PIERRE SAMUEL

Travaux d'Igusa sur les formes modulaires de genre 2

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 267, p. 365-372

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__365_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 267 Février 1964

TRAVAUX D'IGUSA SUR LES FORMES MODULAIRES DE GENRE 2

par Pierre SAMUEL

1. Position du problème.

Soit g un entier ≥ 1. Les matrices symétriques d'ordre g sur $\mathbb{C}$ forment un espace vectoriel de dimension $\frac{1}{2}g(g+1)$; celles dont la partie imaginaire est positive non-dégénérée en forment un cône convexe ouvert, qu'on appelle l'espace, ou "demi-plan" de Siegel, et qu'on note $\mathfrak{S}_g$. Pour $g = 1$, on obtient le demi-plan ordinaire $\mathrm{Im}(z) > 0$.

Le groupe symplectique $Sp(2g, \mathbb{R})$ opère transitivement sur $\mathfrak{S}_g$ de la façon suivante : un élément M de $Sp(2g, \mathbb{R})$ s'écrit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des matrices réelles d'ordre g telles que

$$a.{}^tb = b.{}^ta \ , \qquad c.{}^td = d.{}^tc \ , \qquad a.{}^td - b.{}^tc = I_g \quad ;$$

pour $\tau \in \mathfrak{S}_g$, on pose alors

$$(1) \qquad M.\tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}$$

(voir [8], exposé 3). On obtient ainsi tous les automorphismes analytiques de $\mathfrak{S}_g$, deux matrices symplectiques M, M' donnant le même automorphisme si et seulement si $M + M' = 0$. Les sous-groupes discrets de $Sp(2g, \mathbb{R})$ donnent tous les groupes d'automorphismes analytiques qui opèrent de façon proprement discontinue dans $\mathfrak{S}_g$.

Parmi ces sous-groupes discrets, le plus important est le groupe modulaire de Siegel $Sp(2g, \mathbb{Z})$. On considère aussi des sous-groupes discrets Γ qui sont "commensurables" à $Sp(2g, \mathbb{Z})$, en ce sens que $\Gamma \cap Sp(2g, \mathbb{Z})$ est d'indice fini dans Γ et dans $Sp(2g, \mathbb{Z})$. Soit Γ un tel sous-groupe, et soit k un entier > 0 ; on appelle forme modulaire de poids k relative à Γ toute fonction analytique f sur $\mathfrak{S}_g$ telle que

$$(2) \qquad f(M.\tau) = f(\tau)\det(c\tau + d)^k \qquad \text{pour tout } M \in \Gamma \text{ et } \tau \in \mathfrak{S}_g \ .$$

Les formes modulaires de poids k relatives à Γ forment un espace vectoriel $A(\Gamma)_k$ sur $\mathbb{C}$, et la somme directe

$$(3) \qquad A(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} A(\Gamma)_k$$

est un anneau gradué, l'anneau des formes modulaires relatives à Γ.

La théorie des compactifications (cf. [8]) montre que $A(\Gamma)$ est une $\underset{\sim}{C}$-algèbre intégralement close de type fini, et que la "variété modulaire" proj $A(\Gamma)$ contient l'espace homogène $\mathbb{S}_g/\Gamma$ comme ouvert de Zariski ; son complémentaire est de codimension $\geqslant 2$ pour $g \geqslant 2$.

Le problème qu'on se pose est de déterminer le plus explicitement possible l'anneau $A(\Gamma)$ et la variété proj $A(\Gamma)$. Trois méthodes d'attaque sont possibles:

1° La formule des traces de Selberg permet, théoriquement, de calculer la dimension de $A(\Gamma)_k$. IGUSA en dit quelques mots dans un appendice à [3] et dans [4]. Me sentant totalement incompétant, je me contenterai d'observer que les résultats récents de LANGLANDS sur cette formule (cf. [6]) ne paraissent pas utilisables, car les espaces homogènes $\mathbb{S}_g/\Gamma$ ne sont pas compacts.

