Pierre Cartier

Représentations linéaires des groupes algébriques semi-simples en caractéristique non nulle

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. n° 255, p. 179-188
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__179_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 255 Mai 1963

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES ALGÉBRIQUES SEMI-SIMPLES EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

par Pierre CARTIER

A l'exception des cinq groupes de Matthieu et des groupes alternés $\underset{\sim}{A}_n$, tous les groupes simples, non commutatifs et finis, que l'on connaît sont dérivés des groupes de Lie semi-simples ; JORDAN et DICKSON savaient déjà définir les analogues finis des groupes linéaires classiques, mais c'est CHEVALLEY (cf. [2] et [3]) qui a donné la méthode générale pour associer un groupe fini à tout groupe de Lie semi-simple complexe et tout corps fini ; au moyen de la théorie des groupes algébriques, STEINBERG, TITS, SUZUKI et REE ont défini de nouveaux groupes finis analogues à ceux de CHEVALLEY. Tous ces groupes sont des sous-groupes de groupes algébriques définis sur le corps $\underset{\sim}{F}_p$ à p éléments, et le but du mémoire [7] de STEINBERG, dont nous rendons compte ici, est de prouver que toutes les représentations linéaires irréductibles de ces groupes finis proviennent de représentations rationnelles de groupes algébriques, et de les classer.

1. Réduction modulo p des groupes linéaires algébriques.

Dans les questions de réduction modulo p, il importe de distinguer entre un groupe algébrique "abstrait" et l'une de ses réalisations linéaires ; les définitions qui suivent sont un pis-aller pour éviter la théorie des schémas de Grothendieck.

Soient K un corps algébriquement clos, et R un sous-anneau principal de K (par exemple un sous-corps de K). Une R-structure sur un groupe G est définie par un anneau $A_R(G)$ de fonctions sur G à valeurs dans K, satisfaisant aux conditions :

1° L'anneau $A_R(G)$ est engendré par R et un nombre fini de fonctions.

2° Pour tout R-homomorphisme χ de $A_R(G)$ dans K, il existe un x unique dans G avec $\chi(u) = u(x)$ pour toute u dans $A_R(G)$.

3° Des éléments de $A_R(G)$, linéairement indépendants sur R, le restent sur K.

4° Pour u dans $A_R(G)$, il existe des u_i et des u'_i dans $A_R(G)$ satisfaisant à l'identité :

$$(1) \qquad u(xy^{-1}) = \sum_i u_i(x) \cdot u'_i(y) \qquad (x, y \text{ dans } G) \quad .$$

Un groupe muni d'une R-structure est dit aussi "groupe algébrique sur R".

Soit S un anneau avec $R \subset S \subset K$; on dit que $x \in G$ est rationnel sur S si $u(x) \in S$ pour toute u dans $A_R(G)$; ces points forment un sous-groupe G_S de $G = G_K$; si S' est un anneau avec $R \subset S' \subset K$, tout R-homomorphisme σ de S dans S' définit un homomorphisme $x \rightsquigarrow x^\sigma$ de G_S dans $G_{S'}$ caractérisé par $u(x^\sigma) = u(x)^\sigma$ pour toute u dans $A_R(G)$. Si l'anneau S est principal, l'anneau $A_S(G)$, engendré par $A_R(G)$ et S, définit une S-structure sur G. Enfin, si G et H sont deux groupes algébriques sur R, un homomorphisme f de G dans H est dit rationnel et défini sur R si l'on a $u \circ f \in A_R(G)$ pour u dans $A_R(H)$.

Un sous-groupe Γ de $GL(n, K)$ est algébrique s'il est défini par un nombre fini d'équations algébriques, et défini sur R si l'idéal de $K[T_{11}, \dots, T_{nn}]$ formé des polynômes nuls sur Γ est engendré par des polynômes à coefficients dans R. L'anneau $A_R(\Gamma)$ des fonctions

$$u(x) = P(x_{11}, \dots, x_{nn}) \cdot \det^{-m} x$$

où P est un polynôme à coefficients dans R et $m \geqslant 0$ est entier, est une R-structure sur Γ ; on a alors

$$\Gamma_S = \Gamma \cap GL(n, S) \quad \text{et} \quad x^\sigma = (x_{ij}^\sigma) \quad \text{pour} \quad x = (x_{ij}) \quad \text{dans} \quad \Gamma_S \quad .$$

Tout groupe algébrique sur R est isomorphe à un tel groupe "linéaire".

