

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LAURENT SCHWARTZ

## **Les travaux de Seeley sur les opérateurs intégraux singuliers sur une variété**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 269, p. 385-399

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1962-1964\\_\\_8\\_\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__385_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES TRAVAUX DE SEELEY  
SUR LES OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS SUR UNE VARIÉTÉ

par Laurent SCHWARTZ

Les opérateurs intégraux singuliers ont été étudiés par un grand nombre d'auteurs, notamment GIRAUD, MIHLIN, CALDERON, SYGMUND, COHBERG. SEELEY les a étendus récemment aux sections d'espaces fibrés à fibres vectorielles sur une variété, rendant ainsi possible la démonstration de la formule de l'indice d'Atyah-Singer. Le nom d'opérateur intégraux singuliers était valable pour les opérateurs d'ordre 0, qui pouvaient se représenter à l'aide d'intégrales utilisant des noyaux singuliers ; mais les opérateurs différentiels d'ordre  $m$  sont des opérateurs intégraux singulier d'ordre  $m$ , de sorte que leur nom n'est plus du tout adapté. Nous proposons de les appeler opérateurs de Calderon-Zygmund, étant donnée l'importance des travaux de ces auteurs sur ces opérateurs et leurs applications.

1. Les espaces  $H^s$  sur un espace vectoriel  $X$  de dimension finie.

Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{R}$ , muni d'une mesure de Lebesgue  $dx$ . On appellera  $E$  son dual,  $d\xi$  la mesure de Lebesgue associée à  $dx$  sur  $E$ , et  $(x, \xi) \rightarrow \langle x, \xi \rangle$  le produit scalaire de dualité sur  $X \times E$ .

On appelle  $H^0 = H^0(X)$  l'espace  $L^2(X; dx)$ , considéré comme sous-espace de l'espace  $\mathcal{O}'(X)$  des distributions complexes sur  $X$ . Ensuite  $H^m$ ,  $m$  entier  $\geq 0$ , est l'espace des distributions qui sont, ainsi que leurs dérivées d'ordre  $\leq m$ , des éléments de  $H^0$ ; en choisissant une base dans  $X$ , et en posant

$$(1.1) \quad D^p = \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}, \quad \text{pour } p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$$

on peut munir  $H^m$  de la norme

$$(1.2) \quad \|T\|_{H^m}^2 = \sum_{|p| \leq m} \|D^p T\|_{L^2}^2$$

qui en fait un espace hilbertien. Si l'on change la base, la norme, c'est-à-dire la structure hilbertienne, varie, mais non la topologie qu'elle définit;  $H^m$  est donc un espace vectoriel topologique hilbertisable. Soit  $T$  une distribution de  $H^m$ ; elle est alors tempérée puisque dans  $L^2$ ; soit  $\hat{T} = \mathcal{F}T$  son image de Fourier, distribution tempérée sur le dual  $E$  de  $X$ :

$$(1.3) \quad \hat{T}(\xi) = \int_X T(x) \exp(-2i\pi\langle x, \xi \rangle) dx \quad .$$

Si nous choisissons une forme quadratique définie positive sur  $X$ , notée  $x \rightarrow |x|^2$ , et si  $\xi \rightarrow |\xi|^2$  est la forme adjointe (ou duale) sur  $\Xi$ , la norme définie par (1.2) est équivalente à celle qu'on peut définir par FOURIER :

$$(1.4) \quad \|T\|_m = \|\hat{T}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{m/2}\|_{L^2} \quad .$$

Nous sommes donc naturellement amenés à définir des espaces  $H^s = H^s(X)$  pour tout  $s$  réel :  $H^s$  est l'espace des distributions tempérées  $\mathcal{T}$  sur  $X$ , dont l'image de Fourier  $\hat{T}$  est une fonction sur  $\Xi$ , telle que  $\hat{T}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}$  soit dans  $L^2(\Xi)$  ; on pourra prendre sur  $H^s$  la norme :

$$(1.5) \quad \|T\|_s = \|\hat{T}(\xi) (1 + |\xi|^2)^{s/2}\|_{L^2} \quad .$$

Si on change la forme quadratique, l'espace  $H^s$  ne change pas, ni sa topologie, seule sa norme change ; c'est un espace vectoriel topologique hilbertisable. On a l'inclusion continue :  $H^s \subset H^t$  pour  $s \geq t$  ; on appellera  $H^{+\infty}$  l'intersection des  $H^s$  pour  $s$  réel,  $H^{-\infty}$  leur réunion. On a les inclusions continues et denses  $\mathcal{S} \subset H^s \subset \mathcal{S}'$  ; par transposition, on en déduit l'inclusion des duals forts  $\mathcal{S} \subset (H^s)' \subset \mathcal{S}'$  ; on peut donc identifier  $(H^s)'$  à un sous-espace hilbertisable de  $\mathcal{S}'$  ; on voit aussitôt que c'est  $H^{-s}$ , et que, pour tout choix d'une forme quadratique  $|x|^2$ , la norme de dual de  $H^s$  est exactement la norme de  $H^{-s}$ .

## 2. Les opérateurs $(\alpha)$ et $(\beta)$ ; le lemme de commutation.

Pour  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ , nous baptiserons  $(\alpha)$  l'opérateur de multiplication  $T \rightarrow \alpha T$ . Pour  $\beta$  fonction sur  $\Xi$ ,  $(\beta)$  sera l'opérateur (sur les distributions sur  $X$ ) :  $T \rightarrow \overline{\mathcal{F}}(\beta(\mathcal{F}T))$  ; il revient à multiplier par  $\beta$  les images de Fourier, donc c'est aussi la convolution  $T \rightarrow B \star T$ ,  $B = \overline{\mathcal{F}}\beta$ . On démontre sans peine que  $(\alpha)$  opère continûment de  $H^s$  dans  $H^s$ . Quant à  $\beta$ , nous devons supposer que c'est une fonction mesurable, localement bornée, et  $O(|\xi|^\rho)$  pour  $|\xi| \rightarrow \infty$  ( $\rho$  réel) ; alors, pour tout  $s$ ,  $(\beta)$  opère continûment de  $H^s$  dans  $H^{s-\rho}$ . Bien entendu deux opérateurs du type  $(\alpha)$  commutent, ainsi que deux opérateurs du type  $(\beta)$ , mais un opérateur  $(\alpha)$  et un opérateur  $(\beta)$  ne commutent pas. Cependant :

PROPOSITION 1 (lemme de commutation). - Soit  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ , et soit  $\beta$  une fonction sur  $\Xi$ , mesurable et localement bornée, qui est  $O(|\xi|^\rho)$  pour  $|\xi| \rightarrow \infty$ , de classe  $C^1$  dans le complémentaire d'un compact, et dont la dérivée est  $O(|\xi|^{\rho-1})$  pour  $|\xi| \rightarrow \infty$  ; alors le crochet

$$[(\alpha), (\beta)] = (\alpha)(\beta) - (\beta)(\alpha)$$

opère continûment, quel que soit  $s$  réel, de  $H^s$  dans  $H^{s-\rho+1}$ .

