

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

LÉOPOLDO NACHBIN

Régularité des solutions des équations différentielles elliptiques

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 258, p. 227-237

http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__227_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ELLIPTIQUES

par Léopoldo NACHBIN

(d'après J. MOSER [7], [8])

1. Notations et terminologie.

Voir le traité classique de L. SCHWARTZ [12] et le livre récent de HÖRMANDER [2]. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non-vidé, où \mathbb{R} est la droite numérique ; $\mathfrak{E}(U) = C^\infty(U)$ l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables sur U ; $\mathfrak{O}(U) = C_0^\infty(U)$ le sous-espace de celles à support compact ; $\mathfrak{D}'(U)$ l'espace des distributions sur U ; $\langle T, f \rangle = T(f)$ la valeur de $T \in \mathfrak{D}'(U)$ sur $f \in \mathfrak{O}(U)$; D_i la dérivation partielle du premier ordre sur \mathbb{R}^n par rapport à la i -ième variable et $D_{ij} = D_i D_j$; $\int_X f$ l'intégrale de Lebesgue de f sur X ; $\int_X f$ la moyenne de f sur X , donc $\int_X f$ divisée par la mesure de X ; $\sup_X \text{ess } f$ et $\inf_X \text{ess } f$ le supremum et l'infimum essentiels de f sur X modulo des ensembles négligeables (de mesure nulle) ; $\mathfrak{L}_{loc}^p(U)$ l'espace des fonctions réelles mesurables sur U à puissance p -ième localement intégrable ; $\mathfrak{L}_c^p(U)$ le sous-espace de celles à support compact ($1 \leq p \leq \infty$; interprétation usuelle pour $p = \infty$). Notons que

$$\mathfrak{L}_c^2(U) \subset \mathfrak{L}_{loc}^2(U) \subset \mathfrak{L}_{loc}^1(U) \subset \mathfrak{D}'(U) \quad .$$

Si $T \in \mathfrak{D}'(U)$, on posera

$$T' = \text{grad } T = (D_1 T, \dots, D_n T) \in [\mathfrak{D}'(U)]^n \quad ;$$

et si $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{D}'(U)$, on écrira $T' \in \mathfrak{X}$ pour indiquer que $D_1 T, \dots, D_n T \in \mathfrak{X}$.

Si $T = (T_1, \dots, T_n) \in [\mathfrak{D}'(U)]^n$, on posera

$$T' = \text{div } T = D_1 T_1 + \dots + D_n T_n \in \mathfrak{D}'(U) \quad ;$$

pour $S \in \mathfrak{D}'(U)$, on posera

$$ST = (ST_1, \dots, ST_n) \in [\mathfrak{D}'(U)]^n$$

si les produits $ST_1, \dots, ST_n \in \mathfrak{D}'(U)$ ont un sens. Le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n et la norme associée seront notés $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$. $B_x(r)$ est la boule fermée de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r \geq 0$; $Q_x(h)$ est le cube fermé de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de cotés de longueur $h \geq 0$ parallèles aux axes. Si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions, $(f|g) : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction $x \rightsquigarrow (f(x)|g(x))$. Si $a : U \rightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$, où $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'algèbre normée des endomorphismes linéaires de \mathbb{R}^n identifiés aux matrices réelles carrées d'ordre n ,

et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, on notera $af : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction $x \rightsquigarrow a(x) f(x)$ et $a^{-1} : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ la fonction $x \rightsquigarrow [a(x)]^{-1}$ (pourvu que $a(x)$ soit partout **inversible**). La fonction $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est höldérienne si, à tout compact $K \subset U$, correspond $h = h(K) > 0$ tel que

$$\sup_{x, y \in K, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^h} < \infty \quad .$$

2. Le théorème de de Giorgi-Nash.

Soit $a : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une fonction mesurable dont la valeur

$$a(x) = \{a_{ij}(x)\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

est une matrice symétrique positive pour tout $x \in U$. On suppose que $a(x)$ est partout inversible et que a et a^{-1} sont localement bornées ; donc, pour tout compact $K \subset U$, il existe $L = L(K) \geq 1$ tel que

$$(1) \quad L^{-1} \cdot (t|t) \leq (a(x) t|t) \leq L \cdot (t|t) \quad \text{si } t \in \mathbb{R}^n, \quad x \in K \quad .$$

