Mohamed Salah Baouendi

Les opérateurs de convolution

Séminaire N. Bourbaki, 1964, exp. nº 254, p. 171-178
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__171_0>

Séminaire BOURBAKI
15e année, 1962/63, n° 254

Mai 1963

LES OPÉRATEURS DE CONVOLUTION

par Mohamed Salah BAOUENDI

(d'après Léon EHRENPREIS [1] et Lars HÖRMANDER [2])

Notations. - Ω désignera un ouvert de $\underset{\sim}{R}^n$. $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}^k(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'^k(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ sont les espaces de Schwartz [5]. $\mathcal{D}'^F(\Omega)$ désignera l'espace des distributions d'ordre fini dans Ω.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, on posera

$$\|\varphi\|_j = \sum_{|\alpha|\leq j} \sup_x |D^\alpha \varphi(x)| \quad \text{avec} \quad \alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \quad \text{et} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \quad .$$

Pour $S \in \mathcal{E}'$, nous noterons $\hat{S}$ sa transformée de Fourier

$$\hat{S}(\zeta) = \langle S_x , e^{i\langle\zeta,x\rangle}\rangle$$

avec $\zeta \in \underset{\sim}{C}^n$, $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $1 \leq j \leq n$.

Introduction. - MALGRANGE a étudié dans sa thèse [4] les opérateurs différentiels à coefficients constants, et a donné des conditions nécessaires et suffisantes sur Ω pour avoir

$$P(D)\ \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega) \ , \quad P(D)\ \mathcal{D}'^F(\Omega) = \mathcal{D}'^F(\Omega) \quad .$$

EHRENPREIS a étudié les opérateurs de convolution dans $\mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$, et a caractérisé les $S \in \mathcal{E}'$ pour lesquelles on a : $S \star \mathcal{D}' = \mathcal{D}'$ [1]. HORMANDER dans [2] étudie les opérateurs de convolution dans des ouverts de $\underset{\sim}{R}^n$ et obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence généralisent ainsi les résultats indiqués.

1. Existence dans $\mathcal{E}$.

Soient $S \in \mathcal{E}'(\underset{\sim}{R}^n)$, Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\underset{\sim}{R}^n$ vérifiant

$$\Omega_1 + \text{support } S \subset \Omega_2 \quad .$$

Soit $T : \mathcal{D}(\Omega_1) \to \mathcal{D}(\Omega_2)$, $T(\varphi) = S \star \varphi$. T est injective (par transformation de Fourier). $T^* : \mathcal{D}'(\Omega_2) \to \mathcal{D}'(\Omega_1)$ la transposée de T et on a, par définition, $T^* u = \check{S} \star u \mid \mathcal{D}(\Omega_1)$. Notre but, dans ce paragraphe, est de donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur S, Ω_1 et Ω_2, pour avoir $T^* \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$.

LEMME 1. – Pour que T^{-1} soit continue pour les suites, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1° $\forall\ K_1 \subset \Omega_1$, K_1 compact, $\exists\ C$, $\exists\ N$ tels que

$$\|\varphi\|_0 \leq C\|S \star \varphi\|_N \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_{K_1} .$$

2° $\forall\ K_2 \subset \Omega_2$, K_2 compact, $\exists\ K_1$, K_1 compact, $K_1 \subset \Omega_1$ tel que :

$$\forall\ \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1), \qquad \operatorname{supp} T\varphi \subset K_2 \implies \operatorname{supp} \varphi \subset K_1 .$$

La démonstration de ce lemme est immédiate [2].

THÉORÈME 1. – Pour que l'on ait $T^* \mathcal{D}'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$, il est nécessaire que T^{-1} soit continue pour les suites.

Démonstration. – Soit K_2 un compact de Ω_2 ; posons

$$E = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1),\ \operatorname{supp} T\varphi \subset K_2\} ,$$

avec les semi-normes $\|T\varphi\|_j$. E est un espace métrique. Considérons sur $E \times \mathcal{E}(\Omega_1)$ la forme bilinéaire $\int f(x)\ \varphi(x)\ dx$. On voit facilement, en utilisant l'hypothèse, qu'elle est séparément continue. $\mathcal{E}(\Omega_1)$ étant un espace de Fréchet, il en résulte qu'elle est continue. Il existe donc deux entiers k et N, une constante C, et un compact K_1, tels que :

$$\left|\int f\varphi\ dx\right| \leq C \sup_{\substack{x \in K_1 \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha f(x)|\ \|T\varphi\|_N \qquad \forall\ f \in \mathcal{E}(\Omega_1),\ \forall\ \varphi \in E .$$

On en déduit aussitôt que $\operatorname{supp} \varphi \subset K_1$. En prenant $f \in \mathcal{S}$, et $g = (1 - \Delta)^j f$, on en déduit, pour j assez grand,

$$\left|\int g\varphi\ dx\right| \leq C' \int |g|\ dx\ \|T\varphi\|_{N+2j}$$

d'où :

$$\|\varphi\|_0 \leq C'\|T\varphi\|_{N+2j} .$$

C. Q. F. D.

Notre but est de démontrer la réciproque du théorème 1. Auparavant, nous allons étudier les conditions 1° et 2° du lemme 1.