2° Pour $\Gamma = Sp(g, \underset{\sim}{Z})$, les points de $\mathbb{S}_g/\Gamma$ correspondent aux classes de variétés abéliennes de dimension g, polarisées de façon convenable. Or, pour $g = 1, 2, 3$, ces variétés sont "presque toutes" des jacobiennes de courbes, de sorte que la variété des modules des courbes de genre 1, 2, 3 sera "proche" de $\mathbb{S}_g/\Gamma$. D'autre part cette variété des modules est connue pour $g = 1, 2$ (voir [2] et [7] pour $g = 2$), et, pour $g = 3$, la théorie classique des invariants des formes quartiques ternaires doit donner des résultats analogues.

C'est cette méthode qu'utilise IGUSA dans [3] pour $g = 2$. Soient A, B, C, D les covariants de degrés $2, 4, 6, 10$ des formes sextiques binaires définis dans [2] ou [7], et X la variété proj $\underset{\sim}{C}[A, B, C, D]$; la variété des modules des courbes de genre 2 sur $\underset{\sim}{C}$ est le complémentaire de $D = 0$ dans X. On a ainsi une application rationnelle $\mathbb{S}_2/\Gamma \to X$, où tous les points de $\mathbb{S}_2/\Gamma$ correspondant aux produits de deux courbes elliptiques sont appliqués sur le point $B = C = D = 0$ de X ; on doit donc, pour obtenir une compactification de $\mathbb{S}_2/\Gamma$, faire "éclater" ce point de X (il ne s'agit pas d'une transformation monoïdale, ce qui, à la fois, complique et simplifie les choses). On obtient ainsi une compactification de $\mathbb{S}_2/\Gamma$, qui correspond à l'anneau des formes modulaires dont le degré est multiple de 6. Par normalisation, on obtient l'anneau $A(\Gamma)$, et on voit qu'il est engendré par les quatre séries d'Eisenstein

$$f_w(\tau) = \sum_{c,d} \det(c\tau + d)^{-w} \tag{4}$$

de poids $w = 4, 6, 10$, et 12. Ainsi la compactification proj $A(\Gamma)$ est la variété quotient de $\underset{\sim}{C}^4 - (0)$ par le groupe $\underset{\sim}{C}^*$ opérant par

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \rightsquigarrow (u^2 t_1, u^3 t_2, u^5 t_3, u^6 t_4) \qquad (u \in \underset{\sim}{C}^*) \quad .$$

De plus IGUSA calcule explicitement en fonction de f_4, f_6, f_{10} et f_{12} les invariants arithmétiques définis dans [2], ce qui résoud un problème de Siegel.

3° Dans [5], IGUSA utilise avec grand succès les fonctions thêta, c'est-à-dire, essentiellement, la théorie analytique des variétés abéliennes polarisées. C'est cette méthode que nous allons maintenant résumer.

2. Les "thêta-constantes".

a. Les sous-groupes de congruences.

Etant donnée une matrice carrée s, nous noterons $(s)^{o}$ le vecteur formé par ses coefficients diagonaux. Soit n un entier ≥ 1 ; les matrices $M \in Sp(2g, \underset{\sim}{Z})$ telles que $M \equiv I_{2g} \pmod{n}$ forment un sous-groupe distingué $\Gamma_g(n)$ de $Sp(2g, \underset{\sim}{Z}) = \Gamma_g(1)$, appelé le sous-groupe principal de congruence de niveau n.

On appelle groupe de congruence tout sous-groupe de $\Gamma_g(1)$ contenant un $\Gamma_g(n)$; un tel groupe est commensurable à $\Gamma_g(1)$. Parmi eux, pour n pair, on considère le sous-groupe $\Gamma_g(n, 2n)$ de $\Gamma_g(n)$ formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $(b)^{o} \equiv (c)^{o} \equiv 0 \pmod{2n}$; il contient $\Gamma_g(2n)$, est un sous-groupe invariant de $\Gamma_g(1)$, et est d'indice 2^{2g} dans $\Gamma_g(n)$. Le quotient $\Gamma_g(n)/\Gamma_g(2n, 4n)$ est commutatif, et $\Gamma_g(n, 2n)/\Gamma_g(2n, 4n)$ est un espace vectoriel de dimension $g(2g+1)$ sur $\underset{\sim}{F}_2$.

b. Définition des thêta-constantes.