On considérera l'opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique $\text{div}(a \cdot \text{grad})$.

$$(2) \quad u \rightarrow (au')' = \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u \right) \quad .$$

Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients distributions sur U est a priori défini sur $\mathcal{E}(U)$ et à valeurs dans $\mathcal{O}'(U)$. Dans le cas qui nous occupe, les a_{ij} sont mesurables et localement bornées, d'après (1) : on peut considérer l'opérateur (2) comme défini sur l'espace vectoriel des $u \in \mathcal{O}'(U)$ telles que $u' \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(U)$. Alors u est solution ou sous-solution suivant que $(au')' = 0$ ou $(au')' \geq 0$, c'est-à-dire que la distribution $(au')'$ est nulle ou une mesure positive. On a la formule

$$\langle (au')', f \rangle = - \int (au' | f')$$

pour $f \in \mathcal{O}(U)$ et u dans le domaine de (2). Il en résulte que u est une solution, ou une sous-solution, si et seulement si $\int (au' | f') = 0$ pour toute $f \in \mathcal{O}(U)$, ou $\int (au' | f') \leq 0$ pour toute $f \in \mathcal{O}(U)$, $f \geq 0$. Pour des raisons techniques, désormais on considérera seulement des solutions ou sous-solutions u telles que $u \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(U)$, $u' \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^2(U)$; on supposera tacitement satisfaites ces deux conditions. Alors u est une solution, ou une sous-solution, si et seulement si

$$\int (au' | f') = 0 \quad \text{pourvu que } f \in \mathcal{L}_c^2(U), \quad f' \in \mathcal{L}_c^2(U),$$

$$\text{ou } \int (au' | f') \leq 0 \quad \text{pourvu que } f \in \mathcal{L}_c^2(U), \quad f' \in \mathcal{L}_c^2(U), \quad f \geq 0.$$

Notons aussi la notion duale de sur-solution.

THÉORÈME 1 (de GIORGI-NASH). - Toute solution u de $(au) = 0$ dans U est essentiellement höldérienne (c'est-à-dire devient höldérienne, donc continue, après correction sur un ensemble négligeable).

Voir ci-dessous la démonstration de ce résultat fameux (§ 4).

3. L'inégalité de Harnack-Moser.

THÉORÈME 2 (HARNACK-MOSER). - U étant connexe, à tout compact $K \subset U$ on peut associer $c = c(K) > 1$ dépendant aussi de l'opérateur et telle que, pour toute solution $u \geq 0$ de $(au) = 0$ dans U , on ait

$$\sup_K \text{ess } u \leq c \inf_K \text{ess } u \quad .$$

L'essentiel de la démonstration sera indiqué aux paragraphes 6-7. D'après le théorème 1, on peut supposer u continue après correction sur un ensemble négligeable, donc remplacer $\sup \text{ess}$ et $\inf \text{ess}$ par \sup et \inf .

Remarque. - A tout compact $K \subset U$, on peut aussi associer $c' = c'(K) > 0$ et $c'' = c''(K) > 0$, telles que, $u \geq 0$ étant une solution quelconque de $(au) = 0$ dans U normalisée par $\inf_K u \leq 1 \leq \sup_K u$, alors $\frac{1}{c'} \leq u \leq c''$ presque partout sur K . En supposant que c , c' et c'' soient les plus petites possibles et K non-négligeable, on a

$$c = c' = c'' > 1 \quad .$$

4. Le théorème de de Giorgi-Nash à partir de l'inégalité de Harnack-Moser.

LEMME 1. - Toute solution u de $(au) = 0$ dans U est essentiellement localement bornée (donc devient localement bornée après correction sur un ensemble négligeable).

Ce lemme (conséquence du théorème 1) est démontré directement (§ 5, proposition 3, corollaire) et utilisé dans la preuve du théorème 1.

