ARMAND BOREL

Cohomologie et rigidité d'espaces compacts localement symétriques

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 265, p. 313-321

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__313_0>

Séminaire BOURBAKI
16e année, 1963/64, n° 265

Février 1964

COHOMOLOGIE ET RIGIDITÉ D'ESPACES COMPACTS LOCALEMENT SYMÉTRIQUES

par Armand BOREL

Soient X un espace riemannien symétrique à courbure négative (sans composante euclidienne), G la composante neutre du groupe des isométries de X et Γ un sous-groupe de G qui est discret et uniforme (i. e. tel que $\Gamma\backslash G$ soit compact). On s'intéressera aux espaces de cohomologie $H^p(\Gamma , F_\rho)$ de Γ, à coefficients dans l'espace F_ρ d'une représentation ρ de dimension finie de G, ou en fait plus particulièrement à la nullité de $H^1(\Gamma , F_\rho)$. Ces espaces sont intervenus jusqu'à présent principalement dans trois questions, dont deux seront discutées dans les § 3 et § 4 et la troisième mentionnée en 2.5. On suppose ρ réelle.

Notations. - On rappelle que X est homéomorphe à un espace euclidien, que G est un groupe de Lie semi-simple, de centre réduit à (e), sans facteur compact $\neq (e)$, et que $X = G/K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie de G et K, et $\mathfrak{m}$ le complément orthogonal de $\mathfrak{k}$ par rapport à la forme de Killing $B(x , y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$. On a les relations

$$(1) \qquad [\mathfrak{k} , \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} , \qquad [\mathfrak{k} , \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m} , \qquad [\mathfrak{m} , \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k} ,$$

qui expriment le fait que $s : k + m \longmapsto k - m$ $(k \in \mathfrak{k} , m \in \mathfrak{m})$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$ (involution de Cartan). On désignera par (X_λ) $(1 \leq \lambda \leq n = \dim \mathfrak{g})$ une base orthonormale de $\mathfrak{g}$, par rapport à la forme (positive non-dégénérée) $B^*(x , y) = - B(x , s(y))$, dont les $N = \dim \mathfrak{m}$ premiers éléments engendrent $\mathfrak{k}$, et les $n - N$ derniers engendrent $\mathfrak{k}$, et par (ω^λ) la base duale de $\mathfrak{g}^*$. On identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ respectivement aux champs de vecteurs et 1-formes invariants à gauche sur G. La translation à gauche (resp. à droite) définie par un élément $g \in G$ est notée L_g (resp. R_g). Les indices i , j , k , h vont de 1 à N, et λ de 1 à n.

1. Les espaces de cohomologie $H^p(\Gamma , X , \rho)$.

1.1. - Le groupe Γ opère proprement sur X, et le quotient $M = \Gamma\backslash X$ est compact. Γ opère librement si et seulement s'il est sans torsion, auquel cas M est une variété compacte localement symétrique (une forme de Clifford-Klein compacte de X). Pour tout ce qui est discuté ici, on se ramène aisément à ce cas en considérant un sous-groupe distingué d'indice fini sans torsion Γ' de Γ, dont l'existence est assurée par un théorème de Selberg [10].

1.2. - Soit $A^p(X, F_\rho)$ ou simplement A^p l'espace des formes différentielles C^∞ sur X, à valeurs dans F_ρ $(p = 0, 1, \ldots)$ et $A(X, F_\rho)$, ou A, la somme directe des A^p. On fait opérer G sur A^p en associant à g l'application $\theta \mapsto \rho(g^{-1}) \circ (\theta \circ L_g)$. Ces opérations commutent à la différentielle extérieure et la somme directe des espaces $A^p(\Gamma, X, F_\rho)$ d'éléments fixes par Γ est un sous-complexe, dont le p-ième espace de cohomologie est noté $H^p(\Gamma, X, \rho)$ (cf. [8]).