Supposons $K = \mathbb{C}$ (corps des complexes) et $R = \mathbb{Z}$ (anneau des entiers). On choisit une extension algébriquement close L du corps $\mathbb{F}_p$ et l'on note $\overline{G}$ l'ensemble des homomorphismes de $A_{\mathbb{Z}}(G)$ dans L ; pour u dans $A_{\mathbb{Z}}(G)$, on pose $\overline{u}(x) = x(u)$; il existe une unique structure de groupe sur $\overline{G}$ pour laquelle l'identité (1) entraîne l'identité analogue :

$$(2) \qquad \overline{u}(xy^{-1}) = \sum_i \overline{u_i}(x) \cdot \overline{u}'_i(y) \qquad (x, y \text{ dans } \overline{G}) \quad .$$

L'ensemble des fonctions $\overline{u}$ sur $\overline{G}$ y définit une $\mathbb{F}_p$-structure ; on dit que le groupe algébrique $\overline{G}$ est déduit de G par réduction modulo p. Supposons que $G_{\mathbb{C}}$ soit un sous-groupe algébrique de $GL(n, \mathbb{C})$ défini sur $\mathbb{Z}$; alors, pour tout sous-corps k de L, le groupe $\overline{G}_k$ se compose des matrices de $GL(n, k)$ satisfaisant à toutes les relations algébriques à coefficients entiers satisfaites par $G_{\mathbb{C}}$.

2. Groupes semi-simples complexes.

Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe connexe. Il y a sur G une unique $\underset{\sim}{C}$-structure pour laquelle les fonctions de $A_{\underset{\sim}{C}}(G)$ soient holomorphes, et $A_C(G)$ se compose des coefficients des représentations linéaires holomorphes de dimension finie de G. On écrira désormais $G_{\underset{\sim}{C}}$ pour G.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G_{\underset{\sim}{C}}$. Il existe alors une sous-algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, des formes linéaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ linéairement indépendantes sur $\mathfrak{h}$ (avec $\ell = \dim \mathfrak{h}$) et des éléments $X_1, \ldots, X_\ell$ de $\mathfrak{g}$ satisfaisant aux propriétés suivantes :

(i) Soit Δ l'ensemble des "racines", c'est-à-dire des formes linéaires $\alpha \neq 0$ sur $\mathfrak{h}$ telles que le sous-espace $\mathfrak{g}_\alpha$ formé des $X \in \mathfrak{g}$ avec $[H, X] = \alpha(H).X$ pour tout H dans $\mathfrak{h}$ soit non nul. Alors $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{h}$ et des $\mathfrak{g}_\alpha$ pour α dans Δ et $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ pour $\alpha \in \Delta$. Tout élément de Δ est de la forme $\alpha = \pm \sum_i m_i.\alpha_i$ avec des entiers $m_i \geqslant 0$.

(ii) Pour $i = 1, 2, \ldots, \ell$, on a $X_i \in \mathfrak{g}_{\alpha_i}$ et il existe des éléments bien déterminés $Y_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ et $H_i \in \mathfrak{h}$ avec $[X_i, Y_i] = H_i$ et $\alpha_i(H_i) = 2$. Posons $a_{ij} = \alpha_i(H_j)$; pour $i \neq j$, c'est un entier $\leqslant 0$ et l'on a les relations de commutation :

$$(3)\quad [H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j] = a_{ji}.X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ji}.Y_j, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij}.H_i$$

(où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). De plus, les X_i, H_i, Y_i engendrent $\mathfrak{g}$.

(iii) Pour $i = 1, 2, \ldots, \ell$, il y a un homomorphisme rationnel τ_i de $SL(2, \underset{\sim}{C})$ dans $G_{\underset{\sim}{C}}$ caractérisé par :

$$\tau_i\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \exp t.X_i \qquad \tau_i\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} = \exp t.Y_i \qquad (\ t \text{ dans } \underset{\sim}{C}\ )$$

et $G_{\underset{\sim}{C}}$ est engendré par la réunion des images des τ_i.

La matrice de Cartan (a_{ij}) d'ordre ℓ ne dépend que de $\mathfrak{g}$ mais non de $\mathfrak{h}$ etc., à une permutation près de l'ensemble d'indices $\{1, 2, \ldots, \ell\}$; si le système $(\mathfrak{h}', \alpha'_i, X'_i)$ satisfait aux mêmes hypothèses que $(\mathfrak{h}, \alpha_i, X_i)$ et définit la même matrice de Cartan, il existe un unique automorphisme φ de $G_{\underset{\sim}{C}}$ transformant un système en l'autre, caractérisé aussi par $\varphi \circ \tau_i = \tau'_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant \ell$.