LEMME 2. - Pour $x \in U$, $r \geq 0$ tels que $B_x(r) \subset U$, soit $O_x(r)$ l'oscillation dans $B_x(r)$ de la fonction localement bornée $u : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si, pour tout compact $K \subset U$ et tout t , $0 < t < 1$, il existe T , $0 < T < 1$, et $\rho > 0$ tels que $B_x(\rho) \subset U$ et $O_x(tr) \leq T \cdot O_x(r)$ si $x \in K$ et $0 \leq r \leq \rho$, alors u est höldérienne dans U .

La réciproque est fautive : les fonctions satisfaisant aux conditions du lemme forment un sous-ensemble strict de l'ensemble des fonctions höldériennes sur U (ce qui donne une précision supplémentaire au théorème 1). Pour la démonstration facile, voir de GIORGI [1], MOSER [8] p. 587, et [7] p. 465 (on fixe $t = 1/2$).

Démonstration du théorème 1 à partir du théorème 2. - Soit u une solution de $(au')' = 0$ dans U . Pour $x \in U$, $r > 0$ tels que $B_x(r) \subset U$, soient

$$M_x(r) = \sup_{B_x(r)} \text{ess } u, \quad m_x(r) = \inf_{B_x(r)} \text{ess } u \quad \text{et} \quad O_x(r) = M_x(r) - m_x(r),$$

d'après le lemme 1. Le théorème 2, pour l'ouvert U' et le compact K' donnés par les boules ouvertes et fermées de centre x et de rayons r et tr ($0 < t < 1$ fixé), donne une constante $c' > 1$ correspondant à l'inégalité de HM pour U' et K' . Les solutions $v = h - u$, pour $h = M_x(r)$, et $v = u - h$, pour $h = m_x(r)$, de $(av')' = 0$, sont essentiellement positives dans U' . Le théorème 2 pour U' et K' donne

$$M_x(r) - m_x(tr) \leq c' [M_x(r) - M_x(tr)] \quad \text{et} \quad M_x(tr) - m_x(r) \leq c' [m_x(tr) - m_x(r)].$$

Par addition, on a

$$O_x(tr) \leq T' \cdot O_x(r) \quad \text{où} \quad T' = \frac{c' - 1}{c' + 1}.$$

Si $K \subset U$ est compact et si $\rho > 0$ est tel que $B_x(\rho) \subset U$ si $x \in K$, il existe c telle que $c' \leq c$ si $x \in K$, $0 < r \leq \rho$. Donc

$$O_x(tr) \leq T \cdot O_x(r) \quad \text{si} \quad x \in K, \quad 0 < r \leq \rho, \quad \text{où} \quad T = \frac{c - 1}{c + 1}.$$

On peut supposer u continue après correction sur un ensemble négligeable, parce que $O_x(t^m r) \leq T^m \cdot O_x(r)$ ($m = 1, 2, \dots$) entraîne $O_x(r) \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$, pour tout $x \in U$. On applique alors le lemme 2.

5. Quelques propriétés des solutions et sous-solutions.

PROPOSITION 1. - Si $v = f(u)$, $v \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$, $v' \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors v est une sous-solution de $(av')' = 0$ sous une des deux hypothèses suivantes :

- (a) u est une solution de $(au')' = 0$ dans U et f est convexe ;
- (b) u est une sous-solution de $(au')' = 0$ dans U et f est croissante convexe.

En fait, si $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ et si f' et f'' sont bornées, $f'(u)$ et $f''(u)$ sont mesurables bornées. On a au sens des distributions

$$[f(u)]' = f'(u) u' , \quad [f'(u)]' = f''(u) u'$$

et

$$(av')' = [af'(u) u']' = (au')' f'(u) + (au'|u') f''(u) \quad .$$

Or $(au'|u') \geq 0$ d'après (1). Donc $(av')' \geq 0$ si $(au')' = 0$, $f'' \geq 0$, ou si $(au')' \geq 0$, $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$. Le cas général résulte d'un passage à la limite sur f .

PROPOSITION 2. - Si $x \in U$, $0 < r < R$, $B_x(R) \subset U$, alors

$$\int_{B_x(r)} \|u'(t)\|^2 dt \leq \frac{4L^4}{(R-r)^2} \int_{B_x(R)} u(t)^2 dt \quad ,$$

où $L = L[B_x(R)]$ d'après (1), sous une des deux hypothèses suivantes :

(a) u est une solution de $(au')' = 0$ dans U ;

(b) $u \geq 0$ est une sous-solution de $(au')' = 0$ dans U .