Soit σ la projection de X sur M. En associant à tout ouvert $U \subset M$ l'espace des sections sur $\sigma^{-1}(U)$ du faisceau constant $X \times F_\rho$, on définit sur M un faisceau $\mathfrak{F}_\rho$. On a alors pour tout p des isomorphismes canoniques

$$H^p(\Gamma, F_\rho) \cong H^p(\Gamma, X, \rho) \cong H^p(M, \mathfrak{F}_\rho) \quad . \tag{2}$$

Si Γ est sans torsion, $\mathfrak{F}_\rho$ est localement constant, de fibre type F_ρ, la première égalité résulte de la suite spectrale des revêtements et de l'acyclicité de X, la deuxième du théorème de de Rham à coefficients tordus. Le cas général peut se ramener à celui-là à l'aide du groupe Γ' de 1.1. La première égalité résulte aussi du corollaire au théorème 5.3.1 de [3].

2. Formes harmoniques.

2.1. - Pour étudier $H^p(\Gamma, F_\rho)$, on transporte tout sur $\Gamma\backslash G$, en utilisant les projections :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & X = G/K \arrow[d, "\sigma"] \\ \Gamma\backslash G \arrow[r] & M = \Gamma\backslash G/K \end{tikzcd} \quad . \tag{3}$$

On utilisera la même notation pour un élément de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{g}^*$) et le champ de vecteurs (resp. la 1-forme) qu'il définit canoniquement sur $\Gamma\backslash G$. Soit $\theta \in A^p(\Gamma, X, F_\rho)$. Pour tout $g \in G$, posons $\overline{\theta}_g = \rho(g^{-1}).(\theta \circ \pi)_g$. On définit ainsi une p-forme $\overline{\theta}$ sur G, visiblement invariante à gauche par Γ, d'où une p-forme θ° sur $\Gamma\backslash G$. On vérifie aisément que $\varphi : \theta \mapsto \theta^\circ$ est un isomorphisme de $A^p(\Gamma, X, \rho)$ sur l'espace $B^p(\Gamma, \rho)$ des p-formes sur $\Gamma\backslash G$, à valeurs dans F_ρ, qui vérifient

$$\Theta(X)\ \theta^\circ = -\rho(X).\theta^\circ, \qquad i(X).\theta^\circ = 0 \qquad (X \in \mathfrak{k}) \quad , \tag{4}$$

(où $\Theta(X)$ est la transformation infinitésimale associée à X, et $i(X)$ le produit intérieur par X). Une p-forme Θ sur $\Gamma\backslash G$ sera écrite sous la forme

$$\theta = \Sigma_I \, \theta_i . \omega^I = \Sigma_{\lambda_1,\dots,\lambda_p} \theta_{\lambda_1,\dots,\lambda_p} \omega^{\lambda_1} \dots \omega^{\lambda_p} ,$$

où, par conséquent,

$$\theta_I = \theta(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_p}) , \qquad (I = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)) ,$$

est une fonction sur $\Gamma\backslash G$, à valeurs dans F_ρ. Si $\theta \in B^p(\Gamma, \rho)$, la deuxième égalité de (4) montre que $\theta_I = 0$ si I contient un indice $> N$.

Munissons F_ρ d'un produit scalaire $(\, , \,)$ positif non-dégénéré, tel que $\rho(X)$ soit antisymétrique (resp. self-adjoint) si $X \in \mathfrak{k}$ (resp. $X \in \mathfrak{m}$) ce qui est toujours possible, et $\Gamma\backslash G$ de la métrique donnée par $ds^2 = \Sigma \, \omega^\lambda . \omega^\lambda$. On définit alors sur l'espace des p-formes sur $\Gamma\backslash G$, à valeurs dans F_ρ, un produit scalaire par

$$\langle \theta , \theta' \rangle = \Sigma_I \int_G (\theta_I , \theta'_I) \, dv \qquad (dv = \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n) .$$

On pose bien entendu $\langle \theta , \theta' \rangle = 0$ si θ et θ' sont homogènes de degrés différents.