Soient $m', m'' \in \underset{\sim}{Z}^g$, $m = (m', m'') \in \underset{\sim}{Z}^{2g}$, $\tau \in \mathfrak{S}_g$ et $z \in \underset{\sim}{C}^g$. Considérons la série

$$(5) \qquad \theta_m(\tau, z) = \sum_{p \in \underset{\sim}{Z}^g} e\left(\frac{1}{2}\,{}^t(p + \frac{1}{2}m')\,\tau(p + \frac{1}{2}m'') + {}^t(p + \frac{1}{2}m')(z + \frac{1}{2}m'')\right)$$

où $e(x) = \exp(2i\pi x)$; elle converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathfrak{S}_g \times \underset{\sim}{C}^g$, et sa somme est donc une fonction analytique de τ et de z. Pour $n = (n', n'') \in \underset{\sim}{Z}^{2g}$, on a

$$(6) \qquad \theta_{m+2n}(\tau, z) = (-1)^{{}^t m'.n''}\, \theta_m(\tau, z)$$

$$(7) \qquad \theta_m(\tau, z + \tau n) = (-1)^{{}^t m'.n'' - {}^t m''.n'}\, e(-{}^t n' z - \frac{1}{2}\,{}^t n' \tau n')\, \theta_m(\tau, z) \quad .$$

Un vecteur $m = (m', m'') \in \underset{\sim}{Z}^{2g}$ tel que ${}^t m'.m''$ soit pair est dit pair.

Les "thêta-constantes" sont les fonctions $\theta_m(\tau) = \theta_m(\tau, 0)$; ce sont des fonctions analytiques sur $\mathfrak{S}_g$. Par (6) on peut se borner à considérer les θ_m dont le "vecteur" m est formé de zéros et de uns. On a la formule

(8) $\theta_m(\tau)\ \theta_m(\tau\ ,\ z) = \sum_{n' \bmod 2} (-1)^{{}^t m'' \cdot n'}\ \theta_{(m'+n',0)}(2\tau\ ,\ z)\ \theta_{(n',0)}(2\tau\ ,\ z)$

(sommation à 2^g termes). On en déduit que, pour tout point $\tau \in \mathbb{S}_g$, il existe $m \in \underset{\sim}{Z}^{2g}$ tel que $\theta_m(\tau) \neq 0$ (sinon on aurait $\theta_{(n',0)}(2\tau\ ,\ z) = 0$ pour tout $z \in \underset{\sim}{C}^g$ par (8), ce qui est impossible) ; ce résultat est crucial.

Enfin on montre que des fonctions $\theta_m(\tau\ ,\ z)$ convenables annulent certains polynômes homogènes de degré 4 ; ce sont les <u>formules de Riemann</u>.

c. <u>Résultats principaux du cas général</u>.

IGUSA explicite d'abord $g(2g+1)$ matrices A_α qui engendrent le groupe $\Gamma_g(2)$. Il montre ensuite que, si on pose $f = \theta_m\,\theta_n$ (où m et n sont pairs), il existe un caractère χ de $\Gamma_g(2)$ tel que

(9) $$f(M.\tau) = \chi(M)\ \det(c\tau + d)\ f(\tau)$$

pour tout $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_g(2)$. Par l'intermédiaire des $\chi(A_\alpha)$, on détermine le caractère χ, et on montre qu'on a $\chi(M) = 1$ si $M \in \Gamma_g(4\ ,\ 8)$. Donc les $\theta_m\,\theta_n$ (pour m et n pairs) sont des formes modulaires de poids 1 pour $\Gamma_g(4,\ 8)$, c'est-à-dire des éléments de $A(\Gamma_g(4\ ,\ 8))$. De plus :

THÉORÈME 1. – <u>L'anneau</u> $A(\Gamma_g(4\ ,\ 8))$ <u>est la clôture intégrale de</u> $\mathbb{C}[(\theta_m\,\theta_n)]$, <u>où</u> m <u>et</u> n <u>parcourent l'ensemble des vecteurs "pairs" formés de zéros et de uns.</u>