La démonstration classique très simple ([7], p. 459) consiste à prendre $f = g^2 u$ dans $\int (au'|f') = 0$ ou $\int (au'|f') \leq 0$ suivant le cas (a) ou (b), où $g \in \mathcal{L}_c^\infty(U)$, $g' \in \mathcal{L}_c^\infty(U)$, donc $f \in \mathcal{L}_c^2(U)$, $f' \in \mathcal{L}_c^2(U)$. Un petit calcul, utilisant (1), l'inégalité de Schwarz et un choix de g , prouve la proposition.

LEMME 3. - Si $u \geq 0$ est une sous-solution de $(au')' = 0$ dans U et $v = u^p \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$ pour un certain $p \geq 1$, alors v est une sous-solution de $(av')' = 0$ dans U .

En fait, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^p$ si $x \geq 0$. On a $v = f(u)$. Pour $t \geq 0$, soit $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_t(x) = f(x)$ si $x \leq t$, $f_t(x)$ est l'ordonnée au point d'abscisse x de la droite tangente à f au point d'abscisse t si $x \geq t$. Posons $v_t = f_t(u)$. On a $v_t \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$ parce que $f_t \leq f$ et $v_t' = f_t'(u) u' \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$ parce que f_t' est bornée. D'après la proposition 1-(b), v_t est une sous-solution. En appliquant la proposition 2-(b) avec v_t à la place de u et faisant $t \rightarrow \infty$, on déduit que $v' \in \mathcal{L}_{loc}^2(U)$. D'après la proposition 1-(b), v est une sous-solution.

PROPOSITION 3. - Si k et K sont des compacts de \mathbb{R}^n , où k est contenu à l'intérieur de K et $K \subset U$, il existe $c = c(k, K) > 0$ dépendant aussi de l'opérateur, telle que, sous une des deux hypothèses (a) et (b) de la proposition 2, on ait

$$|u(y)| \leq c \times \left\{ \int_K u(t)^2 dt \right\}^{1/2} \quad \text{presque partout pour } y \in k \quad .$$

En fait ([13], [7] p. 461), il suffit de prendre $k = B_x(\rho)$, $K = B_x(2\rho)$. Admettons (b). Rappelons l'inégalité classique de Sobolev : si $w \in \mathcal{E}_{loc}^{2^x}(U)$, $w' \in \mathcal{E}_{loc}^2(U)$, $B_x(r) \subset U$, alors

$$\left\{ \frac{1}{r^n} \int_{B_x(r)} w(t)^{2s} dt \right\}^{1/s} \leq c_n \left\{ \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B_x(r)} \|w'(t)\|^2 dt + \frac{1}{r^n} \int_{B_x(r)} w(t)^2 dt \right\},$$

où $c_n > 0$ dépend seulement de n et $s = n/(n-2)$ (on supposera $n > 2$, ce qui n'est pas une restriction essentielle). Le fait que l'intégrale à gauche soit finie n'est pas une hypothèse, mais une conséquence. En combinant ceci, où $w \geq 0$ est une sous-solution dans U , avec la proposition 2-(b), où $0 < r \leq R \leq 2r < 2\rho$, on trouve

$$(3) \quad \left\{ \frac{1}{r^n} \int_{B_x(r)} w(t)^{2s} dt \right\}^{1/s} \leq c' \left\{ 1 + \frac{r^2}{(R-r)^2} \right\} \times \left\{ \frac{1}{R^n} \int_{B_x(R)} w(t)^2 dt \right\},$$

où $c' = 2^{n+2} L^2 c_n$, $L = L[B_x(2\rho)]$. Prenons une suite $r_0 > r_1 > \dots$ telle que