La démonstration est technique, simple d'ailleurs, vu qu'elle se fait en partageant une intégrale en deux morceaux, procédé déjà connu de nos ancêtres.

Par ailleurs, chaque opérateur  $(\alpha)$  a les propriétés suivantes : il opère de  $\mathcal{O}$  dans  $\mathcal{E}$ , de  $\mathcal{E}'$  dans  $\mathcal{O}'$ , et le support singulier de l'image  $\alpha T$  d'une distribution  $T$  est contenu dans le support singulier de cette distribution : on dira encore que  $(\alpha)$  est "très régulier" (rappelons que le support singulier d'une distribution est le complémentaire du plus grand ouvert de  $X$  où elle est une fonction  $C^\infty$ ). Pour qu'un opérateur  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{O}'$ , soit très régulier, il faut et il suffit que le noyau qui le définit d'après le théorème des noyaux ait son support singulier dans la diagonale  $\Delta$  de  $X \times X$ , autrement dit soit une fonction  $C^\infty$  dans le complémentaire de cette diagonale. On peut donc représenter l'espace des opérateurs très réguliers par

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}; \mathcal{E}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{E}'; \mathcal{O}') \cap \mathcal{E}(\Delta) \quad ,$$

et le munir de la topologie borne supérieure des trois topologies induites ; il est alors complet. On le notera  $\mathcal{LR}(X)$ . L'opérateur  $(\beta)$  n'est pas en général très régulier ; mais nous particulariserons considérablement les  $\beta$ , et alors il en sera ainsi. Puisque  $(\beta)$  est l'opérateur  $B \star$ ,  $B = \mathcal{F}\beta$ , il suffira que  $B$  soit  $C^\infty$  dans le complémentaire de l'origine pour que  $(\beta)$  soit très régulier. Or :

PROPOSITION 2. - Si  $\beta$  est une fonction mesurable sur  $E$ , localement bornée,  $C^\infty$  dans le complémentaire d'un compact et s'il existe  $\rho$  réel tel que l'on ait, pour tout entier  $m \geq 0$  ;

$$(2.1) \quad |\beta^{(m)}(\xi)| = O(|\xi|^{\rho-m}) \quad \text{pour } |\xi| \rightarrow \infty \quad ,$$

alors  $B \star = (\beta)$  est très régulier ( $B$  est  $C^\infty$  dans  $\mathcal{O}$ ).

C'est évident. Car d'abord on peut supposer  $\beta$  partout  $C^\infty$ , puisque l'image de Fourier  $\mathcal{F}$  d'une distribution à support compact est analytique ; ensuite, pour tout multi-indice de dérivation  $p \in \mathbb{N}^n$ ,

$$\mathcal{F}(|-2i\pi x|^{2\sigma} D^p B) = \Delta^\sigma(\xi^p \beta(\xi))$$

est dans  $L^1$  si  $|p| + \rho - 2\sigma < -n$ , ce qui entraîne que  $|x|^{2\sigma} D^p B$  soit continue, donc  $D^p B$  continue dans  $\mathcal{O}$  ; donc  $B$  est bien  $C^\infty$  dans  $\mathcal{O}$ .

Nous retiendrons en particulier que, si  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ , et si  $\beta$  est mesurable, localement bornée, et, dans le complémentaire d'un compact,  $C^\infty$  et homogène de degré  $\rho$ , on pourra appliquer les propositions 1 et 2. ("Homogène de degré  $\rho$ " est une propriété locale équivalente par exemple à l'équation d'Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \rho f \quad .)$$

3. Les opérateurs de Calderon-Zygmund sur  $X$ , leur symbole, et leurs principales propriétés.

Appelons  $\mathcal{L}(X, \rho)$  l'espace des opérateurs très réguliers qui, pour tout  $s$ , opèrent de  $H^s$  dans  $H^{s-\rho}$ ; autrement dit,

$$\mathcal{L}(X, \rho) = \bigcap_s \mathcal{L}(H^s; H^{s-\rho}) \cap \mathcal{CR}(X) \quad ;$$

on le munira de la topologie borne supérieure des topologies induites, pour laquelle il est complet.  $\mathcal{L}(X; \rho + 1)$  sera aussi appelé l'espace des opérateurs  $\rho$ -améliorants, et noté  $\mathcal{A}(X; \rho)$ .

Appelons  $\Sigma$  le complémentaire de  $0$  dans  $E$ . Appelons  $\mathcal{E}(\Sigma, \rho)$  l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $\Sigma$ , homogène de degré  $\rho$  réel. Soit d'autre part  $|x|^2$  une forme quadratique sur  $X$ ,  $|\xi|^2$  sa forme adjointe sur  $E$ . Alors, si  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$  et  $\beta \in \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$ , on pourra définir l'opérateur

$$(3.1) \quad \theta_\rho(\alpha, \beta) = (\alpha) \left( \frac{\beta(\xi)}{|\xi|^\rho} (1 + |\xi|^2)^{\rho/2} \right)$$

(remarquer que  $\frac{\beta(\xi)}{|\xi|^\rho}$  est homogène de degré  $0$  dans  $\Sigma$ ,  $C^\infty$  dans  $\mathcal{C}0$ ; elle est donc une fonction mesurable et bornée sur  $X$ ; il en serait de même pour  $\beta$  pour  $\rho \geq 0$ , mais pas pour  $\rho < 0$ ).

