y))$ fortement non dégénérée (i. e. définissant un isomorphisme de $L$ sur son dual) et sur une généralisation du théorème de Jacobson-Morozov : on montre que si un élément primitif $X$ de $\mathfrak{g}_\mathcal{O}$ est "suffisamment nilpotent", alors il existe $Y$ et $H \in \mathfrak{g}_\mathcal{O}$ engendrant sur $X$ une sous-algèbre simple à 3 paramètres standard (i. e. tels que $[X , Y] = H$ , $[H , X] = 2X$ , $[H , Y] = -2Y$) Ceci permet de <u>caractériser</u> les réseaux de Chevalley de $\mathfrak{g}_P$ de manière moins "constructive" et de démontrer un théorème de comparaison de deux réseaux de Chevalley (associés à des sous-algèbres de Cartan différentes a priori) analogue au théorème d'Eichler. Pour cela, l'usage des éléments isotropes est remplacé par celui des sous-algèbres simples à 3 paramètres.

On obtient ainsi $\mathrm{Card}(\Gamma/\Sigma)$ classes de bons sous-groupes bornés maximaux, qui sont d'ailleurs conjugués par automorphismes extérieurs.

Ceci se généralise au cas des groupes semi-déployés qui se déployent sur une extension non ramifiée. D'autre part, ces résultats restent très probablement exacts en caractéristique $p \geqslant 7$ .

## 6. <u>Classification des sous-groupes bornés maximaux</u> : <u>cas classique</u> ([9]).

On suppose $P$ complet. Je me contenterai de deux exemples :

a <u>Le groupe projectif</u> $G = PGL(n)$. - Si $K$ est un sous-groupe borné maximal de

$G_P$ , son image réciproque $\tilde{K}$ dans $GL(n, P)$ n'est plus bornée. Cependant soit $G_1 = \{g \in GL(n, P) \mid \det g \in \mathcal{O}^*\}$ . Alors $K_1 = \tilde{K} \cap G_1$ est borné et laisse invariant un réseau $L_0$ de $P^n$ . De plus, si $C$ est le centre de $GL(n, P)$ , alors $\tilde{K}/K_1 C$ s'identifie à un sous-groupe de $GL(n, P)/G_1 C = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et est donc cyclique d'ordre $d$ , diviseur de $n$ . Les transformés de $L_0$ par $\tilde{K}$ forment donc $d$ familles de réseaux homothétiques et on montre qu'on a une suite infinie de réseaux

$$\cdots \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_d = \pi L_0 \supset \cdots$$

telle que $\dim L_i/L_{i+1} = \frac{n}{d}$ et $\tilde{K}$ est l'ensemble des $g$ laissant globalement invariante cette suite. Il en résulte que le nombre de classes de sous-groupes bornés maximaux de $G_P$ est égal au nombre de diviseurs de $n$ . Mais toutes ces classes ne sont pas "bonnes" : par exemple, $K$ ne satisfait pas à (5) pour $n = d = 3$ .