$r_0 = 2\rho$, $r_{i+1} \leq 2r_i$, $r_i \rightarrow r$, $\frac{r_i}{r_{i-1} - r_i}$ reste bornée, par exemple $r_i = \rho(1 + 2^{-i})$. Appliquons le lemme 3 et (3) avec $w = u^{s^i}$, d'une façon répétée. On trouve $A_i \leq d^i (A_{i-1})^s$ ($i = 0, 1, \dots$) où

$$A_i = \frac{1}{(r_i)^n} \int_{B_x(r_i)} [u(t)]^{2s^i} dt$$

et $d > 1$ est une constante. On aura

$$A_i \leq d^{i+(i-1)s+\dots+s^{i-1}} (A_0)^{s^i}, \quad \text{d'où } A_i \leq \{d^{s/(s-1)} A_0\}^{s^i}.$$

En prenant la racine s^i -ième et faisant $i \rightarrow \infty$, on trouve

$$u(y)^2 \leq d^{s/(s-1)^2} (2\rho)^{-n} \int_{B_x(2\rho)} u(t)^2 dt \quad \text{presque partout pour } y \in B_x(\rho),$$

ce qui prouve la proposition 3-(b). En admettant (a), on applique la proposition 3-(b) à $v = f(u)$, où $f \in \mathcal{E}(R)$, $f \geq 0$, $f'' \geq 0$, $f(t) \leq |t|$ et $f'(t) = 1$ en dehors d'un compact. Par passage à la limite, en faisant $f(t) \rightarrow |t|$, on obtient la proposition 3-(a).

COROLLAIRE. - On a le lemme 1. En plus, toute sous-solution u de $(au)'' = 0$ dans U essentiellement localement bornée inférieurement est aussi essentiellement localement bornée supérieurement.

6. Réduction de l'inégalité de Harnack-Moser au cas local.

LEMME 4. - Considérons des nombres réels tels que :

1° $0 \leq m_i \leq M_i \leq c_i m_i$ et $c_i \geq 1$ ($i = 1, \dots, s$) ;

2° pour toute partition $I \cup J = \{1, \dots, s\}$ de l'ensemble des entiers $1, \dots, s$ où $I \cap J = \emptyset$, $I \neq \emptyset$, $J \neq \emptyset$ il existe $i \in I$, $j \in J$, tels que les intervalles fermés $[m_i, M_i]$ et $[m_j, M_j]$ s'intersectent. Alors $M \leq cm$, où $M = \sup \{M_i\}$, $m = \inf \{m_i\}$, $c = c_1 \dots c_s$.

LEMME 5. - Soient $(U_t)_{t \in T}$, $(V_t)_{t \in T}$ deux familles d'ouverts de \mathbb{R}^n , où V_t est à adhérence compacte $K_t = \bar{V}_t$, $K_t \subset U_t \subset U$, $\bigcup_{t \in T} V_t = U$ et U est connexe. Si l'inégalité de Harnack-Moser est vraie pour tout couple U_t, K_t , elle est vraie aussi pour U, K , où $K \subset U$ est compact.

En fait, supposons K connexe non-vide (parce qu'on peut remplacer K par un compact connexe non-vide plus grand, contenu dans U) et soit $K \subset V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_s}$ où K intersecte tout V_{t_i} . Il existe une constante $c_i > 1$ rendant l'inégalité de HM valable pour U_{t_i}, K_{t_i} . Posons $M_i = \sup_{K_{t_i}} \text{ess } u$, $m_i = \inf_{K_{t_i}} \text{ess } u$ où $u \geq 0$ est une solution de $(au)' = 0$ dans U . Le lemme 4 s'applique.

7. Le cas local de l'inégalité de Harnack-Moser.

On écrira $Q(h)$ au lieu de $Q_0(h)$, si le centre du cube est à l'origine. Posons

$$F(p, h) = \left\{ \int_{Q(h)} u^p \right\}^{1/p}$$

si $u \geq 0$ est mesurable sur U , $h > 0$, $Q(h) \subset U$, $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ (la définition usuelle de $F(0, h)$ étant inutile ici). $F(p, h)$ est fonction croissante de p (inégalité de Hölder), tendant vers le supremum et l'infimum essentiels de u sur $Q(h)$ pour $p \rightarrow +\infty$ et $p \rightarrow -\infty$. Par la suite, on supposera $Q(4) \subset U$, et on indiquera par $c_1, c_1(p), \dots$ des constantes strictement positives dépendant seulement de l'opérateur et éventuellement de p . On admettra que $n > 2$, ce qui n'est pas une restriction essentielle. Le théorème 2 est une conséquence des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 4. - Il existe $c_1(p)$ pour $p > 1$ telle que, si $u \geq D$ est une sous-solution de $(au)' = 0$ dans U , on ait