Il est très régulier d'après la proposition 2, et, pour tout  $s$ , opère de  $H^s$  dans  $H^{s-\rho}$ . Nous remarquerons en outre que

$$\theta_\rho(\alpha, \beta) \mapsto \theta(\alpha, \beta)$$

est bilinéaire continue de  $\mathcal{S}(X) \times \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$  dans l'espace complet  $\mathcal{L}(X; \rho)$ ; elle se prolonge donc de manière unique en une application linéaire continue  $\theta_\rho$  de  $\mathcal{S}(X) \hat{\otimes}_\pi \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$  dans  $\mathcal{L}(X; \rho)$ . Mais  $\mathcal{S}(X)$  est nucléaire, de sorte que  $\hat{\otimes}_\pi = \hat{\otimes}_\varepsilon$ , et

$$\mathcal{S}(X) \hat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{E}(\Sigma, \rho) = \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho) \quad ,$$

espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $X \times \Sigma$ , homogènes de degré  $\rho$  en  $\xi$  pour tout  $x \in X$ , et dont toute dérivée  $D_x^p D_\xi^q$ , multipliée par tout polynôme en  $x$  et par  $|\xi|^{-\rho+|q|}$ , est bornée.

appellera  $\Gamma(X; \rho)$ , ou espace des opérateurs de Calderon-Zygmund d'ordre  $\rho$  sur  $X$ , la somme directe de l'image  $\theta_\rho(\mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho))$  et de l'espace  $\mathcal{A}(X; \rho)$  des opérateurs  $\rho$ -améliorants. Comme  $\theta_\rho$  dépend de la forme quadratique, il en est de même a priori de  $\Gamma(X; \rho)$  (sauf pour  $\rho = 0$ ).

PROPOSITION 3. - Si  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho)$ ,  $g \in \mathcal{S}(X \times \Sigma; \sigma)$ , donc  $fg \in \mathcal{S}(X \times \Sigma; \rho + \sigma)$ , on a :

$$(3.2) \quad \theta_{\rho+\sigma}(fg) - \theta_\rho(f) \theta_\sigma(g) \in \mathcal{A}(X; \rho + \sigma) \quad .$$

La composition des opérateurs définit donc une application bilinéaire de  $\Gamma(X; \rho) \times \Gamma(X; \sigma)$  dans  $\Gamma(X; \rho + \sigma)$  .

En particulier  $\Gamma(X; 0)$  est une algèbre d'opérateurs (sans élément unité).  
Pour  $f$  et  $g$  décomposables

$$f(x, \xi) = \alpha(x) \beta(\xi) \quad g(x, \xi) = \gamma(x) \delta(\xi) \quad ,$$

cela résulte simplement de la proposition 1 ; pour  $f$  et  $g$  quelconques, d'un passage à la limite, ou prolongement par continuité.

PROPOSITION 4. - Le complexe conjugué, le transposé, l'adjoint d'opérateurs de  $\Gamma(X; \rho)$  sont encore dans  $\Gamma(X; \rho)$  . En outre, si on pose  $\check{f}(x, \xi) = f(x, -\xi)$  ;

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \overline{\theta_\rho(f)} &= \theta_\rho(\check{f}) \\ {}^t(\theta_\rho(f)) - \theta_\rho(\check{f}) &\in \mathcal{A}(X; \rho) \\ (\theta_\rho(f))^* - \theta_\rho(\overline{f}) &\in \mathcal{A}(X; \rho) \quad . \end{aligned}$$

Même démonstration, en utilisant simplement le fait que, pour  $\beta$  fonction sur  $\Sigma$ , on a

$$\overline{(\beta)} = \check{(\beta)} \quad , \quad {}^t(\beta) = \check{(\beta)} \quad , \quad (\beta)^* = \overline{(\beta)} \quad ,$$

et que pour deux opérateurs  $u, v$ ,

$$\overline{uv} = \overline{u} \overline{v} \quad , \quad {}^t(uv) = {}^t_v {}^t_u \quad , \quad (uv)^* = v^* u^* \quad .$$

Les espaces  $\Gamma(X; \rho)$  ainsi définis dépendent apparemment de la forme quadratique  $|x|^2$  choisie sur  $X$ . Il n'en est rien, car, si  $|x|_1^2$  et  $|x|_2^2$  sont deux telles formes, et si l'on appelle  $\theta_{\rho,1}$  et  $\theta_{\rho,2}$  les deux applications relatives à ces deux formes, il résulte de la proposition 1 que

$$(3.4) \theta_{\rho,2}(\alpha, \beta) - \theta_{\rho,1}(\alpha, \beta) = (\alpha) \left( \frac{\beta(\xi)}{|\xi|_2^\rho} \left( \frac{1 + |\xi|_2^2}{1 + |\xi|_1^2} \right)^{\rho/2} - \frac{|\xi|_2^\rho}{|\xi|_1^\rho} (1 + |\xi|_1^2)^{\rho/2} \right)$$

donc on a toujours  $\theta_{\rho,2}(f) - \theta_{\rho,1}(f) \in \mathcal{A}(X; \rho)$ , ce qui prouve bien l'indépendance de  $\Gamma(X; \rho)$  par rapport à la forme quadratique.

PROPOSITION 5. - Si  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ ,  $\beta \in \mathcal{E}(\Sigma; \rho)$ ,  $\rho \geq 0$ , l'opérateur  $(\alpha)(\beta)$  est dans  $\Gamma(X; \rho)$ , et

$$\theta_\rho(\alpha, \beta) - (\alpha)(\beta) \in \mathcal{A}(X; \rho) \quad .$$

Si  $P(x, D)$  est un opérateur différentiel d'ordre  $\leq m$  à coefficients dans  $\mathcal{S}(X)$ , avec

$$P(x, D) = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) D^p \quad ,$$

alors  $P$  est dans  $\Gamma(X; m)$ , et

$$P - \theta_m \left( \sum_{|p|=m} a_p(x) \xi^p \right) \in \mathcal{A}(X; m) \quad .$$

#### 4. L'application symbole.

LEMME des  $\varphi_j$ . - Pour tout  $a \in X$ ,  $b \in \Sigma$  il existe une suite de fonctions  $\varphi_j$  de  $L^2(X)$ , de norme 1, ayant les propriétés suivantes :

1° leur support est compact et tend vers  $\{a\}$  pour  $j$  infini, donc elles convergent faiblement vers 0 pour  $j$  infini ;

2° pour toute  $f \in \mathcal{S}(X \times \Sigma; 0)$ ,  $\theta_0(f) \varphi_j - f(a, b) \varphi_j$  converge vers 0 dans  $L^2$ .

$I_1$  suffit de choisir une fonction  $\psi$  de  $L^2$  à support compact, et de prendre

$$(4.1) \quad \varphi_j(x) = j^{n/2} \exp(-2i\pi j^2 \langle x, b \rangle) \psi(j(x - a)) \quad .$$

Les  $\varphi_j$  ont bien la norme 1 ; leur support se concentre au point  $a$  pour  $j$  infini, de sorte qu'elles convergent faiblement vers 0 et que, pour  $\alpha \in \mathcal{S}(X)$ , les  $\alpha \varphi_j - \alpha(a) \varphi_j$  convergent vers 0 ; d'autre part leurs images de Fourier se concentrent angulairement sur la droite engendrée par  $b$  dans  $\Xi$ , et alors, pour  $\beta$  homogène de degré 0 sur  $\Xi$ ,  $C^\infty$  dans  $\mathcal{C}0$ , les  $\beta \varphi_j - \beta(b) \varphi_j$  convergent vers 0 dans  $L^2$ . En prolongeant par continuité et utilisant Banach-Steinhaus, on en déduit 2° pour  $f$  quelconque dans  $\mathcal{S}(X \times \Sigma; 0)$ .