D'après CHEVALLEY [2], il existe sur $G_{\underset{\sim}{C}}$ une unique $\underset{\sim}{Z}$-structure $A_{\underset{\sim}{Z}}(G)$ pour laquelle les homomorphismes τ_i soient rationnels et définis sur $\underset{\sim}{Z}$; $A_{\underset{\sim}{C}}(G)$

est engendré par $\underset{\sim}{C}$ et $A_{\underset{\sim}{Z}}(G)$; un homomorphisme f de $G_{\underset{\sim}{C}}$ dans un groupe $H_{\underset{\sim}{C}}$ algébrique sur $\underset{\sim}{Z}$ est rationnel et défini sur $\underset{\sim}{Z}$ si et seulement si chacun des $f \circ \tau_i$ a cette propriété ; si $G_{\underset{\sim}{C}}$ est un sous-groupe de $GL(n, \underset{\sim}{C})$ et si les éléments de la matrice $\tau_i\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sont des polynômes à coefficients entiers en a, b, c, d, alors $G_{\underset{\sim}{C}}$ est un sous-groupe algébrique de $GL(n, \underset{\sim}{C})$ défini sur $\underset{\sim}{Z}$ et la $\underset{\sim}{Z}$-structure précédente sur $G_{\underset{\sim}{C}}$ est l'évidente.

Supposons désormais $G_{\underset{\sim}{C}}$ simplement connexe. Soient $\overline{G}$ le groupe algébrique sur $\underset{\sim}{F}_p$ défini par réduction modulo p de $G_{\underset{\sim}{C}}$ muni de $A_{\underset{\sim}{Z}}(G)$ et $\overline{G}^{(L)}$ le groupe algébrique sur L défini par la L-structure $L[A_{\underset{\sim}{F}_p}(\overline{G})]$ sur $\overline{G}$; on peut montrer [5] que $\overline{G}^{(L)}$ est connexe et "simplement connexe" au sens algébrique, c'est-à-dire que tout homomorphisme rationnel défini sur L de $\overline{G}^{(L)}$ dans le groupe projectif $PL(n)$ se remonte de manière unique en un homomorphisme à valeurs dans $GL(n)$. Réciproquement, tout groupe algébrique connexe et simplement connexe sur L est isomorphe à un groupe de la forme $\overline{G}^{(L)}$ (cf. [5]).

Comme $\overline{G}$ est muni d'une $\underset{\sim}{F}_p$-structure, l'automorphisme $t \leadsto t^p$ de L définit un automorphisme F du groupe "abstrait" $\overline{G}$, et l'équation $F^r(x) = x$ caractérise le sous-groupe $\overline{G}_k$ où k est le corps à p^r éléments. CHEVALLEY [3] a prouvé que $\overline{G}_k$ est égal à son groupe des commutateurs, et que le quotient de $\overline{G}_k$ par son centre est simple (sauf quatre exceptions). Soit π une permutation de $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ telle que $a_{\pi(i),\pi(j)} = a_{ij}$; il y a alors un automorphisme f de $G_{\underset{\sim}{C}}$ caractérisé par $f \circ \tau_i = \tau_{\pi(i)}$, et f définit un automorphisme rationnel $\overline{f}$ de $\overline{G}$ défini qur $\underset{\sim}{F}_p$; le groupe de Steinberg $\overline{G}^1_k$ se compose des $x \in \overline{G}$ tels que $F^r(x) = \overline{f}(x)$, et le quotient de ce groupe par son centre est simple. Enfin, pour $G_{\underset{\sim}{C}}$ de type B_2 ou F_4 et $p = 2$, ou $G_{\underset{\sim}{C}}$ de type G_2 et $p = 3$, il y a certains homomorphismes rationels exceptionnels $\varphi : \overline{G} \to \overline{G}$, ne provenant pas d'automorphismes de $G_{\underset{\sim}{C}}$ et tels que $\varphi \circ \varphi = F$; ils servent à définir les groupes de Suzuki et Ree (cf. [8]).