2.2. PROPOSITION [8]. - <u>La différentielle</u> $d^o = \varphi \circ d \circ \varphi^{-1}$ <u>sur</u> B <u>a un adjoint</u> $\delta^o : B \to B$ <u>diminuant le degré de</u> 1. <u>Si</u> $\theta \in B^p(\Gamma, \rho)$, <u>on a</u>

(i) $(d^o \theta)_{i_1 \dots i_{p+1}} = \Sigma_u (-1)^{u-1} (X_{i_u} + \rho(X_{i_u})) \, \theta_{i_1,\dots,\hat{i}_u,\dots,i_{p+1}}$,

(ii) $(\delta^o \theta)_{i_1 \dots i_{p-1}} = \Sigma_k (\rho(X_k) - X_k) \, \theta_{k i_1 \dots i_{p-1}}$ $\quad (p \geq 1)$; $\delta^o \theta = 0$ si $p = 0$.

<u>Tout élément de</u> $H^p(\Gamma, F_\rho)$ <u>est représenté par une et une seule forme harmonique</u>

($\theta \in B^p(\Gamma, \rho)$ est harmonique si $d^o \theta = \delta^o \theta = 0$, donc si $\Delta\theta = 0$ avec $\Delta = d^o \delta^o + \delta^o d^o$.) Pour esquisser la démonstration, nous reprenons les notations θ, θ', θ^o de 2.1. La relation (i) provient de l'égalité

$$\rho(X) = \rho(g^{-1}).d\rho_g(X) , \qquad (X \in \mathfrak{g} , \quad g \in G)$$

et du fait que, dans l'expression usuelle de $d\overline{\theta}(X_{i_1}, \dots, X_{i_{p+1}})$, les termes où figurent les crochets $[X_{i_j}, X_{i_k}]$ sont nuls vu (1) et (4).

Soient $f, f' : G \to F_\rho$ des fonctions différentiables. Des formules

$$d.i(X) + i(X).d = \Theta(X) \ ; \quad df = \Sigma X_\lambda f.\omega^\lambda \quad ,$$

on déduit que $X_\lambda f.dv$ est un cobord, d'où, par STOKES,

$$\langle X_\lambda f , f' \rangle = - \langle f , X_\lambda f' \rangle \quad .$$

On tire alors (ii) de (i) et du fait que $\rho(X)$ est self-adjoint si $X \in m$.

Supposons Γ sans torsion. On montre que

$$\langle \theta , \theta' \rangle = c.\langle \theta , \theta' \rangle_M \qquad (\theta , \theta' \in A^p(\Gamma , X , \rho)) \quad ,$$

où $\langle \ , \ \rangle_M$ est le produit scalaire associé à la métrique $ds^2 = \Sigma\, \omega^i.\omega^i$: par suite ρ envoie formes harmoniques sur formes harmoniques, et la dernière assertion résulte du théorème de Hodge (à coefficients tordus). Pour le cas général, on peut s'appuyer sur [1], ou utiliser 1.1. (cf. [8]).

2.3. – Pour simplifier les notations, nous supposons ici $p = 1$ (et renvoyons à [8], § 7, pour le cas général). Soient $D : B^1 \to B^2$ et $D' : B^1 \to B^0$ les opérateurs définis par

$$(D\theta)_{ij} = X_i.\theta_j - X_j.\theta_i \ , \qquad D'\theta = - \Sigma_k X_k.\theta_k \qquad (\theta \in B^1(\Gamma , \rho)) \quad .$$

On vérifie sans grand mal que D et D' sont adjoints l'un de l'autre et que

(5) $$(\Delta\theta)_i = \Sigma_k (\rho(X_k)^2 - X_k^2)\, \theta_i + \Sigma_k (\rho([X_i , X_k]) - [X_i , X_k]).\theta_k \quad ,$$

(6) $$\langle \Delta\theta , \theta \rangle = \langle D\theta , D\theta \rangle + \langle D'\theta , D'\theta \rangle +$$
$$+ \Sigma_{i,k} \langle \rho(X_k)^2\, \theta_i , \theta_i \rangle + \Sigma_{i,j,k} \langle \rho([X_i , X_j])\, \theta_j , \theta_i \rangle \quad .$$

Soit $V_\rho = \mathrm{Hom}(m , F_\rho)$. On définit sur V_ρ une forme quadratique $Q(u , v)$ en posant