PROPOSITION 6. - L'application  $\theta_\rho$  du § 3 est injective ; et même  $\theta_\rho(f) \in \mathcal{A}(X; \rho)$  implique  $f = 0$ .

Supposons en effet  $\theta_0(f) \in \mathfrak{A}(X; 0)$  pour  $\rho = 0$ , et utilisons la suite  $\varphi_j$  du lemme précédent relative à  $a \in X$ ,  $b \in \Sigma$ . Les  $\varphi_j$  convergeant faiblement vers 0, les  $\theta_0(f) \varphi_j$  convergent faiblement vers 0 dans  $H^1$ ; mais elles ont leur support dans un compact fixe, et on sait (RELLICH) que l'ensemble des fonctions de la boule unité de  $H^1$ , à support dans un compact de  $X$ , est un compact de  $L^2$ , donc les  $\theta_0(f) \varphi_j$  convergent fortement vers 0 dans  $L^2$ ; de la propriété 2° du lemme, on déduit alors que  $f(a, b) = 0$ . Ceci étant vrai pour  $a$  et  $b$  quelconques,  $f = 0$ . Pour  $\rho \neq 0$  ( $\theta_\rho$  dépend du choix d'une forme quadratique), on se ramène aussitôt au cas  $\rho = 0$ .

COROLLAIRE. - Si, pour une forme quadratique  $|x|^2$  sur  $X$ , on écrit un opérateur  $A \in \Gamma(X; \rho)$  sous la forme  $\theta_\rho(f) + A'$ ,  $A' \in \mathfrak{A}(X; \rho)$ ,  $f$  est unique, et indépendante de la forme quadratique. L'application symbole  $S_\rho : A \rightarrow f$ , est une surjection linéaire de  $\Gamma(X; \rho)$  sur  $\mathfrak{S}(X \times \Sigma; \rho)$ , de noyau  $\mathfrak{A}(X; \rho)$ ; en outre

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_{\rho+\sigma}(AB) = S_\rho(A) S_\sigma(B), \quad \text{pour } A \in \Gamma(X; \rho), B \in \Gamma(X; \sigma) \quad ; \\ S_\rho(\bar{A}) = (S_\rho(A))^\vee, \quad S_\rho({}^tA) = (S_\rho(A))^\vee, \quad S_\rho(A^*) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = \overline{S_\rho(A)} \quad \text{pour } A \in \Gamma(X; \rho) \quad . \end{array} \right.$$

C'est une conséquence triviale de la proposition 6, et des propositions 3, 4, et formule (3.4).

On peut encore dire que la composée d'applications  $\pi_\rho \theta_\rho$  :

$$(4.3) \quad \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \rho) \xrightarrow{\theta_\rho} \Gamma(X; \rho) \xrightarrow[\pi_\rho]{\text{surjection canonique}} \Gamma(X; \rho) / \mathfrak{A}(X; \rho)$$

est une bijection linéaire  $\Theta_\rho$ , que le symbole est la composée  $S_\rho = \Theta_\rho^{-1} \pi_\rho$ ; et que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(X; \rho) \times \Gamma(X; \sigma) & \xrightarrow{\text{composition des opérateurs}} & \Gamma(X; \rho + \sigma) \\ \downarrow S_\rho \times S_\sigma & & \downarrow S_{\rho+\sigma} \\ \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \rho) \times \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \sigma) & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \rho + \sigma) \end{array} \right.$$



$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(X ; \rho) & \xrightarrow{\text{transposition des opérateurs}} & \Gamma(X ; \rho) \\ \downarrow S_\rho & & \downarrow S_\rho \\ \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; \rho) & \xrightarrow[\check{f}(x, \xi) = f(x, -\xi)]{\text{opération } \check{\nu}} & \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; \rho) \end{array} \right.$$

etc.

D'autre part, un opérateur différentiel

$$P(x, D) = \sum_{|p| \leq m} a_p(x) D^p, \quad ,$$

à coefficients dans  $\mathfrak{S}(X)$ , d'ordre  $\leq m$ , est dans  $\Gamma(X ; m)$  ; son symbole est le polynôme homogène de degré  $m$  en  $\xi$  :

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|p|=m} a_p(x) \xi^p \quad (\text{proposition 5}) \quad .$$

L'application  $\theta_\rho$ , utilisée au départ, est d'un intérêt limité (sauf pour  $\rho = 0$ ), puisqu'elle dépend de la forme quadratique  $|x|^2$ . Mais le symbole  $S_\rho$  est intrinsèque, et c'est lui qui a toutes les bonnes propriétés. On doit plutôt considérer  $\theta_\rho$  comme un relèvement de  $S_\rho$ , puisque  $S_\rho \theta_\rho = \text{identité}$  ; indépendamment de toute question de forme quadratique, tout relèvement jouera le même rôle.

### 5. Les opérateurs de Calderon-Zygmund à valeurs vectorielles.

Soient  $E, F$ , des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . On pose

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \Gamma(X ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho) &= \Gamma(X ; \rho) \otimes \mathfrak{L}(E ; F) \\ \mathfrak{A}(X ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho) &= \mathfrak{A}(X ; \rho) \otimes \mathfrak{L}(E ; F) \\ \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho) &= \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; \rho) \otimes \mathfrak{L}(E ; F) \quad . \end{aligned}$$

Alors le symbole  $S_\rho$  est une application linéaire surjective de

$$\Gamma(X ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho) \quad \text{sur} \quad \mathfrak{S}(X \times \Sigma ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho) \quad ,$$

de noyau  $\mathfrak{A}(X ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho)$ .