3. Algèbre de Lie de G sur les entiers.

Soit toujours $G_{\underset{\sim}{C}}$ un groupe de Lie semi-simple complexe, connexe et simplement connexe ; on fait choix de $(\mathfrak{h}, \alpha_i, X_i)$ comme au 2° ; il définissent une $\underset{\sim}{Z}$-structure $A_{\underset{\sim}{Z}}(G)$ sur $G_{\underset{\sim}{C}}$ et le groupe $\overline{G}$ algébrique sur $\underset{\sim}{F}_p$. Considérant $\mathfrak{g}$ comme l'espace tangent à $G_{\underset{\sim}{C}}$ en l'origine, on notera $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $X.u$ soit un nombre entier pour toute u dans $A_{\underset{\sim}{Z}}(G)$; on peut caractériser $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}}$ parmi les sous-anneaux de Lie de $\mathfrak{g}$ en disant que le groupe abélien $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}} \cap \mathfrak{h}$ a pour base les H_i, que les X_i sont dans $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}}$ et que $\mathfrak{g}_{\underset{\sim}{Z}}$ est stable par les opérateurs $\frac{1}{m!}\operatorname{ad}^m X_i$ et $\frac{1}{m!}\operatorname{ad}^m Y_i$. L'anneau de Lie $g_{\underset{\sim}{Z}}$ admet alors une base sur $\underset{\sim}{Z}$ formée des H_i et d'éléments $X_\alpha \in g_\alpha$, définis au signe près et ayant les propriétés suivantes :

si l'on pose $H_\alpha = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$, on a $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ et $\alpha(H_\alpha) = 2$; on a :

(4) $$[X_\alpha, X_\beta] = \pm p_{\alpha\beta} X_{\alpha+\beta}$$

lorsque $\alpha + \beta$ est racine et que $p_{\alpha\beta}$ est le plus petit des entiers i tels que $\beta - i\alpha$ ne soit pas racine ; enfin, $g_{\underset{\sim}{Z}}$ est stable par tout opérateur $\frac{1}{m!}\operatorname{ad}^m X_\alpha$ et $X_{\alpha_i} = X_i$, $X_{-\alpha_i} = Y_i$, $H_{\alpha_i} = H_i$.

On notera $\bar{g}$ l'algèbre de Lie du groupe algébrique $\bar{G}$ sur le corps $\underset{\sim}{F}_p$; tout élément X de $g_{\underset{\sim}{Z}}$ définit un élément $\bar{X}$ de $\bar{g}$ par réduction modulo p, et l'on peut prouver que les éléments $\bar{H}_i$ et $\bar{X}_\alpha$ forment une base de $\bar{g}$ sur L. Les combinaisons linéaires de ces éléments à coefficients dans un corps $k \subset L$ forment la partie $\bar{g}_k$ de $\bar{g}$ rationnelle sur k. Comme les homomorphismes τ_i de $SL(2, \underset{\sim}{C})$ dans $G_{\underset{\sim}{C}}$ sont rationnels, définis sur $\underset{\sim}{Z}$, ils définissent par réduction modulo p des homomorphismes rationnels $\bar{\tau}_i$, définis sur $\underset{\sim}{F}_p$, de $SL(2, L)$ dans $\bar{G}_L$; on posera :

$$\bar{x}_i(t) = \bar{\tau}_i\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{y}_i(t) = \bar{\tau}_i\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix} \qquad \bar{\chi}_i(t) = \bar{\tau}_i\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}.$$

On peut aussi définir la représentation adjointe Ad de $\bar{G}_L = \bar{G}$ dans $\bar{g}_L = \bar{g}$.
Ceci étant, excluons les cas exceptionnels :

(E) On a $p = 2$ et G de type B_n, C_n ou F_4, ou bien $p = 2, 3$ et G de type G_2.

On peut alors prouver $\operatorname{ad}^p X_i = \operatorname{ad}^p Y_i = 0$; il en résulte que l'algèbre de Lie $g_{\underset{\sim}{F}_p}$ est engendrée par les $\bar{X}_i$ et les $\bar{Y}_i$ et que l'on a :

(5) $$\operatorname{Ad}\bar{x}_i(t) = \exp \operatorname{ad} t\bar{X}_i \qquad \operatorname{Ad}\bar{y}_i(t) = \exp \operatorname{ad} t\bar{Y}_i$$

les exponentielles ayant un sens car $\operatorname{ad}\bar{X}_i$ et $\operatorname{ad}\bar{Y}_i$ sont de puissance p-ième nulle.