$$\sup_{Q(1)} \text{ess } u \leq c_1(p) \cdot F(p, 2) \quad .$$

PROPOSITION 5. - Il existe $c_2(p)$ pour $0 < p < s = n/(n-2)$ telle que, si $u \geq 0$ est une sur-solution de $(au')' = 0$ dans U , on ait

$$F(p, 2) \leq c_2(p) \times \inf_{Q(1)} \text{ess } u .$$

Par suite, en prenant $p = (1+s)/2$, on aura l'inégalité de HM pour U et $Q(1)$. Par des translations et des homothéties, ceci entraîne le théorème 2, d'après le lemme 5, paragraphe 6.

Aperçu de la preuve de la proposition 4. - Soient $0 < h' < h \leq 2h' \leq 4$. On utilise l'inégalité $\int (au'|f') \leq 0$ pour $f \in \mathcal{L}_c^2(U)$, $f' \in \mathcal{L}_c^2(U)$. On remarque que $u \in \mathcal{L}_{loc}^\infty(U)$ après correction sur un ensemble négligeable (proposition 3, corollaire, § 5). Un choix convenable de f et un calcul où l'on utilise (1) et l'inégalité de Schwarz ([8] p. 583-584) entraînent

$$\int_{Q(h')} \|v'(t)\|^2 dt \leq c_3 \times \left(\frac{2k}{2k-1}\right)^2 \left(\frac{2}{h-h'}\right)^2 \int_{Q(h)} v(t)^2 dt \quad \text{où } v = u^k, \quad k > 1/2.$$

Ceci et l'inégalité de Sobolev donnent, en posant $p = 2k$,

$$(4) \quad F(sp, h') \leq c_4 \times \left(\frac{h}{h'} - 1\right)^{-2/p} \left(\frac{p}{p-1}\right)^{2/p} F(p, h) \quad \text{où } p > 1 .$$

Posons $p_i = s^i p$, $h_i = 1 + 2^{-i}$ ($i = 0, 1, \dots$), où $p > 1$. Appliquons (4) en remplaçant p par p_i , h par h_i , h' par h_{i+1} . Par applications répétées, où $F(p_0, h_0) = F(p, 2)$, on aura

$$F(p_{i+1}, h_{i+1}) \leq c_1(p) \cdot F(p, 2) ,$$

ce qui donne la proposition 4 pour $i \rightarrow \infty$.

Aperçu de la preuve de la proposition 5. - On peut supposer que $\inf_U u > 0$ (parce qu'on peut remplacer u par $u + \epsilon$, où $\epsilon > 0$, et faire $\epsilon \rightarrow 0$). La difficulté principale dans la démonstration consiste à établir l'inégalité (4.6) ([8] p. 586), c'est-à-dire

$$(5) \quad F(q, 3) \leq c_5 \cdot F(-q, 3)$$

où $q > 0$ dépend seulement de l'opérateur. En effet, l'inégalité

$$\int (au'|f') \geq 0, \quad \text{où } f = g^2/u, \quad g \in \mathcal{L}_c^2(U), \quad g' \in \mathcal{L}_c^2(U) ,$$

entraîne, par un petit calcul où l'on utilise (1) et l'inégalité de Schwarz,

$$\int g^2 \|v'\|^2 \leq 4L^4 \int \|g'\|^2$$

où $v = \log u$, $L = L[Q(4)]$ et g a son support dans $Q(4)$. Un choix convenable de g prouve que $\int_Q \|v'\|^2 \leq c_6 \cdot h^{n-2}$ pour tout sous-cube $Q \subset Q(3)$ de

côtés de longueur $h > 0$ parallèles aux axes. On applique une inégalité de Poincaré ([8] p. 579) pour toute w pour laquelle les intégrales en question existent

$$\int_Q (w - m)^2 \leq (h/\pi)^2 \int_Q \|w'\|^2 \quad \text{où } m = \chi_Q w \quad .$$