THÉORÈME 2. – La condition 1° du lemme 1 est équivalente à la condition (c) suivante portant sur $\hat{S}$:

(C) Il existe trois constantes A_1, A_2, A_3 vérifiant :

$$\forall \ \xi \in \mathbb{R}^n \qquad \sup_{|\eta-\xi|\leq A_1 \operatorname{Log}(2+|\xi|)} |\hat{S}(\eta)| \geq \frac{1}{(A_2+|\xi|)^{A_3}}, \qquad \eta \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Démonstration.

1re partie. – Elle résultera de la proposition suivante, en apparence plus forte :

PROPOSITION 1. – Supposons qu'il existe un compact K_1 contenu dans $\mathbb{R}^n$, a intérieur non vide, et deux constantes C et N vérifiant

$$\forall \ \varphi \in \mathcal{D}_{K_1} \qquad \|\varphi\|_o \leq C\|T\varphi\|_N$$

alors $\hat{S}$ vérifie (C).

En supposant (C) non vérifiée, EHRENPREIS construit une suite de fonctions φ_n de $\mathcal{D}_{K_1}$ avec

$$\lim_{n\to\infty} \|S \star \varphi_n\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\|_o = +\infty$$

(voir [1] et [2]).

2ème partie. – En posant $\psi = S \star \varphi$, on a : $\hat{\varphi} = \dfrac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$, et on est ramené à majorer le rapport de deux fonctions entières. Nous avons :

LEMME 2. – Soient f et g deux fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\frac{f}{g}$ soit aussi analytique, alors, pour tout r $(r > 0)$, on a :

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \sup_{|z-\zeta|\leq 4r} |f(\zeta)| \sup_{|z-\zeta|\leq 4r} |g(\zeta)| \Big/ \Big(\sup_{|z-\zeta|\leq r} |g(\zeta)|\Big)^2 \quad .$$

Ce lemme résulte du suivant :

LEMME 2 bis. – Soient f et g deux fonctions analytiques dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\frac{f}{g}$ soit aussi analytiques, alors pour tout R $(R > 0)$ on a

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \sup_{|\zeta|\leq R} |f(\zeta)| \Big(\sup_{|\zeta|\leq R} |g(\zeta)|\Big)^{(2|z|)/(R-|z|)} |g(0)|^{-((R+|z|)/(R-|z|))}$$

pour $|z| < R$.

On se ramène au cas où $n = 1$,

$$\sup_{|z|\leq R} |f(z)| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{|z|\leq R} |g(z)| = 1 \quad .$$

On écrit alors

$$f(z) = f_1(z)\ f_2(z) \qquad g(z) = g_1(z)\ g_2(z)$$

avec $f_1(z)\ g_1(z) \neq 0$ pour $|z| < R$; $f_2(z)$ et $g_2(z)$ holomorphes pour $|z| < R$ et vérifiant :

$$|f_2(z)| = |g_2(z)| = 1 \quad \text{pour} \quad |z| = R \quad .$$

On a alors :

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq \left|\frac{f_1(z)}{g_1(z)}\right| \leq \frac{1}{|g_1(z)|} \quad .$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Harnack à la fonction harmonique et positive $-\operatorname{Log}|g_1(z)|$ il vient

$$-\log|g_1(z)| \leq -\frac{R+|z|}{R-|z|} \operatorname{Log}|g_1(0)|$$

d'où

$$\frac{1}{|g_1(z)|} \leq |g(0)|^{-((R+|z|)/(R-|z|))} \quad .$$

C. Q. F. D.

Le lemme 2 en résulte immédiatement en prenant $R = 3r$, et pour origine un point ζ_0 avec

$$|g(\zeta_0)| = \sup_{|z-\zeta|\leq r} |g(\zeta)| \quad .$$

Appliquons-le à $\hat{\varphi} = \frac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$. On a

$$|\hat{\psi}(\zeta)| \leq C_1\ e^{R|\eta|}(1 + |\zeta|)^{-N}\ \|\psi\|_N$$

avec

$$\zeta = \xi + i\eta \quad \text{et} \quad R = \sup_{\substack{y\in K_1 \\ z\in \operatorname{supp} S}} |y + z|$$

et

$$|\hat{S}(\zeta)| \leq C_2\ e^{H|\eta|}(1 + |\zeta|)^{\mu}$$

μ étant l'ordre de S. Par hypothèse, on a aussi la condition (C) portant sur $\hat{S}$. Prenons $r = A_1 \operatorname{Log}(2 + |\xi|)$ et appliquons le lemme 2, il vient alors :