4. Représentations d'algèbres de Lie en caractéristique p.

Comme $\bar{G}$ est un groupe algébrique en caractéristique $p \neq 0$, son algèbre de Lie $\bar{g}$ possède une opération $X \rightsquigarrow X^{[p]}$ de puissance p-ième satisfaisant aux règles bien connues de Jacobson ; on a $\bar{X}_\alpha^p = 0$ et $\bar{H}_\alpha^p = \bar{H}_\alpha$. L'algèbre enveloppante restreinte E de $\bar{g}$ est une algèbre associative contenant $\bar{g}$ comme sous-espace vectoriel, dans laquelle on a :

(6) $$[X, Y] = XY - YX \qquad X^{[p]} = \overbrace{X.X \ldots X}^{p} \qquad (X, Y \in \bar{g})$$

et universelle pour ces propriétés ; si $\underset{\sim}{G}_{\underset{\sim}{C}}$ est de dimension (complexe) d , alors E est de dimension p^d sur L .

Toute racine est de la forme $\alpha = \pm \sum_i m_i \alpha_i$, ($m_i \geq 0$ entiers) ; nous dirons que α est positive ou négative suivant le signe $+$ ou $-$; les X_α pour α positive (resp. négative) forment une base d'une sous-algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) de $\mathfrak{g}$ et l'on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$; propriétés analogues dans $\overline{\mathfrak{g}}$. On peut énumérer les racines positives sous la forme $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_s$ où la relation $\alpha < \beta$ est définie par l'ordre lexicographique des coefficients m_i ; alors $d = \ell + 2s$ et E admet pour base les monômes :

$$\overline{X}_{-\beta_s}^{u_s} \dots \overline{X}_{-\beta_1}^{u_1} \overline{H}_1^{v_1} \dots \overline{H}_\ell^{v_\ell} \overline{X}_{\beta_1}^{w_1} \dots \overline{X}_{\beta_s}^{w_s} = M(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w}) \tag{7}$$

où les exposants prennent les valeurs $0, 1, 2, \dots, p-1$.

THÉORÈME 1 (CURTIS [4]).

a. Soit T une représentation linéaire restreinte irréductible de $\overline{\mathfrak{g}}$ dans un espace V de dimension finie sur L . L'espace vectoriel V_+ des vecteurs "dominants", c'est-à-dire annulés par $T(\overline{\mathfrak{n}}_+)$, est de dimension 1 , et il existe une forme linéaire λ sur $\overline{\mathfrak{h}}$ (le "poids dominant" de T) telle que $T(H).v = \lambda(H).v$ pour $H \in \overline{\mathfrak{h}}$ et $v \in V_+$.

b. Deux représentations irréductibles restreintes sont équivalentes si et seulement si elles ont même poids dominant.

c. Pour qu'une forme linéaire λ sur $\overline{\mathfrak{h}}$ soit le poids dominant d'une représentation irréductible restreinte, il faut et il suffit que λ appartienne à l'ensemble $\mathfrak{M}$ défini par $\lambda(H_i) \in \underset{\sim}{F}_p$ pour $i = 1, 2, \dots, \ell$.

Par hypothèse, T est une application linéaire de $\overline{\mathfrak{g}}$ dans l'espace des endomorphismes de V telle que

$$T([X, Y]) = T(X)\,T(Y) - T(Y)\,T(X) \qquad \text{et} \quad T(X^{[p]}) = T(X)^p \quad ;$$

il revient au même de dire que T est la restriction à $\overline{\mathfrak{g}}$ d'une représentation linéaire de l'algèbre associative E .

a. Comme l'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{n}}_+$ est nilpotente, de base les $\overline{X}_\alpha$, et que $T(\overline{X}_\alpha)^p = T(\overline{X}_\alpha^p) = 0$, une variante du théorème d'Engel due à Jacobson entraîne $\dim V_+ > 0$; comme les $T(\overline{H}_i)$ commutent deux à deux et laissent stable V_+ , ils ont dans V_+ un vecteur propre commun $v_+ \neq 0$; la relation $T(\overline{H}_i)^p = T(\overline{H}_i)$ montre que les valeurs propres de $T(\overline{H}_i)$ sont dans $\underset{\sim}{F}_p$, d'où $c_1, \dots, c_\ell$

dans $\underset{\sim}{F}_p$ avec $T(\overline{H}_i).v_+ = c_i.v_+$. Comme T est irréductible, on a $T(E).v_+ = V$ et d'après (7), V est engendré par les vecteurs $M(\underset{\sim}{u}, 0, 0).v_+$; soit V_j le sous-espace de V engendré par les $M(\underset{\sim}{u}, 0, 0).v_+$ pour $u_1 + \dots + u_s \geqslant j$; d'après le théorème d'Engel-Jacobson appliqué à l'algèbre de Lie nilpotente $\overline{n}_-$, on a