(7) $$Q(u , v) = \Sigma_{i,k} (\rho(X_k)^2\, u(X_i) + \rho([X_i , X_k])\, u(X_k) , v(X_i)) \quad ,$$

qui, si l'on y remplace u et v par les valeurs de θ en un point de G, n'est autre que l'intégrant du dernier terme de droite de (6). Si maintenant θ est harmonique, le premier membre est nul, d'où la

2.4. PROPOSITION. – <u>Si la forme quadratique de (7) est positive non-dégénérée, alors</u> $H^1(\Gamma , F_\rho) = 0$.

2.5. <u>Généralisations</u>. – [8] considère en fait les groupes $H^p(\Gamma , X , \rho)$ lorsque Γ est un sous-groupe discret uniforme d'une extension connexe G^* de G par un groupe compact P, et ρ une représentation réelle ou complexe de G^*.

Dans [8], on considère aussi le cas où X est un domaine borné symétrique et où l'on fait agir G sur $A^p(X, F_\rho)$ par l'intermédiaire d'un facteur d'automorphie (morphisme de $G^* \times X$ dans $GL(F_\rho)$ tel que $j(g.g' ; x) = j(g', x).j(g, g'.x)$) qui est holomorphe sur X pour tout $g \in G^*$. Les espaces $H^p(\Gamma, X, j)$, $H^p(M, \underline{\mathfrak{F}}_\rho)$ sont alors bigradués. Dans certains cas, $H^{N,o}(\Gamma, X, j)$ s'identifie à un espace de formes automorphes ([8], p. 413), ce qui généralise des résultats de EICHLER et SHIMURA. Voir aussi [9] pour d'autres applications.

3. Trivialité des déformations de Γ et de M.

3.1. THÉORÈME. - Supposons que G ne contienne pas de sous-groupe distingué de dimension trois. Alors $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad}) = 0$.

Soit θ une forme harmonique, à valeurs dans $\mathfrak{g}$ vu comme espace de la représentation adjointe. Elle est somme de deux formes, à valeurs dans $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{m}$ respectivement, qui, vu (1) et (5), sont aussi harmoniques. Il suffit donc de faire voir que $\theta = 0$ lorsque θ est à valeurs soit dans $\mathfrak{k}$, soit dans $\mathfrak{m}$. Dans le premier cas, on déduit de (1), (3) que $B^*([X_i, \theta_j], X_k) = 0$ quels que soient i, j, k, ce qui montre que θ est à valeurs dans le centralisateur de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{k}$, mais ce dernier est nul puisque G est effectif. Si θ est à valeurs dans $\mathfrak{m}$, écrivons $\theta_i = \Sigma f_i^j X_j$. On voit alors que, en un point $g \in G$,

$$Q(\theta, \theta) = (\tfrac{1}{2}) \Sigma_{ij} (f_i^j)^2 + \Sigma_{ijhk} R_{ihkj} f_j^i f_k^h \qquad (8)$$

où R_{ihkj} est défini par $[[X_j, X_k], X_h] = \Sigma_i R_{ihkj} X_i$, et est donc une composante du tenseur de courbure de X. On montre assez facilement que cette forme est positive, et est non-dégénérée si $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéal de dimension trois (cf. [12]), et 3.1 résulte alors de 2.4.

3.2. - Supposons Γ sans torsion. Alors, vu (2), $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad})$ s'identifie au premier espace de cohomologie de M, à coefficients dans le faisceau des germes de champs de vecteurs de Killing. D'après la théorie des déformations (cf. [2], et un article à paraître de GRIFFITH), la nullité de $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad})$ signifie alors que " M n'a pas de modules", en tant que variété localement symétrique, c'est-à-dire que toute famille différentiable de formes de Clifford-Klein compactes de X est triviale (en fait, on n'a considéré ici que des quotients $\Gamma\backslash X$ avec $\Gamma \subset G$, mais le cas où Γ est dans le groupe total des isométries de X s'y ramène aisément).