b. Groupe orthogonal (avec car $\mathcal{O}/p \geq 5$) : $G = SO(Q)$. - Si $K$ est un sous-groupe borné maximal de $G_P$ , il laisse invariant un réseau $L$ de $V_P$ et est contenu dans l'ordre maximal $\Omega = \operatorname{End} L$ de $\operatorname{End} V_P$ . Soit $g^*$ l'adjoint de $g \in \operatorname{End} V_P$ : on a donc $K \subset \Omega \cap \Omega^*$ et on peut supposer que $\Omega \cap \Omega^*$ est maximal parmi les ordres de ce type. Or on peut montrer que si $\Omega_1$ , $\Omega_2$ , $\Omega_1'$ , $\Omega_2'$ sont quatre ordres maximaux de $\operatorname{End} V_P$ tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_1' \cap \Omega_2'$ , alors $\{\Omega_1, \Omega_2\} = \{\Omega_1', \Omega_2'\}$ (ceci ne serait plus exact pour plus de 2 ordres maximaux de chaque côté). Par suite, $\Omega \cap \Omega^*$ n'est contenu dans aucun ordre maximal $\neq \Omega$ et $\Omega^*$ . Or on a $\Omega^* = x^{-1}\Omega x$, où $x$ est un élément de $\operatorname{End} V_P$ dont la matrice par rapport à une base de $L$ est égale à la matrice $S$ de $Q$ par rapport à cette base. Le théorème des diviseurs élémentaires permet alors de montrer que le fait que $\Omega \cap x^{-1}\Omega x$ ne soit contenu dans aucun autre ordre maximal entraîne que les facteurs invariants de $S$ sont tous égaux soit à $\pi^\nu$ , soit à $\pi^{\nu+1}$ . Il en résulte qu'on peut supposer (quitte à faire une homothétie, ou à remplacer $L$ par $x^{-1}L$ ) que les facteurs invariants de $S$ sont $1$ et $\pi$ . On montre alors qu'il existe une base de Witt $(e_i)$ de $V$ (au sens du n° 4) telle que $L$ soit engendré par les éléments

$$\pi e_1 , \ldots , \pi e_k , e_{k+1} , \ldots , e_n \qquad \text{où } 0 \leq k \leq r .$$

On obtient ainsi que le nombre de classes de sous-groupes bornés maximaux est égal à $r + 1$ (où $r$ est l'indice de la forme quadratique $Q$ ).

7. Travaux de IWAHORI et MATSUMOTO sur les groupes déployés ([10]).

On reprend les notations du n° 5 et on suppose $\mathfrak{g}$ simple (pour simplifier ...). On pose :

$A_{\mathcal{O}} = \{h_\chi \mid \chi \in \mathrm{Hom}(\Gamma , \mathcal{O}^*)\}$ .

$U_{\mathcal{O}}$ (resp. $V_{\mathcal{O}}$ ) = sous-groupe engendré par les $x_\alpha(\mathcal{O})$ pour $\alpha > 0$ (resp. $\alpha < 0$ ), et $U_p$ = sous-groupe engendré par les $x_\alpha(p)$ pour $\alpha > 0$ .

K = sous-groupe engendré par $U_{\mathcal{O}}$ , $V_{\mathcal{O}}$ et $A_{\mathcal{O}}$ (on verra que K est bien le stabilisateur du réseau de Chevalley $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ ).

B = sous-groupe engendré par $U_p$ , $V_{\mathcal{O}}$ et $A_{\mathcal{O}}$ (si l'on considère K comme groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathcal{O}}$ , et si l'on le "réduit modulo p ", B est l'image réciproque d'un sous-groupe de Borel du groupe réduit $\overline{K}$ , qui n'est autre que le groupe simple associé à $\mathfrak{g}$ , $\mathcal{O}/p$ et $\Gamma$ ).

N = normalisateur de A .

$W = N_p/A_p$ : c'est le groupe de Weyl de G , qu'on peut réaliser comme groupe de transformations orthogonales dans l'espace euclidien $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , et est engendré par des symétries $w_1$ , ... , $w_r$ correspondant aux racines simples $\alpha_1$ , ... , $\alpha_r$ . On désigne par $\widetilde{W}$ le "groupe de Weyl affine", produit semi-direct de W et du groupe engendré par les translations de vecteurs $H_\alpha$ $(\alpha \in R)$ . On sait que $\widetilde{W}$ est engendré par W et la symétrie $w_0$ par rapport à l'hyperplan $\alpha_0 = 1$ dans $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ , où $\alpha_0$ est la plus grande racine de $\mathfrak{g}$ .