L'intérêt de ces tensorisations est que les éléments de  $\Gamma(X ; \mathfrak{L}(E ; F) ; \rho)$  sont des opérateurs

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}(X ; E) &= \mathfrak{O}(X) \otimes E \rightarrow \mathfrak{S}(X ; F) \quad , \quad \mathfrak{E}^1(X ; E) \rightarrow \mathfrak{O}^1(X ; F) \quad , \quad H^s(X ; E) \rightarrow H^{s-\rho}(X ; F) \quad . \end{aligned}$$

On a les diagrammes commutatifs que l'on pense :

$$(5.2) \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(X; \mathcal{L}(E; F); \rho) \times \Gamma(X; \mathcal{L}(F; G); \sigma) & \xrightarrow[\text{des opérateurs}]{\text{composition}} & \Gamma(X; \mathcal{L}(E; G); \rho + \sigma) \\ \downarrow S_\rho \times S_\sigma & & \downarrow S_{\rho + \sigma} \\ \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \mathcal{L}(E; F); \rho) \times \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \mathcal{L}(F; G); \sigma) & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \mathcal{L}(E; G); \rho + \sigma) \end{array} \right.$$

$$(5.3) \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma(X; \mathcal{L}(E; F); \rho) & \xrightarrow[\text{opérateurs}]{\text{transposition des}} & \Gamma(X; \mathcal{L}(F^*; E^*); \rho) \\ \downarrow S_\rho & & \downarrow S_\rho \\ \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \mathcal{L}(E; F); \rho) & \xrightarrow[\substack{\text{transposition et } \nu : \\ ({}^t_\nu f)(x, \xi) = {}^t(f(x, -\xi))}]{\text{transposition et } \nu :} & \mathfrak{S}(X \times \Sigma; \mathcal{L}(F^*; E^*); \rho) \end{array} \right.$$

etc.

### 6. Invariance par difféomorphismes et changements de cartes.

Soit  $A$  un opérateur  $\mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}'(X)$ . On dit qu'il a son bi-support dans un fermé  $K$  de  $X$ , si :

- 1° Pour toute  $\varphi \in \mathcal{O}(X)$  à support dans  $\complement K$ ,  $A\varphi = 0$ .
- 2° Pour toute  $\varphi \in \mathcal{O}(X)$ ,  $A\varphi$  a son support dans  $K$ .

Cela revient exactement à dire que le noyau qui définit  $A$  par le théorème des noyaux a son support dans  $K \times K \subset X \times X$ .

Bien entendu, un tel opérateur est entièrement connu si on le connaît comme opérateur  $\mathcal{O}(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}'(\Omega)$ , où  $\Omega$  est un ouvert contenant  $K$ .

Soit  $\Omega_1$  un ouvert de  $X_1$ ,  $K_1$  un compact de  $\Omega_1$ ,  $h$  un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $\Omega_1$  sur un ouvert  $\Omega_2$  de  $X_2$ ,  $h(K_1) = K_2$ . Alors  $h$  transforme (par transport de structure, une des méthodes les plus utiles et les moins bien connues)  $\mathcal{O}(\Omega_1)$  dans  $\mathcal{O}(\Omega_2)$ , donc  $\mathcal{O}'(\Omega_1)$  dans  $\mathcal{O}'(\Omega_2)$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{O}(\Omega_1); \mathcal{O}'(\Omega_1))$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{O}(\Omega_2); \mathcal{O}'(\Omega_2))$ . Mais  $h$  ne transforme pas en général la mesure de Lebesgue  $dx_1$  de  $X_1$  en la mesure  $dx_2$  de  $X_2$ ; donc l'immersion  $\mathcal{O}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_2)$  est chamboulée par  $h$ . Nous considérerons donc tous les espaces de distributions étudiés ( $\mathcal{D}, \mathcal{O}', \mathfrak{S}, \mathfrak{S}', H^s$ ), comme des espaces de courants de degré 0.  $\mathcal{O}$  voudra dire  $\mathring{\mathcal{O}}$ ;  $\mathcal{O}'$  voudra dire  $\mathring{\mathcal{O}}'$ , dual de l'espace des formes différentielles de degré  $n$  tordues à support compact. La définition de ces espaces ne suppose plus

que des mesures de Lebesgue ait été choisies sur  $X_1$  et  $X_2$ . On démontre alors que, si  $T$  est dans  $H^S(X_1)$  à support dans  $K_1$ ,  $hT$  est dans  $H^S(X_2)$  à support dans  $K_2$ , malgré la non-conservation de la mesure de Lebesgue. En outre :

PROPOSITION 7 (SEELEY). - Si  $A_1 \in \Gamma(X_1; \rho)$  a son bi-support dans  $K_1$ ; son transformé  $A_2$  par  $h$ , c'est-à-dire  $hA_1h^{-1}$ , est dans  $\Gamma(X_2; \rho)$ , à bi-support dans  $K_2$ . En outre, si  $r \in \mathcal{E}(X \times \Sigma; \rho)$  est le symbole de  $A$ , le symbole de  $hAh^{-1}$  est  $g$  définie par

$$(6.1) \quad g(x_2, \xi_2) = f(h^{-1}(x_2), {}^th'(h^{-1}(x_2)) \cdot \xi_2) \quad .$$

Cela revient à dire que

$$g(x_2, \xi_2) = f(x_1, \xi_1), \quad \text{avec } x_2 = h(x_1), \quad \xi_1 = {}^th'(x_1) \cdot \xi_2 \quad .$$

Pour  $x \in X$ , on doit donc considérer  $\xi$  comme un covecteur tangent à  $X$  en  $x$ . La démonstration est très technique, mais d'idée très simple : on développe  $h^{-1}(x_2) - h^{-1}(y_2)$  suivant Taylor en puissances de  $(x_2 - y_2)$ , de sorte que les convolutions sont transformées en des opérateurs qui ressemblent à des convolutions. Cette proposition nous permettra de définir des opérateurs de Calderon-Zygmund sur une variété  $C^\infty$ . En outre si nous voulons raisonner sur des espaces fibrés sur de telles variétés, on doit aussi voir ce que devient un Calderon-Zygmund par changements de cartes sur des espaces fibrés triviaux. Soient donc  $E_1, F_1, E_2, F_2$ , des espaces vectoriels de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ , et soit  $A$  un Calderon-Zygmund  $\in \Gamma(X; \mathcal{L}(E_1; F_1); \rho)$ ; transformons-le par transport de structure, quand on fait le changement de carte  $(X; E_1; F_1) \rightarrow (X; E_2; F_2)$  défini par  $\alpha \in \mathcal{S}(X; \mathcal{L}(E_1; E_2))$  et  $\gamma \in \mathcal{S}(X; \mathcal{L}(F_1; F_2))$ . On obtient l'opérateur  $(\gamma) A(\alpha^{-1})$ ; c'est évidemment un élément de  $\Gamma(X; \mathcal{L}(E_2; F_2); \rho)$ , puisqu'une multiplication est un Calderon-Zygmund de degré 0, et son symbole est  $\gamma f \alpha^{-1}$  ou  $\gamma \alpha^{-1} f$ , si  $f$  est le symbole de  $A$ . Naturellement, si  $A$  est à bi-support dans un compact  $K$  de  $X$ , il suffit que  $\alpha$  et  $\gamma$  soient définies au voisinage de  $K$ , et  $C^\infty$ .