3.3. – Soient P un groupe de Lie connexe, H un groupe de type fini, (h_i) $(1 \leq i \leq m)$ un système générateur de H, et R l'ensemble des homomorphismes de H dans P. L'ensemble R s'identifie à un sous-espace fermé du produit P^m de m copies de P (voir ci-dessous), d'où une topologie sur R. Soit $r \in R$. On dira que toute déformation de $r(H)$ dans P est triviale si les homomorphismes $\mathrm{Int}\, p \circ r : H \to P$ $(p \in P)$ forment un voisinage de p dans R. On a alors

3.4. THÉORÈME (WEIL [12]). – Soient G^* un groupe de Lie connexe semi-simple de centre fini, sans composante compacte ou de dimension trois, et Γ^* un sous-groupe discret uniforme de G^*. Alors toute déformation de Γ^* dans G^* est triviale.

Le groupe adjoint $\mathrm{Ad}\, G^*$ de G^* s'identifie au groupe G de plus haut, pour un choix convenable de X, et l'image Γ de Γ^* dans $\mathrm{Ad}\, G^*$ est un sous-groupe discret, uniforme. D'autre part, par la suite spactrale des extensions de groupes, on voit tout de suite que

$$H^1(\Gamma , \mathfrak{g}_{Ad}) \cong H^1(\Gamma , \mathfrak{g}_{Ad}) \quad .$$

Comme Γ^* est de type fini [car si C est un ouvert relativement compact de G^* tel que $G^* = C.\Gamma^*$, alors Γ^* est engendré par $\Gamma^* \cap C.C^{-1}$], 3.4 résulte de 3.1 et de la proposition suivante :

3.5. PROPOSITION (WEIL [13]). – Reprenons les notations de 3.3 et soit $\mathfrak{p}$ l'algèbre de Lie de P. Si $H^1(r(H) , \mathfrak{p}_{Ad}) = 0$, alors toute déformation de $r(H)$ dans P est triviale.

Esquisse de démonstration : Soit H' le groupe libre sur $h_1 , \dots , h_m$ soit w_ι $(\iota \in I)$ une famille de mots en $2m$ indéterminées $X_1 , \dots , X_{2m}$ tels que les conjugués, dans H', des éléments de H' obtenus en remplaçant, dans les w_ι, X_i par h_i et X_{m+i} par h_i^{-1} $(1 \leq i \leq m)$ engendrent le noyau de l'homomorphisme naturel $u : H' \to H$. Tout mot w_ι définit de façon évidente un morphisme de G^m dans G, qui sera noté W_ι. Un homomorphisme $r' : H' \to G$ est caractérisé par le point $x = (r'(h_i))$ de G^m, qui est arbitraire. Il se factorise par u si et seulement si x est dans l'intersection V des sous-ensembles $W_\iota^{-1}(e)$ $(\iota \in I)$, donc R s'identifie à un fermé de G^m.

Soit $r : H \to G$ un homomorphisme ; soient Z, Z' les espaces de 1-cocycles, à valeurs dans $\mathfrak{p}$, de H, H' opérant par $\mathrm{Ad} \circ r$ et $\mathrm{Ad} \circ r \circ u$, et B l'espace des 1-cobords de H dans $\mathfrak{p}$. En vertu de l'identité des cocycles :

$z(x.x') = z(x) + \rho(x)(z(x'))$, on voit qu'un cocycle $z' \in Z'$ est complètement déterminé par les éléments $z'(h_i)$, qui sont arbitraires, et que z' représente (i. e. provient par inflation d'un cocycle de H si et seulement si $z'(w_\iota) = 0$ $(\iota \in I)$. Si l'on explicite convenablement ces conditions, on voit que Z s'identifie à l'intersection des noyaux des applications tangentes en $(r(h_i))$ aux morphismes W_ι . Par ailleurs $z \in Z$ est un cobord si et seulement s'il existe $p \in \mathfrak{p}$ tel que $z(h) = p - \mathrm{Ad}\, r(h)(p)$, et il est nécessaire et suffisant pour cela que cette condition soit vérifiée pour $h = h_1 , \dots , h_m$. On en déduit facilement que B est l'image de l'espace $\mathfrak{p}$ par l'application tangente en e à $p \longmapsto (\mathrm{Int}\, p(r(h_1)) , \dots , \mathrm{Int}\, p(r(h_m))$. Le fait que $Z = B$ implique la trivialité des déformations de $r(H)$ dans P résulte alors du lemme élémentaire suivant [13] :