Pour $w = v$, on a donc

$$\chi_Q |v - m| \leq \{\chi_Q (v - m)^2\}^{1/2} \leq c_7 \quad \text{où } m = \chi_Q v \quad \text{et } Q \subset Q(3) \quad .$$

Ceci permet d'appliquer un lemme de John-Nirenberg (§ 8), où $w = v = \log u$, $k = c_7$. En posant $q = \alpha/k$, on obtient

$$\chi_{Q(3)} u^q \times \chi_{Q(3)} u^{-q} \leq \beta^2$$

ce qui prouve (5). Finalement, par une répétition du raisonnement utilisé dans la preuve de la proposition 4, on voit que

$$(6) \quad F(-q, 3) \leq c_8 \times \inf_{Q(1)} \text{ess } u, \quad F(p, 2) \leq c_9(p) \times F(q, 3) \quad (0 < p < s) \quad .$$

La proposition 5 résulte alors de (5) et (6).

8. Le lemme de John-Nirenberg.

LEMME 6 (JOHN-NIRENBERG). - Il existe des constantes $\alpha > 0$, $\beta > 0$ dépendant seulement de n , ayant la propriété suivante, Soient w une fonction réelle intégrable sur $Q_a(H)$, $H > 0$, et $k > 0$. Supposons que, pour tout sous-cube $Q \subset Q_a(H)$ de côtés non nuls parallèles aux axes, il existe $w_Q \in R$ telle que $\chi_Q |w - w_Q| \leq k$. Alors $|w|^p$ est intégrable sur $Q_a(H)$ pour tout $p \geq 1$ et il existe $w_0 \in R$ telle que

$$\chi_{Q_a(H)} e^{(\alpha/k) \cdot |w - w_0|} \leq \beta, \quad \text{d'où } \chi_{Q_a(H)} e^{(\alpha/k)w} \times \chi_{Q_a(H)} e^{-(\alpha/k)w} \leq \beta^2 \quad .$$

La dernière inégalité résulte, par multiplication, des deux inégalités qu'on obtient à partir de la précédente en remarquant que $e^x \leq e^{|x|}$, $e^{-x} \leq e^{|x|}$. Pour la démonstration du lemme, voir [3], lemma 1, (3).

9. Commentaires.

Le théorème 1 est dû à de GIORGI [1]. Légèrement plus tard, NASH [10] prouvait un résultat analogue pour l'équation parabolique

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \sum_{i=1}^n D_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) \times D_j u(t, x) \right\}$$

(contenant comme cas particulier l'équation elliptique du théorème 1), d'une façon indépendante, par des méthodes différentes. Le théorème 2, classique et dû à

HARNACK pour l'équation de Laplace, est dû à MOSER [8] sous la forme indiquée. MOSER [9] vient d'étendre le théorème 2 à l'équation (7) sous l'hypothèse (1), avec $a(t, x)$ à la place de $a(x)$, où $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $0 < t < T$. Auparavant, MOSER avait donné une démonstration du théorème 1 basée sur une forme affaiblie de l'inégalité de Harnack ([7] théorème 2). Au lieu de considérer des solutions tronquées $\sup(u, k)$, comme de GIORGI, où u est une solution de $(au)' = 0$, MOSER utilise des puissances u^p , plus commodes en vue de l'inégalité de Sobolev. Dans les deux cas, on considère des fonctions $f(u)$ qui sont des sous-solutions ou des sur-solutions. Comme dans les démonstrations usuelles de la régularité des solutions, le raisonnement de MOSER est itératif, mais il porte sur le comportement de $F(p, h) = \{\chi_{Q(h)} u^p\}^{1/p}$ pour p positif ou négatif. Il reste à savoir si la méthode des solutions tronquées donne le théorème 2. L'extension des théorèmes 1 et 2 aux équations linéaires d'ordre arbitraire à coefficients distributions reste ouverte.