### 7. Opérateurs de Calderon-Zygmund sur les sections d'espaces fibrés sur une variété $C^\infty$ .

Soit maintenant  $X$  une variété réelle  $C^\infty$  de dimension  $n$ ,  $\underline{E}$  et  $\underline{F}$  des espaces fibrés sur  $X$ , à fibre vectorielle de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ .

Ici encore les espaces de fonctions et distributions considérés seront les espaces de courants de degré 0. On définit sans difficulté l'espace  $\mathcal{O}'(X; \underline{E})$

des "sections distributions" de  $\underline{E}$ , comme le dual de l'espace des sections-formes différentielles de degré  $n$  tordues à support compact de  $\underline{E}$ .

Soit  $\Phi$  une trivialisation locale du fibré  $\underline{E}$ ; c'est un  $C^\infty$ -difféomorphisme fibré de  $\mathcal{O} \times E$  sur  $\underline{E} | \mathcal{U}$ , restriction de  $\underline{E}$  au-dessus d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$ ;  $\mathcal{O}$  est un ouvert de l'espace  $\underline{R}^n$ ,  $E$  est un vectoriel de dimension finie sur  $\underline{C}$ . Alors  $\Phi$  transporte  $\mathcal{O}'(\mathcal{O}) \otimes E$  sur  $\mathcal{O}'(\mathcal{U}; \underline{E})$ . On appelle alors  $H_{loc}^s(X; \underline{E})$  l'espace vectoriel des sections distributions  $T$  de  $\underline{E}$  telles que, pour toute trivialisation  $\Phi$  et toute  $\alpha \in \mathcal{O}(X)$  à support dans  $\mathcal{U}$ , l'image  $\Phi^{-1}(\alpha T)$  appartienne à  $H^s(\underline{R}^n; E)$ ; on le munit d'une topologie évidente. L'invariance locale de  $H^s$  par difféomorphisme, signalée au § 6 entraîne que  $T \in \mathcal{O}'(X; \underline{E})$  sera dans  $H_{loc}^s(X; \underline{E})$  si la propriété précédente est vérifiée pour une famille  $\Phi_i$  de trivialisations locales telle que les  $\mathcal{U}_i$  recouvrent  $X$ . On dira maintenant qu'un opérateur

$$A : \mathcal{O}(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{O}'(X; \underline{F})$$

est un Calderon-Zygmund de type local de degré  $\rho$  ou appartient à  $\Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  si :

1° il opère  $\mathcal{O}(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{O}(X; \underline{F})$ ,  $\mathcal{E}(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{E}(X; \underline{F})$ ,  $\mathcal{E}'(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{E}'(X; \underline{F})$ ,  $\mathcal{O}'(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{O}'(X; \underline{F})$ , et si le support singulier de  $AT$  est toujours contenu dans celui de  $T$  :

2° pour toute trivialisation locale  $\Phi$  de  $\underline{E}$  et toute trivialisation locale  $\Psi$  de  $\underline{F}$ , avec le même  $\mathcal{O}$  et le même  $\mathcal{U}$ , et toute  $\alpha \in \mathcal{O}(X)$  à support dans  $\mathcal{U}$ , alors l'image  $\Psi^{-1}(\alpha) A(\alpha) \Phi$  est un Calderon-Zygmund sur  $\underline{R}^n$ , c'est-à-dire appartient à  $\Gamma(\underline{R}^n; \mathcal{L}(E; F); \rho)$ . Le § 6 nous assure que la condition 3° sera sûrement vérifiée si elle l'est pour des  $\Phi_i, \Psi_i$ , tels que les  $\mathcal{U}_i$  recouvrent  $X$ .

Soit  $A \in \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$ ; définissons son symbole. Pour tout système de trivialisations  $\Phi, \Psi$ , comme ci-dessus, on pourra définir un symbole de  $\Psi^{-1}(\alpha) A(\alpha) \Phi$ , donc de  $\Psi^{-1} A \Phi$ ; c'est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathcal{O} \times \Sigma$ ,  $\Sigma = \underline{R}^n - \{0\}$ , à valeurs dans  $\mathcal{L}(E; F)$ , homogène de degré  $\rho$  en  $\xi$ . En identifiant, pour tout  $x$  de  $\mathcal{O}$ ,  $\xi \in \Sigma$  à un point de l'espace des covecteurs tangents en  $x$  à  $\mathcal{O}$ , on pourra transporter ce symbole au-dessus de  $\mathcal{U}$ . Si, pour tout  $x$  de  $X$ , nous considérons l'espace vectoriel des fonctions  $C^\infty$  homogènes

de degré  $\rho$  sur  $\Sigma_x = T_x^*(X) - \{0\}$ , ( $T_x(X)$  est l'espace des covecteurs tangents à  $X$  en  $x$ ) à valeurs dans  $\mathcal{E}(\underline{E}_x; \underline{F}_x)$ , la collection de ces espaces, lorsque  $x$  parcourt  $X$ , peut être muni d'une structure de fibré sur  $X$ , qu'on notera  $(\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho)$ ; le symbole de  $A$  au-dessus de  $\mathcal{U}$ , défini par les trivialisations  $\Phi, \Psi$ , est une section de ce fibré au-dessus de  $\mathcal{U}$ . Le § 6, et en particulier la proposition 7, montrent que cette section est indépendante du choix de  $\Phi, \Psi$ , de sorte qu'on a un symbole de  $A$  au-dessus de  $X$  tout entière. On l'appellera  $S_\rho(A)$ ; c'est une section  $C^\infty$  du fibré  $(\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho)$ , c'est-à-dire un élément de  $\mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho))$ . On peut alors chapeauter tous les résultats antérieurs en un théorème :