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_2 \supsetneq \dots \supsetneq V_t = 0 \quad \text{et} \quad T(\overline{n}_-).V_j \subset V_{j+1} \quad .$$

On a évidemment $V = L.v_+ \oplus V_1$; si l'on avait $V_+ \neq L.v_+$, il existerait un vecteur non nul v' dans $V_1 \cap V_+$; d'après (7) et l'irréductibilité de T, on aurait

$$V = T(E).v' = \sum_{\underset{\sim}{u}} M(\underset{\sim}{u}, 0, 0).v' \subset V_1 \quad ,$$

ce qui est absurde. La forme linéaire λ est définie par $\lambda(H_i) = c_i$ pour $i = 1, 2, \dots, \ell$.

b. Il existe une forme linéaire f sur V, nulle sur V_1, avec $\langle f, v_+\rangle = 1$; on a :

$$\langle f, T(M(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{w})).v_+\rangle = \begin{cases} \lambda(H_1)^{v_1} \dots \lambda(H_\ell)^{v_\ell} & \text{si } \underset{\sim}{u} = 0 \text{ et } \underset{\sim}{w} = 0 \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Comme deux représentations linéaires irréductibles de l'algèbre associative E qui ont un coefficient commun sont équivalentes, la représentation T est caractérisée, à une équivalence près, par λ.

c. Soit E' (resp. E'') la sous-algèbre de E engendrée par 1 et $\overline{n}_-$ (resp. 1 et $\overline{\mathfrak{h}} \oplus \overline{n}_+$) ; l'application linéaire φ de $E' \otimes E''$ dans E envoyant $u' \otimes u''$ sur $u'u''$ est bijective d'après (7) ; comme E'' est algèbre enveloppante universelle de $\overline{\mathfrak{h}} \oplus \overline{n}_+$, tout élément λ de $\mathfrak{M}$ est la restriction à $\overline{\mathfrak{h}}$ d'un homomorphisme χ de E'' dans L nul sur $\overline{n}_+$; si P est le noyau de χ, il est immédiat que $E'.P$ est un idéal à gauche de E, distinct de E (car c'est l'image de $E' \otimes P$ par φ et $P \neq E''$), donc contenu dans un idéal à gauche maximal α ; la représentation naturelle de $\overline{g}$ dans E/α est irréductible, restreinte, et la classe de 1 modulo α est un vecteur dominant.

C. Q. F. D.

5. Construction de représentations irréductibles de $\overline{G}$.

Pour chaque λ dans $\mathfrak{M}$ choisissons une représentation linéaire irréductible T_λ de E dans un espace V_λ, de poids dominant λ ; notons A_λ l'algèbre des endomorphismes de V_λ ; comme L est algébriquement clos, et que toute représentation irréductible de E est équivalente à une et une seule des T_λ, l'application $u \rightsquigarrow (T_\lambda(u))$ est un homomorphisme de E sur $\prod_\lambda A_\lambda$, ayant pour noyau le radical r de E. La représentation Ad de $\overline{G}^{(L)}$ dans $\overline{\mathfrak{g}}$ se prolonge en un homomorphisme rationnel de $\overline{G}^{(L)}$ dans le groupe algébrique des automorphismes de l'algèbre E ; le radical de E étant stable par tout automorphisme de E, on en déduit une représentation linéaire rationnelle φ de $\overline{G}^{(L)}$ dans le groupe des automorphismes de l'algèbre $\prod_\lambda A_\lambda$; comme le groupe algébrique $\overline{G}^{(L)}$ est connexe, $\varphi(\overline{G})^{(L)}$ laisse stable chaque facteur A_λ ; mais le groupe des automorphismes de A_λ n'est autre que le groupe projectif $PL(V_\lambda)$, et comme $\overline{G}^{(L)}$ est simplement connexe, tout homomorphisme rationnel de $\overline{G}^{(L)}$ dans $PL(V_\lambda)$ se remonte en un homomorphisme rationnel de $\overline{G}^{(L)}$ dans $GL(V_\lambda)$. En résumé, pour chaque λ, il existe un homomorphisme rationnel φ_λ de $\overline{G}^{(L)}$ dans $GL(V_\lambda)$ caractérisé par :

$$(8) \qquad T_\lambda((\mathrm{Ad}\ x).X) = \varphi_\lambda(x).T_\lambda(X).\varphi_\lambda(x)^{-1} \qquad (x \in \overline{G},\ X \in \overline{\mathfrak{g}}) \quad .$$