En effet, pour tout sous-groupe Γ commensurable à $\Gamma_g(1)$, notons $F(\Gamma)$ le corps formé des quotients d'éléments homogènes de même degré de l'anneau gradué $A(\Gamma)$. On montre d'abord que le <u>corps</u> $\underset{\sim}{C}((\theta_m\!:\theta_n))$ engendré par les θ_m/θ_n contient $F(\Gamma_g(1))$. Pour celà on note que, pour $\tau \in \mathbb{S}_g$, l'application

(10) $$z \rightsquigarrow (\theta_m(\tau\ ,\ 2z))_{(m \bmod 2)} \qquad (z \in \underset{\sim}{C}^g)$$

définit un isomorphisme analytique du tore complexe $\underset{\sim}{C}^g/(\tau\ ,\ I_g)\ \underset{\sim}{Z}^{2g}$ sur une sous-variété abélienne $V(\tau)$ de l'espace projectif complexe de dimension $2^{2g} - 1$. L'idéal de $V(\tau)$ est engendré par des polynômes de degré 2 à coefficients dans $\underset{\sim}{Q}((\theta_m(\tau)/\theta_n(\tau)))$. Ainsi $\underset{\sim}{Q}((\theta_m/\theta_n))$ et $\underset{\sim}{C}((\theta_m/\theta_n))$ sont des corps de définition de la variété abélienne générique de la famille $(V(\tau))$. Donc $\underset{\sim}{C}((\theta_m/\theta_n))$ contient le "corps des modules" de cette famille, qui est $F(\Gamma_g(1))$ (cf. [8]).

D'autre part un raisonnement de théorie de Galois montre, à partir de là, que $\underset{\sim}{C}((\theta_m/\theta_n)) = F(\Gamma_g(4\ ,\ 8))$. Comme les $\theta_m\,\theta_m$ sont de poids 1, on en déduit que $A(\Gamma_g(4,\ 8))$ et $\underset{\sim}{C}[(\theta_m\,\theta_n)]$ ont même corps des fractions. Enfin, au moyen de (b), on montre que les $\theta_m\,\theta_n$ n'ont aucun zéro commun sur $\mathbb{S}_g/\Gamma_g(4\ ,\ 8)$ ni sur sa frontière de sorte que, par le Nullstellensatz projectif, $A(\Gamma_g(4\ ,\ 8))$ est entier sur $\underset{\sim}{C}[(\theta_m\,\theta_n)]$.

d. Exemple : le cas $g = 1$.

Pour $g = 1$, il y a trois vecteurs pairs formés de zéros et de uns, d'où trois thêta-constantes fondamentales u_1 , u_2 , u_3 , liés par la formule de Riemann $u_1^4 - u_2^4 - u_3^4 = 0$. Comme $\underset{\sim}{C}[U_1 , U_2 , U_3]/(U_1^4 - U_2^4 - U_3^4)$ est intégralement clos et de dimension 2 , il est isomorphe à $\underset{\sim}{C}[u_1 , u_2 , u_3]$; on a donc

$$A(\Gamma_1(4 , 8)) = \underset{\sim}{C}[(u_i u_j)] \quad .$$

On en déduit

$$A(\Gamma_1(4)) = \underset{\sim}{C}[u_1^2 , u_2^2 , u_3^2] \ , \quad A(\Gamma_1(2 , 4)) = \underset{\sim}{C}[(u_i^2 u_j^2)] \ ,$$

$$A(\Gamma_1(2)) = \underset{\sim}{C}[u_1^4 , u_2^4 , u_3^4] = \underset{\sim}{C}[u_1^4 , u_2^4] \quad ;$$

alors $A(\Gamma_1(1))$ est aussi un anneau de polynômes (engendré par les séries d'Eisenstein de poids 4 et 6). On retrouve les résultats classiques.

3. Le cas du genre 2.

a. La méthode de "descente" de $\Gamma_g(4 , 8)$ à $\Gamma_g(1)$.