**THÉORÈME.** -  $\Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  est un espace vectoriel d'opérateurs très réguliers de l'espace des sections de  $\underline{E}$  dans l'espace des sections de  $\underline{F}$ ; pour tout  $s$ ,  $A \in \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  opère de  $H_{loc}^s(X; \underline{E})$  dans  $H_{loc}^{s-\rho}(X; \underline{F})$ .  $\mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho))$  est l'espace des sections  $C^\infty$  d'un fibré sur  $X$ . L'opérateur  $S_\rho$  est une surjection de  $\Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  sur  $\mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho))$ , de noyau  $\mathcal{A}_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$ , sous-espace des opérateurs de  $\Gamma_{loc}$   $\rho$ -améliorants, c'est-à-dire qui, pour tout  $s$ , opèrent  $H_{loc}^s(X; \underline{E}) \rightarrow H_{loc}^{s-\rho+1}(X; \underline{F})$ . On a les diagrammes commutatifs suivants :

$$(7.1) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho) \times \Gamma_{loc}(X; \underline{F}; \underline{G}; \sigma) & \xrightarrow[\text{opérateurs}]{\text{composition des}} & \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{G}; \rho+\sigma) \\ \downarrow S_\rho \times S_\sigma & & \downarrow S_{\rho+\sigma} \\ \mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho)) \times \mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{F}; \underline{G}); \sigma)) & \xrightarrow{\text{multiplication}} & \mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{G}); \rho+\sigma)) \end{array} \right.$$

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho) & \xrightarrow[\text{opérateurs}]{\text{transposition des}} & \Gamma_{loc}(X; \underline{F}^* \otimes_X \Omega^n; \underline{E}^* \otimes_X \Omega^n; \rho) \\ \downarrow S_\rho & & \downarrow S_\rho \\ \mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{E}; \underline{F}); \rho)) & \xrightarrow[\text{tensorisation par } \Gamma_{\Omega^n}]{\text{transposition,}} & \mathcal{E}(X; (\Sigma_X; \mathcal{L}_X(\underline{F}^* \otimes_X \Omega^n; \underline{E}^* \otimes_X \Omega^n); \rho)) \end{array} \right.$$

Ici  $\Omega^n$  est le fibré dont la fibre en  $x \in X$  est l'espace des  $n$ -covecteurs tordus tangents en  $x$  à  $X$ . Le dual de  $\mathcal{O}(X; \underline{E})$  étant  $\mathcal{O}'(X; \underline{E}^* \otimes_X \Omega^n)$ , le transposé d'un opérateur  $\mathcal{O}(X; \underline{E}) \rightarrow \mathcal{O}'(X; \underline{F})$  est un opérateur

$\mathcal{O}(X ; \underline{F}^* \otimes_X \Omega^n) \rightarrow \mathcal{O}'(X ; \underline{E}^* \otimes_X \Omega^n)$  . Par ailleurs, si

$$f \in \mathcal{E}(X ; (\Sigma_X ; \mathcal{L}_X(\underline{E} ; \underline{F}) ; \rho))$$

alors pour tout  $x \in X$  ,  $\xi \in T_x^*(X)$  ,  $f(x, \xi)$  est un élément de  $\mathcal{E}(\underline{E}_x ; \underline{F}_x)$  ; alors  $({}^t f)(x, \xi)$  est  ${}^t(f(x, -\xi)) \in \mathcal{E}(\underline{F}_x^* ; \underline{E}_x^*)$  ; tensorisé avec l'opérateur identique de  $\Omega_x^n$  , il donne un élément de  $\mathcal{E}(\underline{F}_x^* \otimes \Omega_x^n ; \underline{E}_x^* \otimes \Omega_x^n)$  ; telle est la signification de l'opération indiquée par la flèche horizontale du bas ;

$$({}^t f \otimes I_{\Omega_x^n})(x, \xi) = {}^t(f(x, -\xi)) \otimes I_{\Omega_x^n} \quad .$$

On aurait des diagrammes commutatifs analogues en remplaçant la transposition par la conjugaison complexe ou l'adjonction.

### 8. Hypoellipticité des opérateurs de Calderon-Zygmund elliptiques.

Voici un exemple typique des applications de cette théorie. On dit qu'un symbole  $f \in \mathcal{E}(X ; (\Sigma_X ; \mathcal{L}_X(\underline{E} ; \underline{F}) ; \rho))$  est elliptique s'il est inversible, c'est-à-dire si, pour tous  $x \in X$  ,  $\xi \in \Sigma_x$  ,  $f(x, \xi)$  est un élément inversible de  $\mathcal{E}(\underline{E}_x ; \underline{F}_x)$  . Il admet alors un symbole inverse  $g \in \mathcal{E}(X(\Sigma_X ; \mathcal{L}_X(\underline{F} ; \underline{E}) ; -\rho))$  . Un opérateur de  $\Gamma_{\text{loc}}(X ; \underline{E} ; \underline{F} ; \rho)$  est dit elliptique, si son symbole est elliptique.

Soit  $T \in \mathcal{O}'(X ; \underline{E})$  , et  $\alpha \in H_{\text{loc}}^s(\Omega ; \underline{E})$  pour un ouvert  $\Omega$  de  $X$  ; alors  $\alpha T \in H_{\text{loc}}^{s-\rho}(\Omega ; \underline{F})$  , pour tout  $\alpha \in \Gamma_{\text{loc}}(X ; \underline{E} ; \underline{F} ; \rho)$  . Soit en effet  $\omega$  un ouvert relativement compact de  $\Omega$  ; soit  $\alpha \in \mathcal{O}(X)$  , égale à 1 dans  $\omega$  , à support dans  $\Omega$  ; écrivons  $T = \alpha T + (1 - \alpha) T$  . Alors  $\alpha T$  est dans  $H_{\text{loc}}^s(X ; \underline{E})$  , et  $(1 - \alpha) T$  est nulle dans  $\omega$  . Donc  $A(\alpha T)$  est dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho}(X ; \underline{F})$  , et  $A((1 - \alpha) T)$  est une fonction  $C^\infty$  dans  $\omega$  à cause de la très-régularité. Donc la somme  $AT$  est dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho}(\omega ; \underline{F})$  ; ceci étant vrai pour tout  $\omega$  ,  $AT$  est bien dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho}(\Omega ; \underline{F})$  . En outre, si le symbole de  $A$  est nul dans  $\Omega$  ,  $AT$  est dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(\Omega ; \underline{F})$  . En effet, avec les notations précédentes,  $A((1 - \alpha) T)$  est une fonction  $C^\infty$  dans  $\omega$  . Récrivons  $\alpha T = \alpha^2 T + \alpha(1 - \alpha) T$  . Le composé  $A(\alpha)$  est un Calderon-Zygmund de symbole nul sur  $X$  , donc il est  $\rho$ -améliorant. Puisque  $(1 - \alpha) T$  est nulle dans  $\omega$  ,  $(A(\alpha)).((1 - \alpha) T)$  est une fonction  $C^\infty$  dans  $\omega$  ; et ensuite  $A(\alpha)$  est  $\rho$ -améliorant et  $\alpha T$  dans  $H_{\text{loc}}^s(X ; \underline{E})$  , donc  $(A(\alpha))(\alpha T) = A(\alpha^2 T)$  est dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(X ; \underline{F})$  ; donc  $AT$  est bien dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(\omega ; \underline{F})$  et par suite dans  $H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(\Omega ; \underline{F})$  .