3.6. LEMME. - Soient U , V , M_ι $(\iota \in I)$ des variétés différentiables, $\varphi : U \to V$, $\psi_\iota : V \to M_\iota$ des morphismes, tels que $\psi_\iota \circ \varphi$ soit constant ; soient

$$m_\iota = \psi_\iota \circ \varphi(U) \quad \text{et} \quad R = \bigcap_\iota \psi_\iota^{-1}(m_\iota) \qquad .$$

Soient $a \in U$, $b = \varphi(a)$, B l'image de l'espace tangent à U en a par $d\varphi$, et A l'intersection des noyaux des différentielles en b des morphismes ψ_ι . Supposons que $A = B$. Alors, si V_o est un voisinage ouvert suffisamment petit de b , $R \cap V_o$ est une sous-variété, contenue dans $\varphi(U)$.

3.7. Remarque. - 3.2. a démontré tout d'abord pour les espaces à courbure constante négative par CALABI (non publié), et 3.4 pour $SL(n , \mathbb{R})$ par SELBERG [10]. Le résultat principal de [12], établi par une généralisation convenable de la méthode de Calabi, est essentiellement équivalent à 3.1, qui est démontré explicitement dans [8], par la même méthode. 3.4 a été d'abord obtenu en utilisant [11] et [12]. Depuis, WEIL a remarqué que l'on pouvait remplacer [11] par 3.5 (cf. [13]). Ajoutons encore que [11] et [12] démontrent 3.4 dans un cas un peu plus général : G peut avoir des facteurs non-compacts de dimension 3 , pourvu que les projections de Γ^* sur ces facteurs ne soient pas discrètes.

4. Nombres de Betti de M .

4.1. - On prend ici pour ρ la représentation triviale de dimension 1 . Alors

$$b_p = \dim H^p(\Gamma , \mathbb{R}) = \dim H^p(M , \mathbb{R})$$

est le p-ième nombre de Betti de M. Le problème ici est de savoir si, lorsque G ne contient pas de facteur de dimension trois, on a $b_1(M) = 0$ (contrairement à ce qui se passe lorsque $G = \underset{\sim}{PSL}(2, \underset{\sim}{R})$ et X est le plan de Poincaré). Cela équivaut à : le groupe des commutateurs $[\Gamma : \Gamma]$ de Γ est d'indice fini dans Γ ; en effet, si Γ est sans torsion, alors $\Gamma = \pi_1(M)$, donc $H_1(M) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma]$, et on passe de là au cas général en utilisant 1.1.

Ce problème a été étudié d'abord dans [6]. A toute algèbre de Lie simple non compacte q, MATSUSHIMA associe une certaine constante $A(q)$, (par exemple, $A(q) = (\dim q - \dim s)/4.\dim s$, où s est une sous-algèbre compacte maximale, si s est simple), et considère la forme quadratique $H(q)$ sur $\mathrm{Hom}(t, t)$ (où $q = s + t$ est une décomposition de Cartan de q) obtenue à partir de la forme $Q(u, v)$ de (7) en remplaçant le facteur $1/2$ par $A(q)$. On a alors le

4.2. THÉORÈME (MATSUSHIMA [6]). - Supposons que la forme $H(q)$ soit positive non-dégénérée pour chaque composante simple q de g. Alors $b_1(M) = 0$.