En général soient H l'espace vectoriel des fonctions holomorphes sur $\mathfrak{S}$, k un entier ≥ 1 , et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(g , \underset{\sim}{R})$. Pour $f \in H$, soit f^P la fonction définie par

$$(11) \qquad f^P(\tau) = f(P.\tau) \det(c\tau + d)^{-k} \quad ,$$

de sorte que $Sp(2g , \underset{\sim}{R})$ opère sur H par $(P , f) \rightsquigarrow f^P$. Si Γ est un sous-groupe de $Sp(2g , \underset{\sim}{R})$ commensurable à $\Gamma_g(1)$, les formes modulaires f de poids k pour Γ sont caractérisées par $f = f^P$ pour tout $P \in \Gamma$.

Considérons maintenant l'anneau gradué

$$R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k \qquad \text{où } R_o = \underset{\sim}{C} \text{ et } R_k = H \text{ pour } k \geq 1 \quad .$$

Si nous faisons opérer $P \in Sp(2g , \underset{\sim}{R})$ sur chaque R_k par (11), on obtient un automorphisme de l'anneau R . L'anneau $A(\Gamma)$ n'est alors autre que le sous-anneau des invariants de R pour Γ .

Un calcul simplet montre que, si f est une forme modulaire de poids k pour Γ , alors f^P est une forme modulaire de poids k pour $P^{-1}\Gamma P$. Donc, si Γ est un sous-groupe invariant de $\Gamma' \subset Sp(2g , \underset{\sim}{R})$, Γ' et Γ'/Γ opèrent sur $A(\Gamma)$, et le sous-anneau des invariants de $A(\Gamma)$ pour ce groupe est $A(\Gamma')$.

Ainsi, comme on connait $\Gamma_g(4 , 8)$ par le théorème 1 du § 2, ainsi que les quotients successifs de la suite

$$(12) \qquad \Gamma_g(4\,,\,8) \subset \Gamma_g(4) \subset \Gamma_g(2\,,\,4) \subset \Gamma_g(2) \subset \Gamma_g(1)$$

par le § 2 (a), on va pouvoir avoir des informations sur $A(\Gamma_g(1))$. IGUSA explicite complètement ce calcul pour $g = 2$, et pense que le calcul analogue pour $g = 3$ est abordable.

b. Calcul des $A(\Gamma)$ pour $g = 2$.

Pour $g = 2$, il y a dix thêta-constantes fondamentales u_i $(i = 1\,,\,\ldots\,,\,10)$. Les formules de Riemann fournissent 21 relations quadratiques $F_j(u_i^2) = 0$ $(j = 1\,,\,\ldots\,,\,21)$ entre leurs carrés. On montre que l'anneau $\mathbb{C}[T_1\,,\,\ldots\,,\,T_{10}]/(F_j(T))$ est intégralement clos et de dimension 4, de sorte qu'il est isomorphe à $\mathbb{C}[(u_i^2)]$. Un lemme algébrique montre que $\mathbb{C}[(u_i)]$ est aussi intégralement clos, donc aussi $\mathbb{C}[(u_i\,u_j)]$, qui est ainsi égal à $A(\Gamma_2(4\,,\,8))$ (théorème 1).

La descente jusqu'à $A(\Gamma_2(2))$ (par (12)) ne présente pas de diffucultés, et montre que proj $A(\Gamma_2(2\,,\,4))$ est non-singulière, et que proj $A(\Gamma_2(2))$ est une hyperquadrique de $P_4(\mathbb{C})$.

Le passage de $\Gamma_2(2)$ à $\Gamma_2(1)$ est plus délicat. Le quotient $\Gamma_2(1)/\Gamma_2(2)$ est $Sp(4\,,\,\mathbb{F}_2)$, c'est-à-dire le groupe symétrique S_6. Soit ρ_k la représentation de ce groupe dans $A(\Gamma_2(2))_k$; comme on connait la liste complète des représentations du groupe symétrique, les informations qu'on a sur ρ_k permettent de la placer dans cette liste. A partir de là, des calculs montrent que :

THÉORÈME 2. - L'anneau $A(\Gamma_2(1))$ est engendré par quatre séries d'Eisenstein de poids $4\,,\,6\,,\,10\,,\,12$, algébriquement indépendantes.