Parmi les justifications valables de l'intérêt de l'étude de la régularité des solutions des équations linéaires, à coefficients irréguliers, signalons son application à la preuve de la régularité des solutions des équations non-linéaires, mais régulières. En fait, considérons la fonctionnelle

$$J(u) = \int_U f(u'), \quad u : U \rightarrow \mathbb{R},$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique et $L^{-1} \cdot (t|t) \leq \sum D_{ij} f(x) t_i t_j \leq L \cdot (t|t)$ pour $x \in \mathbb{R}^n$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitraires, $L \geq 1$ fixé. L'équation d'Euler de J s'écrit

$$(f' \circ u')' = \sum D_i [(D_j f)(D_1 u, \dots, D_n u)] = 0.$$

Dans les méthodes directes du Calcul des variations, on veut prouver que, si $u, D_i u, D_{ij} u \in \mathcal{E}_{loc}^2(U)$ ($1 \leq i, j \leq n$) et si u est une extrémale de J , donc solution de l'équation d'Euler au sens des distributions (ce qui a un sens, parce que les $D_{ij} f(x)$ sont bornées, donc on a des inégalités $|D_i f(x)| \leq c' \|x\| + c''$), alors u est essentiellement analytique. Pour cela, on remarque que, si $t \in \mathbb{R}^n$, $w = \frac{\partial u}{\partial t}$, on aura $(aw')' = \frac{\partial}{\partial t} (f' \circ u') = 0$, où $a_{ij} = (D_{ij} f) \circ u'$. D'après le théorème 1, w est essentiellement höldérienne. On applique alors un théorème classique de HOFF-STAMPACCHIA-MORREY, suivant lequel l'extrémale u est analytique si $D_1 u, \dots, D_n u$ sont höldériennes. Le théorème 1 est donc un pont pour arriver à ce but d'analyticité. Voir les conférences de MORREY [5], [6], NIRENBERG [11], STAMPACCHIA [13], [14], où l'on trouvera d'autres sources de la vaste littérature sur le sujet, ses origines et applications en calcul des variations et géométrie différentielle.

LITMAN, STAMPACCHIA et WEINBERGER [4] utilisent les théorèmes 1 et 2 dans l'étude du problème de Dirichlet.

REMARQUE. - Les articles [7] et [8] contiennent des fautes faciles à corriger. En particulier, signalons que les inégalités (5) et (6) de cet exposé correspondent aux inégalités (4.4), (4.5) et (4.6) de [8].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] de GIORGI (E.). - Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Accad. Sc. Torino, Cl. Sc. fis. nat., Série 3, t. 3, 1957, p. 25-43.
- [2] HORMANDER (Lars). - Linear partial differential operators. - Berlin, Springer-Verlag, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 116).
- [3] JOHN (F.) and NIRENBERG (L.). - On functions of bounded mean oscillation, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 415-426.
- [4] LITMAN (W.), STAMPACCHIA (G.) and WEINBERGER (H. F.). - Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, Ann. Scuola norml. sup. Pisa (à paraître).
- [5] MORREY (Charles B.). - Some recent developments in the theory of partial differential equations, Bull. Amer. math. Soc., t. 68, 1962, p. 279-297.
- [6] MORREY (Charles B.). - Des résultats récents du calcul des variations, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1961/62, n° 5, 62 p. (Collège de France).
- [7] MOSER (Jörgen). - A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 13, 1960, p. 457-468.
- [8] MOSER (Jörgen). - On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Comm. pure and appl. Math., t. 14, 1961, p. 577-591.
- [9] MOSER (Jörgen). - A Harnack inequality for parabolic differential equations, à paraître.
- [10] NASH (J.). - Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, Amer. J. of Math., t. 30, 1958, p. 931-954.
- [11] NIRENBERG (L.). - Some aspects of linear and nonlinear partial differential equations, Proceedings of the International congress of mathematicians [1962. Stockholm] (à paraître).
- [12] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, tomes 1 (2e éd.) et 2. - Paris, Hermann, 1951-1957 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ; Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).
- [13] STAMPACCHIA (Guido). - Equations elliptiques à données discontinues, Séminaire Schwartz, t. 5, 1960/61 : Equations aux dérivées partielles et interpolation, n° 4, 16 p.
- [14] STAMPACCHIA (Guido). - Second order elliptic equations and boundary value problems, Proceedings of the International congress of mathematicians [1962. Stockholm] (à paraître).