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C(1 + |\xi|)^{\alpha}\ \|\psi\|_N$$

avec $\alpha = 4A_1(R + H) + \mu + 2A_3 - N$. Toutes les constantes qui interviennent sont indépendantes de φ. Par intégration, et pour N assez grand, on obtient

$$\|\varphi\|_0 \leq C'\|\psi\|_N \quad .$$

L'idée de cette démonstration est due à MALGRANGE [2].

C. Q. F. D.

<u>Définition. — Si</u> $\hat{S}$ <u>vérifie (C), on dira qu'elle est</u> lentement décroissante <u>et que</u> S est inversible :

Donnons une autre caractérisation de la décroissance lente :

THÉORÈME 3. — <u>Pour que</u> $\hat{S}$ <u>soit lentement décroissante, il faut et il suffit que, pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{E}'(\underset{\sim}{R}^n)$, <u>telle que</u> $S \star \varphi \in \mathcal{D}$, <u>on ait</u> $\varphi \in \mathcal{D}$.

<u>Condition nécessaire.</u> — Par PALEY-WIENER, il suffit de démontrer que $\frac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$ est de type exponentiel à décroissance rapide pour ζ réel, ce qui est immédiat avec les hypothèses et le lemme 2.

<u>Condition suffisante.</u> — Voir [2].

Etudions maintenant la condition 2° du lemme 1.

THÉORÈME 4. — <u>La condition 2° du lemme 1 est équivalente à la suivante</u> :

<u>Pour tout</u> $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$ <u>la distance du support de</u> φ à $\complement\Omega_1$ <u>est égale à la distance du support de</u> $S \star \varphi$ <u>à</u> $\complement\Omega_2$.

La démonstration est immédiate avec le théorème des supports [3] et l'inclusion $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$.

Nous voyons que, si la première condition du lemme 1 ne fait intervenir que $\hat{S}$, la deuxième est, par contre, géométrique, et fait intervenir les ouverts Ω_1 et Ω_2 .

<u>Définition. — Un couple d'ouverts</u> (Ω_1 , Ω_2) <u>tels que</u> $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$, <u>est appelé</u> S-convexe <u>s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes du théorème</u> 4.

Signalons que si Ω_2 est <u>convexe,</u> et Ω_1 le <u>plus grand ouvert</u> vérifiant $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$, alors Ω_1 est convexe, et (Ω_1 , Ω_2) est un couple S-<u>convexe pour tout</u> S . Ce qui justifie la définition.

Nous arrivons au théorème fondamental suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL I. — <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u>

1° $T^* \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$.

2° $T^* \mathcal{D}'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$.

3° $\hat{S}$ <u>lentement décroissante, et</u> (Ω_1 , Ω_2) S-<u>convexe</u>.

Démonstration. – On a évidemment (1°) $\Longrightarrow$ (2°). Les théorèmes 1, 2 et 4 montrent que (2°) $\Longrightarrow$ (3°). Il reste à démontrer que (3°) $\Longrightarrow$ (1°), c'est-à-dire que T^* est surjective comme application de $\mathcal{E}(\Omega_2)$ dans $\mathcal{E}(\Omega_1)$. D'après un théorème d'espaces vectoriels topologiques, il suffit de vérifier que l'application :

$$T : \mathcal{E}'(\Omega_1) \to \mathcal{E}'(\Omega_2) \qquad (T\varphi = S \star \varphi)$$

est injective et que $T\mathcal{E}'(\Omega_1)$ est fermé dans $\mathcal{E}'(\Omega_2)$.

Démontrons ce deuxième point, le premier étant trivial.

Soit M une partie équicontinue et fermée de $\mathcal{E}'(\Omega_2)$, montrons que $M \cap T\mathcal{E}'(\Omega_1)$ est fermée dans $\mathcal{E}'(\Omega_2)$. On a, $\forall \ \psi \in M$, $\forall \ f \in \mathcal{E}(\Omega_2)$:

$$|\langle\psi , f\rangle| \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{x\in K_2} |D^\alpha f(x)|$$

C, N et le compact K_2 étant indépendants de ψ et f. On en déduit que $\operatorname{supp} \psi \subset K_2$ et $|\hat{\psi}(\zeta)| \leqslant C(1 + |\zeta|)^N e^{R|\eta|}$ pour tout ψ dans M.