IGUSA détermine aussi le noyau de l'homomorphisme Φ de Siegel, c'est-à-dire l'idéal des "Spitzenformen".

c. Singularités des variétés modulaires.

On sait que la variété proj $A(\Gamma_2(1))$ a des singularités. D'autre part, si Γ' est un sous-groupe de congruence, proj $A(\Gamma')$ est un revêtement de proj $A(\Gamma_2(1))$, et on a pu se demander si ce revêtement est non-singulier lorsque Γ' est suffisamment petit. C'est vrai pour $\Gamma_2(2\,,\,4)$, mais faux pour $\Gamma_2(4)$ et tous ses sous-groupes. En effet :

THÉORÈME 3. - Il y a un point explicitement déterminé α de proj $A(\Gamma_2(4))$ tel qu'aucun anneau local noethérien entier sur l'anneau local analytique (ou formel) R de α ne soit factoriel (ni, a fortiori, régulier).

En effet R est entier sur l'anneau local R' du point de $\operatorname{proj} A(\Gamma_2(2, 4))$ correspondant à α, et R' est un anneau de séries formelles à trois variables $R' = \underset{\sim}{C}[[a, b, c]]$. Un calcul montre d'autre part que R contient un élément x tel que

$$x^2 = abc(a - bc)(b - ca)(c - ab) \quad . \tag{13}$$

Si S est un anneau factoriel entier sur R, $a, b, \ldots, c - ab$ sont des carrés dans S (car ils sont deux à deux étrangers dans R', donc dans S, et car toute unité de S est un carré par Hensel). Posons $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$; alors $u^2 - v^2 w^2$ etc., donc $u - vw$, $u + vw$, etc., sont des carrés dans S. Posons

$$a' = 2(u + vw)/(1 + u^2 + v^2 + w^2) , \qquad b' = 2(v + wu)/(1 + u^2 + v^2 + w^2) ,$$
$$\text{et} \quad c' = 2(w + uv)/(1 + u^2 + v^2 + w^2) \quad .$$

On a

$$a' - b'c' = 2(u - vw)(1 + u^2 - v^2 - w^2)/(1 + u^2 + v^2 + w^2)^2 \quad ,$$

et deux formules analogues pour b' et c', de sorte que $a'b'c'(a' - b'c')(b' - c'a')(c' - a'b')$ est un carré dans S ; ceci est l'analogue de (13), et permet de définir $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, $c^{(n)}$ par récurrence. Notons m l'idéal maximal de S ; si q est un entier tel que $a', b', c' \in m^q$, on a $u + vw$, $u - vw \in m^q$, d'où $u \in m^q$, et $a, b, c \in m^{2q}$. Utilisant $a^{(n)}, b^{(n)}, c^{(n)}$ (qui sont dans m), on en déduit par récurrence que $a, b, c \in m^{2^n}$. D'où $a = b = c = 0$ par Krull, contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GODEMENT (Roger). - La formule des traces de Selberg, Séminaire Bourbaki, t. 15, 1962/63, n° 244., 10 p.

[2] IGUSA (Jun-Ichi). - Arithmetic variety of moduli for genus two, Annals of Math., t. 72, 1960, p. 612-649.

[3] IGUSA (Jun-Ichi). - On Siegel modular forms of genus two, Amer. J. of Math., t. 84, 1962, p. 175-200.

[4] IGUSA (Jun-Ichi). - Structure theorems of modular varieties, Preceedings of the International Congress of Mathematicians [1962. Stockholm] ; p. 522-525. - Djursholm, Institut Mittag-Leffler, 1963.

[5] IGUSA (Jun-Ichi). - On the graded rings of theta-constants (à paraître) et on Siegel modular forms of genus two, II. (à paraître).

[6] JACQUET (Hervé). - Mémoire de Langlands sur la dimension des espaces de formes automorphes, Séminaire Bourbaki, t. 16, 1963/64, n° 261, 15 p.

[7] SAMUEL (Pierre). - Invariants arithmétiques des courbes de genre 2, d'après Igusa, Séminaire Bourbaki, t. 14, 1961/62, n° 228, 13 p.

[8] Séminaire Cartan, t. 10, 1957/58 : Fonctions automorphes. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958.