Soit θ une forme harmonique de $B^1(\Gamma, 1)$, (notations du § 2). Pour montrer que $\theta = 0$, il suffit de voir qu'elle est invariante par G, donc que $X_\lambda \theta_i = 0$ quels que soient λ, i. En effet, une forme invariante $\neq 0$ donnerait lieu à un élément non nul de $H^1(g)$, qui est nul comme on sait. En fait, vu que $[m, m] = t$, il suffit de voir que $X_i \theta_j = 0$ $(i, j \leqslant N)$. Pour cela, on considère l'intégrale J sur $\Gamma\backslash G$ de la somme $\Phi(\theta)$ des fonctions $(X_i X_j \theta_k - X_j X_i \theta_k)^2$. Envisageons en chaque point de $\Gamma\backslash G$ les $f^i_j = X_i \theta_j$ comme les composantes d'un élément $u \in \mathrm{Hom}(m, m)$. En transformant Φ, on montre que $J \geqslant 0$ entraîne $0 \geqslant \int_{\Gamma\backslash G} H_g(u, u)\, dv$; où H_g est la somme des $H(q)$ correspondant aux idéaux simples de g, d'où le théorème.

4.3. - Il reste à savoir quand $H(g)$, g simple, est > 0. Cela a lieu dans les cas suivants : X est un domaine borné, non isomorphe à une boule unité [6], g provient par restriction des scalaires d'une algèbre complexe $\neq sl(2, \underset{\sim}{C})$ [4], g_C simple, G non de type G_2 ou de type : groupe unitaire d'une forme d'indice un (sur $\underset{\sim}{R}$, $\underset{\sim}{C}$, $\underset{\sim}{H}$) [5].

4.4. - Soit $I_p(X)$ l'espace des p-formes sur X, invariantes par G. On sait que

$$I_p(X) = H^p(g, t) = H^p(G^u/K) ,$$

où G^u est un sous-groupe compact maximal de la complexification de G, et que ses éléments sont des formes harmoniques. De plus, $I_p(X)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $B^p(\Gamma\ , 1)$ invariants par G. On a donc une inclusion canonique $I_p(X) \subset H^p(\Gamma\ , R)$, et, comme $I_1(X) = 0$, le problème de 4.1 est un cas particulier du suivant étudié dans [7] : quand a-t-on $I_p(X) = H^p(M)$? On a un théorème analogue à 4.2, où $H(q)$ est remplacé par la forme $H(q)_p$ obtenue en substituant $A(q)/p$ à $A(q)$ dans $H(q)$. On trouvera dans [5] et [7] des tables de valeurs de q et p pour lequel $H(q)_p > 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAILY (W. L.). - The decomposition theorem for V-manifolds, Amer. J. of Math., t. 78, 1956, p. 862-888.

[2] CALABI (E.). - On compact Riemannian manifolds with constant curvature, I., Differential geometry, p. 155-180. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Proc. Symp. in pure Math., 3).

[3] GROTHENDIECK (A.). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J., t. 9, 1957, p. 119-221.

[4] KANETUKI (S.) and NAGANO (T.). - On the first Betti numbers of compact quotient spaces of complex semi-simple Lie groups by discrete subgroups, Scient. Papers Coll. gen. Educ. Univ. Tokyo, t. 12, 1962, p. 1-11.

[5] KANETUKI (S.) and NAGANO (T.). - On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces, Osaka math. J., t. 14, 1962, p. 241-252.

[6] MATSUSHIMA (Y.). - On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces, Annals of Math., Series 2, t. 75, 1962, p. 312-330.

[7] MATSUSHIMA (Y.). - On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds, Osaka math. J., t. 14, 1962, p. 1-20.

[8] MATSUSHIMA (Y.) and MURAKAMI (S.). - On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric spaces, Annals of Math., Series 2, t. 78, 1963, p. 365-416.

[9] MATSUSHIMA (Y.) and SHIMURA (G.). - On the cohomology groups attached to certain vector-valued differential forms on the product of the upper-half planes, t. 78, 1963, p. 417-449.

[10] SELBERG (A.). - On discontinous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory, International Colloquium on function theory [1960. Bombay], p. 147-164. - Bombay, Tata Institute of fundamental Research, 1960.

[11] WEIL (A.). - On discrete subgroups of Lie groups, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 369-384.

[12] WEIL (A.). - On discrete subgroups of Lie groups, II., Annals of Math., Series 2, t. 75, 1962, p. 578-602.

[13] WEIL (A.). - Remarks on the cohomology of groups, Annals of Math., Series 2 (à paraître).