On montre alors que $\hat{W} = N_p/A_{\mathcal{O}}$ est produit semi-direct d'un sous-groupe distingué isomorphe à $\widetilde{W}$ et d'un groupe fini $\Omega$ isomorphe à $\Pi/\Gamma$ . Le sous-groupe $\Omega$ opérant sur $\widetilde{W}$ permute les générateurs $w_0$ , ... , $w_r$ et est ainsi réalisé comme groupe d'automorphismes du "schéma de Dynkin complété" de $\mathfrak{g}$ (schéma dont les r + 1 sommets correspondent aux racines $\alpha_0$ , $\alpha_1$ , ... , $\alpha_r$ , reliés par des traits suivant les règles habituelles).

Posons $N_{\mathcal{O}} = N_p \cap K$ : on a $N_{\mathcal{O}}/A_{\mathcal{O}} = W$ .

PROPOSITION. - <u>On a</u> $K = U_p V_{\mathcal{O}} N_{\mathcal{O}} V_{\mathcal{O}}$ . <u>Plus précisément,</u> K <u>est réunion disjointe des sous-ensembles</u> $U_p V_{\mathcal{O}} A_{\mathcal{O}} \omega V_{\mathcal{O}}$ , <u>où</u> $\omega$ <u>décrit un système de représentants de</u> W <u>dans</u> $N_{\mathcal{O}}$ .

Autrement dit, la "décomposition de Bruhat" de $\overline{K}$ en doubles classes modulo $\overline{B}$ provient d'une décomposition analogue de K . Pour le voir, on montre, en utilisant les relations de commutation des $U_\alpha$ , que $U_p V_{\mathcal{O}} N_{\mathcal{O}} V_{\mathcal{O}}$ est stable par multiplication à gauche par des générateurs de K . On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE. - $B = U_p A_{\mathcal{O}} V_{\mathcal{O}}$ .

Ce corollaire est techniquement fondamental pour la suite.

Supposons tout d'abord que $G$ soit le groupe simplement connexe ($\Omega = \{e\}$). On montre alors que le triple $(G_P, B, N_P)$ satisfait aux conditions axiomatiques de Tits ([14]) : si $\omega_i$ $(0 \leq i \leq r)$ est un représentant de $w_i$ dans $N_P$, on a

$$\omega_i B \omega B \subset B \omega B \cup B \omega_i \omega B \qquad \text{pour tout } \omega \in N_P$$
$$\omega_i B \omega_i^{-1} \neq B$$

et $G_P$ est engendré par $N_P$ et $B$. On en déduit d'après TITS, les résultats suivants :

a. $G_P = B N_P B$ et toute double classe $B x B$ rencontre $N_P$ suivant une classe modulo $A_\Theta$ : on peut écrire $G_P = B \tilde{W} B$.

b. $K = B N_\Theta B = B W B$ et $K = G_P \cap \operatorname{End} g_\Theta$.

c. $G_P = K A_P K$ (cf. (7)).

d. Les sous-groupes de $G_P$ contenant $B$ sont de la forme $B \tilde{W}_J B$, où $\tilde{W}_J$ est le sous-groupe de $\tilde{W}$ engendré par les $w_i$ pour $i$ décrivant une partie

$$J \subset J_o = \{0, 1, \ldots, r\},$$

et sont deux à deux non conjugués. Comme $\tilde{W}_J$ est fini pour $J \neq J_o$, ces sous-groupes sont bornés, et on voit que $B$ est contenu dans $r + 1$ sous-groupes bornés maximaux, deux à deux non conjugués.