THÉORÈME 2. - Soient k un sous-corps de L, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ une suite d'isomorphismes distincts de k dans L, et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ une suite d'éléments de $\mathfrak{M}$. La représentation linéaire

$$T_{\lambda,\sigma} : x \rightsquigarrow \varphi_{\lambda_1}(x^{\sigma_1}) \otimes \dots \otimes \varphi_{\lambda_m}(x^{\sigma_m})$$

du groupe $\overline{G}_k$ dans l'espace vectoriel $V_{\lambda,\sigma} = V_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes V_{\lambda_m}$ est irréductible. Ces représentations $V_{\lambda,\sigma}$ sont deux à deux inéquivalentes.

Nous donnerons une démonstration qui ne s'applique pas au cas exceptionnel (E), mais qui est plus simple que celle de STEINBERG.

Soit λ dans $\mathfrak{M}$; comme $T_\lambda(\overline{X}_i)^p = 0$, on peut définir $\exp t.T_\lambda(\overline{X}_i)$ pour t dans L ; d'après les formules (5) et (8), il existe $\chi(t) \neq 0$ dans L avec :

$$(9) \qquad \varphi_\lambda(\overline{x}_i(t)) = \chi(t).\exp(t.T_\lambda(\overline{X}_i)) \quad .$$

On a $\chi(t+t') = \chi(t).\chi(t')$, mais χ est un polynôme, ce qui entraîne $\chi = 1$. Pour t dans k, on en déduit :

$$(10) \qquad T_{\lambda,\sigma}(\overline{x}_i(t)) = \sum (t^{\sigma_1})^{u_1} \dots (t^{\sigma_m})^{u_m}.T_{\lambda_1}(X_i)^{u_1} \otimes \dots \otimes T_{\lambda_m}(\overline{X}_i)^{u_1 ! \dots u_m !}$$

(sommation sur toutes les suites d'entiers $(u_1, \dots, u_m)$ avec $0 \leqslant u_j < p$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$). Une généralisation facile d'un théorème bien connu de DEDEKIND montre que les fonctions

$$t \rightsquigarrow (t^{\sigma_1})^{u_1} \dots (t^{\sigma_m})^{u_m}$$

sur k à valeurs dans L sont linéairement indépendantes sur L.

L'algèbre A d'endomorphismes de $V_{\lambda,\sigma}$ engendrée par les $T_{\lambda,\sigma}(x)$ pour $x \in \overline{G}_k$ contient les $T_{\lambda,\sigma}(\overline{x}_i(t))$ pour t dans k, et de (10), on déduit alors qu'elle contient les opérateurs $\bigotimes_{j=1}^{m} T_{\lambda_j}(\overline{X}_i)^{u_j}$; l'algèbre A contient aussi les opérateurs analogues avec les $\overline{Y}_i$, et comme E est engendrée par les $\overline{X}_i$ et les $\overline{Y}_i$, elle contient les opérateurs $\bigotimes_{j=1}^{m} T_{\lambda_j}(a_j)$ pour $a_j \in E$; comme $T_{\lambda_j}(E) = A_{\lambda_j}$, on voit que tout opérateur dans V appartient à A, donc T est irréductible.

On montre de même que l'équivalence de deux représentations de $\overline{G}_k$ du type $T_{\lambda,\sigma}$ entraîne l'équivalence des représentations correspondantes de l'algèbre associative $E \otimes \ldots \otimes E$ (m facteurs), d'où l'égalité des paires (λ, σ).

C. Q. F. D.

Soit (m) un système de ℓ entiers $m_i \geqslant 0$; introduisons le développement p-adique $m_i = \sum_{h\geqslant 0} m_{hi}\, p^h$ avec $0 \leqslant m_{hi} < p$; notons λ_h l'élément de $\mathfrak{M}$ défini par $\lambda_h(\overline{H}_i) = m_{hi}$; alors $T_{\lambda_h} \circ F^h$ est une représentation linéaire rationnelle de $\overline{G}^{(L)}$; le produit tensoriel de toutes ces représentations pour les h avec $\lambda_h \neq 0$ sera notée $T_{(m)}$.