Soit ψ_i un filtre convergeant dans $S \star \mathcal{E}'(\Omega_1) \cap M$. Posons $\psi = \lim \psi_i$; on a $\psi \in M$.

Par hypothèse, il existe un compact K_1 $(K_1 \subset \Omega_1)$ tel que $\psi_i = S \star \varphi_i$ avec $\varphi_i \in \mathcal{E}'(K_1)$.

$\hat{\psi}_i$ converge uniformément sur tout compact (MONTEL). D'après le lemme 2 et la condition (C), il en est de même pour $\hat{\varphi}_i$; on a même $\hat{\varphi}_i \to \frac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$ dans $\mathcal{S}'$. On en déduit que $\varphi_i \to \varphi$ dans $\mathcal{S}'$ avec $\varphi \in \mathcal{E}'(K_1)$ et $\psi = S \star \varphi$.

C. Q. F. D.

2. Existence dans $\mathcal{D}'$.

Si $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, nous appelons support singulier de u, le plus petit fermé F de Ω, tel que

$$u \in \mathcal{E}(\Omega \cap \complement F) \qquad .$$

Définition. – Soient deux ouverts (Ω_1 , Ω_2) tels que :

$$\Omega_1 + \operatorname{supp} S \subset \Omega_2 \qquad .$$

Ce couple est dit S-fortement convexe s'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1° (Ω_1 , Ω_2), S-convexe.

i. e. $\forall \ \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$, $d(\operatorname{supp} \varphi , \complement\Omega_1) = d(\operatorname{supp} S \star \varphi , \complement\Omega_2)$.

2° $\forall \quad \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$

$$d(\text{supp sing } \varphi \, , \, C\Omega_1) = d(\text{supp sing } S \star \varphi \, , \, C\Omega_2) \quad .$$

THÉORÈME FONDAMENTAL II. - Pour que l'on ait $T^* \mathcal{D}'(\Omega_2) = \mathcal{D}'(\Omega_1)$, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1° $\hat{S}$ lentement décroissante.

2° (Ω_1 , Ω_2) fortement S-convexe.

Pour la démonstration, voir [2].

COROLLAIRE 1. - $T^* \mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n) = \mathcal{D}'(\underset{\sim}{R}^n)$ est équivalent à $\hat{S}$ lentement décroissante.

COROLLAIRE 2. - $T^* \mathcal{D}'(\Omega_2) \supset \mathcal{D}'^F(\Omega_1)$ est équivalent aux conditions du théorème fondamental I.

Ce corollaire résulte du théorème et du lemme.

LEMME 3. - Toute distribution f d'ordre fini dans Ω_1 $(f \in \mathcal{D}'^F(\Omega_1))$ s'écrit sous la forme : $f = g + h$ avec $g \in \mathcal{E}(\Omega_1)$ et $h = H/\Omega_1$, H étant une distribution sur $\underset{\sim}{R}^n$ $(H \in \mathcal{D}')$.

La démonstration se fait par partition de l'unité, et régularisation.

Remarques.

1° On peut se demander si les conditions du théorème fondamental I sont équivalentes à $T^* \mathcal{D}'^F(\Omega_2) = \mathcal{D}'^F(\Omega_1)$. La réponse est négative en général (due à EHRENPREIS et MALLIAVIN). La décroissance lente de $\hat{S}$ ne suffit pas, il faut une condition plus forte.

2° On peut avoir (Ω_1 , Ω_2) S-convexe, mais non fortement S-convexe (voir le contre-exemple donné par ZERNER [6]).

3° Signalons enfin que si le support de S est formé d'un nombre fini de points, $\hat{S}$ est lentement décroissante, et si Ω_2 est convexe et Ω_1 le plus grand ouvert vérifiant $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$, alors (Ω_1 , Ω_2) est fortement S-convexe.

En particulier si $S = P(-D)\,\delta$, on en déduit que, pour tout ouvert convexe Ω , on a :

$$P(D)\, \mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega) \quad .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] EHRENPREIS (Léon). - Solutions of some problems of division, Amer. J. Math., I : t. 76, 1954, p. 883-903 ; III : t. 78, 1956, p. 685-715 ; IV : t. 82, 1960, p. 522-588.

[2] HÖRMANDER (Lars). - On the range of convolution operators, Annals of Math., Series 2, t. 76, 1962, p. 148-170.

[3] LIONS (Jean-Louis). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math. Jérusalem, t. 2, 1952-1953, t. 369-380.

[4] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 274-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).

[5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes I (2e éd.) et II. - Paris, Hermann, 1957 et 1961 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).

[6] ZERNER (Martin). - Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2980-2982.