Si $G$ n'est pas simplement connexe, les sous-groupes de $G_P$ contenant $B$ correspondent aux couples $(H, J)$ formés d'un sous-groupe $H \subset \Omega$ et d'une partie $J \subset J_o$ stable par $H$ et les sous-groupes correspondant à $(H_1, J_1)$ et $(H_2, J_2)$ sont conjugués dans $G_P$ (resp. contenus l'un dans l'autre) si $H_1 = H_2$ et si $J_2$ est transformé de $J_1$ par un élément de $\Omega$ (resp. $H_1 \subset H_2$ et $J_1 \subset J_2$). Les sous-groupes maximaux contenant $B$ correspondent soit aux couples $(H, J_o)$ où $H$ est un sous-groupe maximal de $\Omega$, soit aux couples $(\Omega, J)$ où $J$ est le complémentaire d'une orbite de $\Omega$ dans $J_o$, et seuls les seconds sont bornés. Les sous-groupes bornés maximaux contenant $B$ correspondent aux couples $(H, J)$ où $J$ est le complémentaire d'une orbite de $H$, qui n'est pas stable pour un sous-groupe plus grand de $\Omega$. Pour $G = PGL(n)$ par exemple, on trouve ainsi que le nombre de classes de sous-groupes maximaux contenant $B$ est égal à $1 +$ le nombre de diviseurs premiers de $n = r + 1$, tandis que le nombre de classes de sous-groupes bornés maximaux contenant $B$ est égal au nombre de diviseurs de $n$.

On constate alors que pour tous les groupes classiques déployés, on ne retrouve le même nombre de classes de sous-groupes bornés maximaux que par la méthode d'Hijikata. Il en résulte a posteriori que si $G$ est un groupe classique déployé, tout sous-groupe borné maximal contient un conjugué de B et que la méthode de IWAHORI et MATSUMOTO donne toutes les classes. Mais on ne connait pas de démonstration a priori de ce résultat, qui pourrait être inexact pour des groupes exceptionnels, ou même des groupes isogènes à des produits de groupes classiques déployés.

Ceci reste donc un problème ouvert. Reste également ouvert le cas des groupes exceptionnels non déployés (existence d'une "bonne" classe et classification) et aussi le problème de la détermination des "bonnes" classes.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.). - Ensembles fondamentaux pour les groupes arithmétiques, Colloque sur la théorie des groupes algébriques [1962. Bruxelles], p. 23-40. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[2] BRUHAT (F.). - Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, Bull. Soc. math. France, t. 89, 1961, p. 43-75.

[3] BRUHAT (F.). - Sur les représentations des groupes classiques p-adiques, I., II., Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 327-338 et 343-368.

[4] BRUHAT (F.). - Sur les sous-groupes compacts maximaux des groupes semi-simples p-adiques, Colloque sur la théorie des groupes algébriques [1962. Bruxelles], p. 69-76. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[5] BRUHAT (F.). - Sur une classe de sous-groupes compacts maximaux des groupes de Chevalley sur un corps p-adique, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques (à paraître).

[6] CHEVALLEY (C.). - Sur certains groupes simples, Tôhoku math. J., t. 7, 1955, p. 14-66.

[7] CHEVALLEY (C.). - Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire 1956-1958. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.

[8] EICHLER (M.). - Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. - Berlin, Springer-Verlag, 1952 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, 63).

[9] HIJIKATA (H.). - Sous-groupes compacts maximaux des groupes classiques p-adiques, Sugaku no Ayumi, 1963, p. 66-77 [en japonais].

[10] IWAHORI (N.) and MATSUMOTO (H.). - On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley group, Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques (à paraître).

[11] SATAKE (I.). - Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic field. - Paris, Presses universitaires de France, 1963 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 18, p. 5-69).

[12] SHIMURA (G.). - Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms, J. Math. Soc. Japan, t. 15, 1963, p. 33-65.

[13] TAMAGAWA (T.). - On the $\zeta$-function of a division algebra, Annals of Math., t. 77, 1963, p. 387-405.

[14] TITS (J.). - Théorème de Bruhat et sous-groupes paraboliques, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2910-2912.

[15] TITS (J.). - Groupes semi-simples isotropes, Colloque sur la théorie des groupes algébriques [1962. Bruxelles], p. 137-147. - Louvain, Librairie universitaire ; Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[16] TSUKAMOTO (T.). - On the local theory of quaternionic anti-hermitian forms, J. Math. Soc. Japan, t. 13, 1961, p. 387-400.