THÉORÈME 3. – <u>Les représentations $T_{(m)}$ forment un système complet de représentations linéaires irréductibles rationnelles de $\overline{G}^{(L)}$.</u>

Le théorème 2 appliqué aux automorphismes distincts $t \rightsquigarrow t^{p^h}$ de L montre que les représentations $T_{(m)}$ sont irréductibles. Soit $B_{\underset{\sim}{C}}$ le sous-groupe de $G_{\underset{\sim}{C}}$ correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$; c'est un sous-groupe algébrique de $G_{\underset{\sim}{C}}$ défini sur $\underset{\sim}{Z}$, donc il définit un sous-groupe algébrique $\overline{B}^{(L)}$ de $\overline{G}^{(L)}$, engendré par les images des homomorphismes $\overline{x}_i$ et $\overline{\chi}_i$. Pour tout (m), il existe un homomorphisme rationnel $\Psi_{(m)}$ de $\overline{B}^{(L)}$ dans GL(1), et un seul, tel que $\Psi_{(m)}(\overline{x}_i(t)) = 1$ et $\Psi_{(m)}(\overline{\chi}_i(t)) = t^{m_i}$. Si v_h est un vecteur dominant de la représentation T_{λ_h}, et si v_+ est le produit tensoriel des v_h, on a $T_{(m)}(x)\cdot v_+ = \Psi_{(m)}(x)\cdot v_+$ pour x dans $\overline{B}^{(L)}$. Comme $\overline{B}^{(L)}$ est un groupe de Borel du groupe simplement connexe $\overline{G}^{(L)}$, le théorème est conséquence des résultats de CHEVALLEY [5].

On montre facilement que la construction des $T_{(m)}$ peut se faire rationnellement sur $\underset{\sim}{F}_p$.

C. Q. F. D.

6. Cas des groupes finis.

Soit k le corps à $q = p^r$ éléments ; comme les automorphismes $t \leadsto t^{p^i}$ de k pour $0 \leq i < r$ sont distincts, le théorème 2 montre immédiatement que les restrictions à G_k des représentations $T_{(m)}$ pour $0 \leq m_i < p^r$ sont irréductibles et non équivalentes. Ceci fournit q^ℓ représentations irréductibles de $\overline{G}_k$; pour montrer que l'on a obtenu toutes les représentations irréductibles du groupe fini $\overline{G}_k$, il suffit, d'après BRAUER [1], de montrer que le groupe $\overline{G}_k$ possède au plus q^ℓ classes distinctes (pour la conjugaison) d'éléments d'ordre premier à p, c'est-à-dire semi-simples. STEINBERG procède ainsi : un élément semi-simple de $\overline{G}$ étant conjugué à un élément d'un tore maximal T, les classes d'éléments conjugués de $\overline{G}$ correspondent aux orbites du groupe de Weyl W opérant dans T ; la variété T/W est en fait un espace affine de dimension ℓ, défini sur $\underset{\sim}{F}_p$; par un argument galoisien dû à LANG, **on montre que les classes de conjugaison** des éléments semi-simples de $\overline{G}_k$ correspondent aux points de T/W rationnels sur k, d'où leur nombre q^ℓ.

Le cas des groupes G_k^1 se traite par une méthode analogue.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRAUER (R.) and NESBITT (C.). - On the modular characters of groups, Ann. of Math., Series 2, t. 42, 1941, p. 556-590.

[2] CHEVALLEY (Claude). - Certains schémas de groupes semi-simples, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 219, 16 p.

[3] CHEVALLEY (Claude). - Sur certains groupes simples, Tôhoku math. J., Series 2, t. 7, 1955, p. 14-66.

[4] CURTIS (Charles W.). - Representations of Lie algebras of classical type with applications to linear groups, J. Math. and Mech., t. 9, 1960, p. 307-326.

[5] Séminaire CHEVALLEY, t. 1, 1956-1958 : Classification des groupes de Lie algébriques. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958 (multigraphié).

[6] STEINBERG (Robert). - Variations on a theme of Chevalley, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 875-891.

[7] STEINBERG (Robert). - Representations of algebraic groups (à paraître).

[8] TITS (Jacques). - Les groupes simples de Suzuki et de Ree, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, n° 210, 18 p.