On a maintenant la réciproque suivante, qui étend aux Calderon-Zygmund elliptique la propriété de régularité bien connue des opérateurs différentiels elliptiques, en même temps qu'elle la démontre :

PROPOSITION 8. - Si  $A$  est dans  $\Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  elliptique au-dessus d'un ouvert  $\Omega$  de  $X$ , alors  $T \in \mathcal{O}'(X; \underline{E})$ ,  $AT \in H_{loc}^{s-\rho}(\Omega; \underline{F})$  implique (donc est équivalent à)  $T \in H_{loc}^s(\Omega; \underline{E})$ . Montrons d'abord un lemme :

LEMME. -  $A \in \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$ ,  $A$  elliptique sur  $\Omega$ ,  $T \in \mathcal{O}'(X; \underline{E})$ ,  $T \in H_{loc}^{s-1}(\Omega; \underline{E})$ ,  $AT \in H_{loc}^{s-\rho}(\Omega; \underline{F})$  implique  $T \in H_{loc}^s(\Omega; \underline{E})$ .

Soit en effet  $B$  un élément de  $\Gamma(X; \underline{F}; \underline{E}; -\rho)$ , dont le symbole soit inverse du symbole de  $A$  sur  $\Omega$ . Alors  $BA - I$  est un Calderon-Zygmund de degré 0, de symbole nul dans  $\Omega$ . Comme on suppose  $T \in H_{loc}^{s-1}(\Omega; \underline{E})$  on en déduit  $BAT - T \in H_{loc}^{s-\rho}(\Omega; \underline{E})$ . Mais  $AT \in H_{loc}^{s-\rho}(\Omega; \underline{F})$  entraîne  $BAT \in H_{loc}^s(\Omega; \underline{E})$ ; donc, par différence,  $T \in H_{loc}^s(\Omega; \underline{E})$ , ce qui démontre le lemme.

Montrons maintenant le théorème. Comme il est local, on peut toujours supposer  $\Omega$  relativement compact dans  $X$ . Alors  $T$  est sûrement d'ordre fini dans  $\Omega$ . Soit  $t$  tel que  $T \in H_{loc}^t(X; \underline{E})$ . Si  $t \leq s - 1$ , on a  $T \in H_{loc}^t(\Omega; \underline{E})$  et  $AT \in H_{loc}^{t-\rho+1}(\Omega; \underline{F})$ ; le lemme montre que  $T \in H_{loc}^{t+1}(\Omega; \underline{E})$ , on a monté d'une unité. Par récurrence, on en déduit qu'il existe sûrement un  $r \geq s - 1$  tel que  $T \in H_{loc}^r(\Omega; \underline{E})$ ; alors  $T \in H_{loc}^{s-1}(X; \underline{E})$ ,  $AT \in H_{loc}^{s-\rho}(\Omega; \underline{F})$ , et le lemme montre encore que  $T \in H_{loc}^s(\Omega; \underline{E})$

C. Q. F. D.

Voici également une généralisation en même temps qu'une démonstration d'une propriété classique des opérateurs différentiels elliptiques :

PROPOSITION 9. - Soit  $A \in \Gamma_{loc}(X; \underline{E}; \underline{F}; \rho)$  elliptique, pour une variété  $X$  compacte. Alors, pour tout  $s$  réel,  $A$  est un opérateur à indice de  $H_{loc}^s(X; \underline{E})$  dans  $H_{loc}^{s-\rho}(X; \underline{F})$ ; autrement dit c'est un homomorphisme, dont le noyau est de dimension finie, et l'image de codimension finie. Son indice ne dépend que du symbole de  $A$ .

Soit en effet  $B \in \Gamma_{loc}(X; \underline{F}; \underline{E}; -\rho)$  de symbole inverse de celui de  $A$ . Alors  $AB - I$  a un 0-symbole nul, donc est continu de  $H_{loc}^{s-\rho}(X; \underline{F})$  dans  $H_{loc}^{s-\rho+1}(X; \underline{F})$ , et par suite compact de  $H_{loc}^{s-\rho}(X; \underline{F})$  dans  $H_{loc}^{s-\rho}(X; \underline{F})$  parce que  $X$  est compacte. D'après la théorie de RIESZ,  $AB$  a donc une image de codimension finie, donc a fortiori  $A$ . De même  $BA$  a un noyau de dimension finie, donc

a fortiori A . D'autre part tout opérateur linéaire continu d'un Banach dans un autre, dont l'image est de codimension finie, est un homomorphisme. Deux Calderon-Zygmund ayant même symbole différent d'un opérateur améliorant, donc

$$H_{\text{loc}}^s(X; \underline{E}) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-\rho+1}(X; \underline{F}) \quad ,$$

donc d'un opérateur compact  $H_{\text{loc}}^s(X; \underline{E}) \rightarrow H_{\text{loc}}^s(X; \underline{F})$  ; donc ils sont même indice.

Nous laissons au lecteur le soin de montrer, pour cet indice, la formule d'Atiyah-Singer.

BIBLIOGRAPHIE

Citons parmi les travaux de MIHLIN :

MIHLIN (S. G.). - Equations intégrales singulières [en russe], Uspekhi mat. Nauk SSSR, N. S., t. 3, 1948, p. 29-112 ; traduction dans : Amer. math. Soc. Transl., n° 24, 1950, 116 p.

plusieurs travaux, en collaboration, de CALDERON et ZYGMUND :

CALDERON (A. P.) and ZYGMUND (A.). - On the existence of certain singular integrals, Acta Math., t. 88, 1952, p. 85-139.

CALDERON (A. P.) and ZYGMUND (A.). - On singular integrals, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 289-309.

CALDERON (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Algebras of certain singular operators, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 310-320.

CALDERON (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential operators, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.

L'application à l'unicité du problème de Cauchy a été faite par CALDERON :

CALDERON (A. P.). - Uniqueness on the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. of Math., t. 80, 1958, p. 16-36.

On pourra consulter aussi les exposés de Bernard MALGRANGE, n° 1 à 10, dans :

Séminaire SCHWARTZ, t. 4, 1959/60 : Unicité du problème de Cauchy ; division des distributions. - Paris, Secrétariat mathématique, 1960.

et enfin les travaux de SEELEY :

SEELEY (R. T.). - Singular integrals on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 81, 1959, p. 658-690.

SEELEY (R. T.). - Regularization of singular integral operators on compact manifolds, Amer. J. of Math., t. 83, 1961, p. 265-275.